

УДК 532.5:541.24

© 1990 г.

МОРОЗЕНКО С. Ю., ЯСЬКО Н. Н.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ
ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ
ГРАНИЦАМИ**

При изучении течений идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами широко используется метод граничных элементов [1-6]. Этим методом [3] проведено численное моделирование движения газового пузырька в безграничной жидкости. В [4, 5] рассмотрено взаимодействие газовой полости с твердой поверхностью раздела, в [6] исследован процесс всплывания пузырька к поверхности раздела жидкость - газ. В указанных работах при построении математической модели не учтено поверхностное натяжение жидкости и изменение давления газа в пузырьке с течением времени. В данной статье приведены результаты использования метода граничных элементов при численных расчетах неустановившегося течения капиллярной жидкости, возникающего при взаимодействии расширяющейся газовой полости со свободной поверхностью жидкости.

1. В неподвижной цилиндрической системе координат r, θ, z область D , занятая жидкостью, ограничена свободными поверхностями пузырька Γ_1 и жидкости Γ_2 . Предполагается, что первоначально центр сферической газовой полости радиуса a находится в покоящейся жидкости на глубине $z = -H$. Плоскость r, θ совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, ось z направлена вертикально вверх.

Рассматриваемая задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости, удовлетворяющего на границе области D динамическому и кинематическому краевым условиям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \varphi = \varphi(M, t), \quad M(r, z) \in D \quad (1.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + z - \frac{k_1 + k_2}{Bo} = P_2 - P_m \quad (1.2)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad M(r, z) \in \Gamma_m, \quad m=1, 2$$

где $Bo = \rho g a^2 / \sigma$ - число Бонда (обозначения обычные), $k_1 + k_2$ - сумма главных кривизн свободной поверхности. Кроме того, задается поведение потенциала на бесконечности: $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и начальное распределение потенциала: $\varphi(M, 0) = 0, M \in (\bigcup_m \Gamma_m \cup D)$. Предполагается, что в любой момент

времени масса газа в пузырьке постоянна, а давление газа изменяется по закону $P_1(t) [\rho_1(t)]^{-\kappa} = \text{const}$ (ρ_1 - плотность газа, κ - показатель политропы). Все приведенные соотношения записаны в безразмерных переменных.

2. Для решения нелинейной нестационарной задачи (1.1), (1.2) проводится дискретизация по времени и линеаризация граничных условий (1.2) с последующим применением на каждом шаге по времени для решения внешней задачи Дирихле для уравнения (1.1) метода граничных элементов.

В предположении о гладкости границы области D решение уравнения

(1.1) представляется в виде [7]

$$\int_{U_m \Gamma_m} \left[G(M, P) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} - \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \varphi(P) \right] dl_P = I \quad (2.1)$$

$$I = \varphi(M), \quad M \in \Gamma_m; \quad I = 2\varphi(M), \quad M \in D; \quad I = 0, \quad M \notin (U_m \Gamma_m U D)$$

$$G(M, P) = 2/\pi\eta [(r+\eta)^2 + (z-\xi)^2]^{-1/2} K(\gamma), \quad \gamma^2 = 4r\eta [(r+\eta)^2 + (z-\xi)^2]$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали, $P(\eta, \xi)$ — точка на границе Γ_m , $M(r, z)$ — произвольная точка, в которой определяется решение, $K(\gamma)$ — эллиптический интеграл первого рода с модулем γ .

Уравнение (2.1) является сингулярным интегральным уравнением Фредгольма первого рода; входящие в его состав эллиптические интегралы имеют логарифмическую особенность при $\gamma=1$ [8].

Граница области D разбивается на N прямолинейных граничных элементов, в центрах которых определяются значения потенциала и его нормальной производной. В результате применения квадратурной формулы второго порядка точности уравнение (2.1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно $\partial\varphi/\partial n$ (по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$A_{ij} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j = \varphi_i + B_{ij} \varphi_j, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

$$A_{ij} = \int_{L_j} G(P_i, P) dl_P, \quad B_{ij} = \int_{L_j} \frac{\partial G(P_i, P)}{\partial n} dl_P, \quad \bigcup_m \Gamma_m = \bigcup_j L_j \quad (2.3)$$

Интегралы (2.3) при $i \neq j$ вычисляются с использованием квадратурной формулы Гаусса седьмого порядка точности, при $i=j$ (в случае логарифмической особенности) применяется метод Канторовича выделения особенности при интегрировании [9].

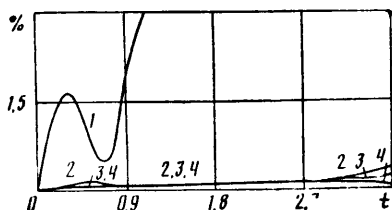
Решение системы уравнений (2.2) осуществляется методом Гаусса с выбором ведущего элемента. В результате на каждом граничном элементе определены значения $\partial\varphi/\partial n$. Значения касательной производной потенциала находятся численным дифференцированием вдоль границы области D по формуле второго порядка точности. Составляющие скорости в направлении осей r и z в центрах граничных элементов вычисляются из соотношений

$$u_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i n_r + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)_i n_z, \quad v_i = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)_i n_r + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i n_z$$

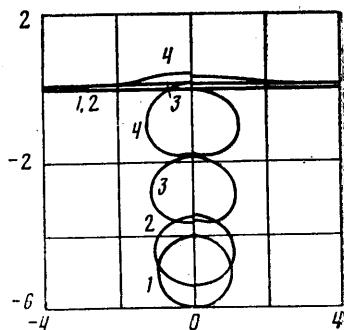
а на концах элементов — линейной интерполяцией.

Таким образом, в искомый момент времени известны все величины, необходимые для продолжения расчетов. Новое положение свободных границ и новые значения потенциала на них определяются из граничных условий (1.2), конечно-разностная аппроксимация которых осуществляется с использованием явных разностных схем типа Рунге — Кутта.

3. Численное решение задачи Дирихле для уравнения (1.1), проведенное при разбиении границ области D на 50 граничных элементов и известном аналитическом решении уравнения (1.1) $\varphi(r, z) = (r^2 + (z-1)^2)^{-1/2}$, показало, что относительная погрешность полученных результатов не превышает 1%. Проверка работоспособности предложенного алгоритма проведена на основании сравнения результатов точного и численного решения задачи Рэлея о колебаниях сферического газового пузыря в безграничной жидкости [10]. Для получения численного решения использованы разностные схемы типа Рунге — Кутта первого — четвертого порядка точности [11]. Расчеты проведены для $P_1(0)=3$, $\kappa=1$ и $N=30$. На фиг. 1 показано изменение с течением времени относительной погрешности вычис-



Фиг. 1



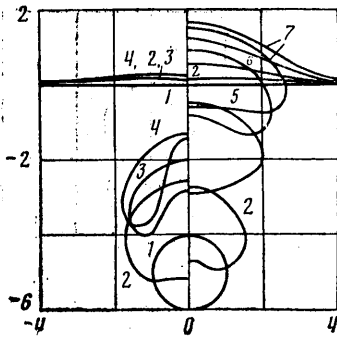
Фиг. 2

ления давления газа в пузыре для схем различного порядка точности. Анализ полученных данных свидетельствует о том, что в случае необходимости проведения численных расчетов в течение больших промежутков времени желательно использовать разностные схемы высокого порядка точности. Применение схемы первого порядка точности (см., например, [1, 2, 4]) представляется нецелесообразным.

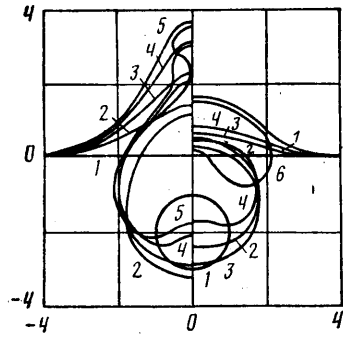
Для проверки устойчивости алгоритма проведены численные расчеты процесса всплывания газового пузырька к свободной поверхности жидкости, в которых незначительно варьировался один из определяющих параметров процесса при прочих неизменных начальных данных. На фиг. 2 приведены результаты расчетов при $P_1(0)=30$, $P_2=1$, $Bo=0,1$ (левая половина фиг. 2) и $Bo=0,11$ (правая половина фиг. 2). Цифрами 1–4 обозначены моменты времени $t=0; 0,808; 1,803; 2,802$ соответственно. Как свидетельствуют представленные данные, положения свободных границ в обоих случаях в равные моменты времени различаются довольно слабо. Кроме того, полученные результаты согласуются с известными экспериментальными данными о том, что при малых числах Бонда пузырек на протяжении всего времени всплывания сохраняет форму, близкую к сферической.

4. Для определения влияния поверхностного натяжения на динамику исследуемого процесса проведено численное моделирование расширения газовой полости вблизи поверхности раздела жидкость – газ для различных значений начального давления в пузыре и числа Бонда. На фиг. 3–5 приведены результаты численных расчетов при $\kappa=1$, $P_2=1$, $Bo=1$ и 10.

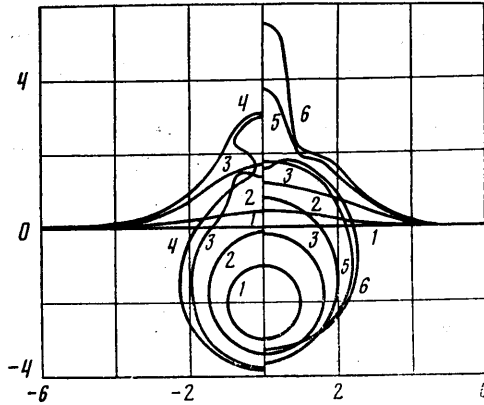
На фиг. 3 представлены положения границ расчетной области при $P_1(0)=15$, $Bo=1$ (правая половина фиг. 3) и $Bo=10$ (левая половина фиг. 3). Цифрами 1–7 обозначены моменты времени $t=0; 1,31; 1,912; 2,249; 3,148; 4,327; 5,123$. Для описываемых случаев всплывания пузыря характерны следующие общие закономерности. Первоначально форма полости некоторое время близка к сферической, пузырь расширяется, смещается вверх под действием архимедовой силы. Поскольку статическое давление жидкости вблизи кормовой части пузыря больше, чем около верхней, то нижняя граница пузыря постепенно начинает двигаться быстрее. Это обуславливает с течением времени деформацию полости и образование струи в ее кормовой части. При меньшем поверхностном натяжении жидкости формируется устойчивая струя. Пузырь при этом значительно деформируется, приобретает тороидальную форму. Расчет данного варианта продолжался до момента контакта струи с верхней частью поверхности пузыря. В процессе расчета свободная поверхность жидкости деформировалась незначительно. Приведенные результаты качественно соответствуют расчетным данным [3], однако скорость струи в описываемом случае меньше. При $Bo=1$ поверхностное натяжение препятствует развитию струи, движение нижней границы приобретает колебательный характер.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Расчет продолжался до момента разрыва жидкой пленки, отделяющей пузырек от внешней газовой фазы.

На фиг. 4 показана эволюция границ расчетной области при $P_1(0)=10$, $Bo=10$ (левая половина фиг. 4) и $Bo=1$ (правая половина фиг. 4). Цифрами 1–6 обозначены моменты времени $t=0; 0,905; 1,205; 1,505; 1,680; 2,405$ соответственно. В случае $Bo=1$ объем пузыря с течением времени увеличивается, нормальная компонента скорости в начале расчета намного превышает ее касательную составляющую. Давление в пузыре падает и становится минимальным при $t=1,105$, достигая второго экстремума при $t=1,975$ и третьего – при $t=2,457$. Поверхность раздела жидкость – газ поднимается вплоть до момента времени $t=1,185$, затем наблюдается ее медленное опускание, которое заканчивается при $t=1,765$. С момента времени $t=2,55$ поверхность жидкости вновь начинает опускаться. В нижней части пузыря образуется струя, развитие которой происходит так же, как и в предыдущем варианте. Толщина жидкой пленки, отделяющей пузырек от внешней газовой фазы, с течением времени уменьшается. Расчет был закончен после разрыва пленки.

Уменьшение поверхностного натяжения ($Bo=10$) приводит к более значительному вспучиванию поверхности жидкости. До момента времени $t=1,415$ происходит расширение полости, затем ее объем уменьшается. В кормовой части пузыря образуется небольшой прогиб свободной поверхности. В верхней части пузыря формируется кольцевая струя, в результате чего пузырек деформируется с образованием узкого перешейка. Расчет проведен до момента замыкания кольцевой струи. Подобное явление исследовано в [5], где рассматривался механизм возникновения кумулятивной струи в кавитационном пузырьке, взаимодействующем с твердой поверхностью раздела. В отличие от данных, приведенных в [5], в описы-

ваемом случае пузырек меньшего объема находится в верхней части полости. Тем не менее основные закономерности, отмеченные в [5], по-видимому, могут быть перенесены и на данный процесс.

На фиг. 5 приведены расчетные положения свободных границ для случая $P_1(0)=20$, $Vo=10$ (левая половина фиг. 5) и $Vo=1$ (правая половина фиг. 5). Цифрами 1–6 обозначены моменты времени $t=0; 0,31; 0,61; 0,804; 1,21; 1,29$ соответственно. При малом поверхностном натяжении ($Vo=10$) картина течения качественно такая же, как и в предыдущем варианте. После того как в момент времени $t=0,788$ расширение пузыря сменилось его сжатием, в верхней части пузыря образовалась кольцевая струя. Однако в отличие от случая $P_1(0)=10$ окончательного дробления полости не происходит. «Перешеек», делящий полость на две части, пульсирует, скорости максимальны на перешейке. Объем маленького пузырька больше по сравнению с предыдущим вариантом. Расчет был закончен, когда расстояние между границами полости и жидкости достигало достаточно малой величины.

При $Vo=1$ картина течения довольно долго качественно повторяет вариант расчета для $P_1(0)=10$. Пузырь устойчиво расширяется, долгое время сохраняя почти сферическую форму, его центр перемещается к свободной поверхности жидкости. Движение границ пузыря в большей степени определяется его расширением, чем действием выталкивающей силы. Давление в полости уменьшается и достигает минимума при $t=1,39$. Начиная с момента времени $t=1,15$ поверхность жидкости вблизи оси симметрии резко вспучивается. Характерные стадии развития «султана» в моменты времени $t=1,21$ и $1,29$ показаны на фиг. 5. Приведенные результаты подтверждаются экспериментальными данными [12], полученными при помощи скоростной киносъемки процесса схлопывания пузыря возле свободной поверхности жидкости в слабом поле массовых сил.

Сравнительный анализ полученных результатов, а также данных [6] показывает, что изменение поверхностного натяжения жидкости существенно влияет на физическую картину течения.

В заключение отметим, что предложенный метод расчета обладает достаточной устойчивостью и может быть использован для численного моделирования широкого класса течений идеальной жидкости со свободными границами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В. В. Погружение тел в жидкость // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 12.
2. Афанасьев К. А., Афанасьева М. М., Терентьев А. Г. Исследование эволюции свободных границ при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости методами конечных и граничных элементов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 8–13.
3. Воинов О. В., Воинов В. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
4. Plesset M. S., Chapman R. B. Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // J. Fluid Mech. 1977. V. 47. № 2. P. 283–290.
5. Воинов О. В., Воинов В. В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 63–66.
6. Dommermuth D. G., Yue Dick K. P. Numerical simulation of nonlinear axisymmetric flows with a free surface // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 195–219.
7. Бребиа К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М. И., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Базвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1973. 631 с.
10. Семенов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
11. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука, 1977. 399 с.
12. Blake J. R., Gibson D. G. Growth and collapse of a vapour cavity near a free surface // J. Fluid Mech. 1981. V. 111. P. 123–140.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
13.1.1988