МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1990

УДК 532.517.2.011:536.29

ВАТАЖИН А. Б., ПОТОКИН М. А.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕН В КАНАЛАХ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ МАЛОМ ОТКЛОНЕНИИ ИХ ФОРМЫ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ

Рассмотрены ламинарные течения вязкой несжимаемой жидкости и теплообмен в каналах при произвольном малом отклонении их поверхности от цилиндрической. Приведена линейная система уравнений и граничных условий для возмущенных динамических и тепловых полей, полученная путем линеаризации полной системы уравнений Навье – Стокса около решения для развитых течений в цилиндрических трубах произвольного сечения. Для практически важного случая, когда возмущения поверхности каналов сосредоточены на участке конечной длины, показано, что интегральные динамические и тепловые характеристики каналов находятся без решения трехмерных уравнений путем перехода к эффективным двумерным краевым задачам, сложность решения которых с принципиальной точки зрения не выше, чем для развитых течений. Даны обобщения развитой теории на течения с силовыми источниками малой эффективности. Рассмотрены приложения к плоским каналам и круглым трубам с возмущенными поверхностями.

Из многочисленных приложений, где необходимы сведения об интегральных характеристиках течений в каналах при малом возмущении их первоначальной цилиндрической поверхности, укажем проблему интенсификации теплообмена путем слабой деформации поверхности труб при тщательной оценке сопутствующего увеличения их сопротивления [1]; расчет сопротивления капиллярных трубок и биологических транспортных систем в виде трубок и каналов при деформировании их стенок [2].

Ниже рассматриваются ламинарные течения в каналах с деформированными стенками. Если для первой проблемы такой класс течений является только одним из возможных (в общем случае требуется анализ эффектов перехода, турбулентности, отрыва потока), то во втором случае, характеризующемся малыми числами Рейнольдса, модель ламинарного течения полностью адекватна.

1. Постановка задачи. Пусть ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами динамической вязкости μ и теплопроводности λ происходит в канале, форма которого Σ определяется уравнениями

$$x=x,\ y=y(x,\varphi)=[r_{w0}(\varphi)+r_w'(x,\varphi)]\sin\varphi$$

$$z=z(x,\varphi)=[r_{w0}(\varphi)+r_w'(x,\varphi)]\cos\varphi$$

$$|r_w'(\varphi)|\ll r_{w0},\qquad \left|\frac{\partial r_w'}{\partial\varphi}\right|\ll r_{w0},\qquad \left|\frac{\partial r_w'}{\partial x}\right|\ll 1,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \tag{1.1}$$

Здесь x, y, z – декартова, а r, φ, x – цилиндрическая система координат. $r_{w0}(\varphi)$ – уравнение контура цилиндрической трубы, $r_w'(x,\varphi)$ – возмущение ее поверхности.

Развитые динамическое и тепловое поля в цилиндрическом канале описываются уравнениями

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0=(u_0(y,z),0,0),\quad \frac{\partial p_0}{\partial x}=\mathrm{const}$$

$$T=T_0=-kx+t_0(y,z),\ k=\mathrm{const} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \mu \Delta u_0, \qquad (u_0)_{\Gamma_0} = 0$$

$$\int\limits_{F_0} u_0\, dF = S_0 U, \qquad \Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \tag{1.3}$$

$$-ku_0 = \varkappa \Delta t_0, \qquad -\lambda \left(\frac{\partial t_0}{\partial n} \right)_{\Gamma_0} = q_{n0} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{v}$, T, p — скорость, температура и давление жидкости, $\varkappa = \lambda/\rho c$, ρ и c — коэффициент температуропроводности, плотность и удельная теплоемкость жидкости, F_0 и S_0 — поперечное сечение цилиндрической трубы и его площадь, U — заданная средняя скорость жидкости. Граничное условие в (1.4) соответствует заданию локального теплового потока на поверхности трубы.

Уравнение энергии записано в приближении относительно малой скорости среды. Постоянная k пропорциональна тепловому потоку к поверхности трубы в расчете на единицу ее длины.

Пусть условия течения таковы, что малый параметр, характеризующий относительную величину возмущений поверхности трубы и определяемый из (1.1), оказывается значительно меньше других малых параметров, например в случае больших чисел Рейнольдса Re значительно меньше параметра

$$\frac{\delta_0}{h} = \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{L}{h} \right)^{1/3} \ll 1, \qquad \mathrm{Re} = \frac{Uh}{\nu}, \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.5}$$

характеризующего толщину δ_0 пограничного слоя для возмущенного течения; h — характерный поперечный размер трубы, L — длина участка трубы с возмущенной поверхностью.

Проведем линеаризацию полной системы уравнений Навье — Стокса, описывающей течение в каналах (1.1), относительно решения для развитых динамического и теплового полей. Представляя $\mathbf{v}$, T и p в виде

$$\mathbf{v} = (u_0(y, z) + u'(x, y, z),\ v'(x, y, z),\ w'(x, y, z)) \tag{1.6}$$
$$p = p_0 + p'(x, y, z), \quad T = -kx + t_0(y, z) + t'(x, y, z)$$

где величины со штрихом являются малыми возмущениями, получим уравнения

$$u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u_0}{\partial y} + w' \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \Delta u' \right) \tag{1.7}$$

$$u_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \Delta v' \right)$$

$$u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \Delta w' \right) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{1.9}$$

$$u_0 \frac{\partial t'}{\partial x} - ku' + v' \frac{\partial t_0}{\partial y} + w' \frac{\partial t_0}{\partial z} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} + \Delta t' \right) \tag{1.10}$$

Из условий задания расхода жидкости US_0 в трубе с деформированной поверхностью Σ (см. формулы (1.1)) и прилипания на ней жидкости с точностью до малых второго порядка находим

$$\int\limits_{F_0} u'\, dF = 0, \qquad (u')_{\Sigma_0} = \alpha(x, \varphi), \qquad (v')_{\Sigma_0} = 0, \qquad (w')_{\Sigma_0} = 0 \tag{1.11}$$

$$\alpha(x,\varphi)=-\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)_{\Gamma_0} r_w' \sin\varphi-\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)_{\Gamma_0}\cos\varphi \tag{1.12}$$

Здесь Σ_0 — поверхность исходной цилиндрической трубы.

Для получения граничного условия относительно t' определим нормальную составляющую вектора плотности теплового потока q_n на Σ. С помощью (1.1) в линейном приближении находим выражение

$$(q_n)_\Sigma=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Sigma=q_{n0}+q_n' \tag{1.13}$$

$$q_{n0}=-\lambda\left(\frac{\partial t_0}{\partial n}\right)_{\Gamma_0}=-\frac{\lambda}{a(\varphi)}\left[\left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)_{\Gamma_0} b(\varphi)-\left(\frac{\partial t_0}{\partial y}\right)_{\Gamma_0} l(\varphi)\right] \tag{1.14}$$

$$q_n'=-\gamma' q_{n0}-\frac{\lambda}{a(\varphi)}kr_{w0}\left(\frac{\partial r_w'}{\partial x}\right)-A'(x,\varphi)-\lambda\left(\frac{\partial t'}{\partial n}\right)_{\Sigma_0} \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered}A'=\frac{\lambda}{a(\varphi)}\left\{r_w'\left[\left(\frac{\partial^2 t_0}{\partial z^2}\right)_{\Gamma_0} b(\varphi)\cos\varphi+\left(\frac{\partial^2 t_0}{\partial y\,\partial z}\right)_{\Gamma_0}\times\right.\right.\\ \left.\times\left(r_{w0}\sin 2\varphi-\frac{\partial r_{w0}}{\partial\varphi}\cos 2\varphi\right)-\left(\frac{\partial^2 t_0}{\partial y^2}\right)_{\Gamma_0} l(\varphi)\sin\varphi\right]+\\ \left.+\left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_w'\sin\varphi)-\left(\frac{\partial t_0}{\partial y}\right)_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_w'\cos\varphi)\right\}\end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial n}\right)_{\Sigma_0}=\frac{1}{a(\varphi)}\left[\left(\frac{\partial t'}{\partial z}\right)_{\Sigma_0} b(\varphi)-\left(\frac{\partial t'}{\partial y}\right)_{\Sigma_0} l(\varphi)\right] \tag{1.17}$$

$$\begin{gathered}a^2(\varphi)=r_{w0}^2+\left(\frac{\partial r_{w0}}{\partial\varphi}\right)^2,\qquad b(\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_{w0}\sin\varphi)\\ l(\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(r_{w0}\cos\varphi)\end{gathered} \tag{1.18}$$

$$\gamma'=a^{-2}(\varphi)\left(r_{w0}r_w'+\frac{\partial r_{w0}}{\partial\varphi}\frac{\partial r_w'}{\partial\varphi}\right) \tag{1.19}$$

В (1.14)—(1.19) точки на поверхностях Σ и Σ_0 имеют одинаковые x и φ. Индексы Γ_0 и Σ_0 указывают, что соответствующие производные берутся по совпадающим внешним нормалям к контуру Γ_0 и поверхности Σ_0.

Примем, что значения q_n в точках поверхностей Σ и Σ_0 с одинаковыми x и φ совпадают и равны величине $q_{n0}(\varphi)$. Тогда $q_n'=0$ и из (1.15) находим

$$-\lambda\left(\frac{\partial t'}{\partial n}\right)_{\Sigma_0}=\gamma' q_{n0}+\frac{\lambda}{a(\varphi)}kr_{w0}\frac{\partial r_w'}{\partial x}+A'(x,\varphi) \tag{1.20}$$

Динамическая задача (1.7)—(1.9), (1.11), (1.12) и тепловая задача (1.10), (1.20), дополненные соответствующими условиями при $x=\pm\infty$, решаются последовательно.

2. Развитые течения. Решение уравнений (1.3) имеет вид

$$\begin{gathered}u_0(P)=mS_0U\int\limits_{F_{0M}} G(P,M)\,dF_M\\ m^{-1}=\int\limits_{F_{0P}}\int\limits_{F_{0M}} G(P,M)\,dF_P\,dF_M;\qquad -\frac{\partial p_0}{\partial x}=\mu m S_0 U\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь P, M — точки в поперечном сечении F_0 цилиндрического канала с контуром Γ_0, индексы P, M указывают переменную, по которой производится интегрирование или дифференцирование, $G(P, M)$ — функция Грина, определяемая из уравнения

$$G(P,M)=-\frac{1}{2\pi}\ln(r_{PM})+V(P,M)$$
$$\Delta V=0, \qquad V(P,M)_{\Gamma_{0M}}=\frac{1}{2\pi}\ln(r_{PM}) \tag{2.2}$$

где r_{PM} — расстояние между точками P и M.

Тепловая задача (1.4) с помощью частного решения уравнения (1.4)

$$t_0^*=\frac{k}{\varkappa}\int\limits_{F_{0M}} G(P,M)u_0(M)\,dF_M, \qquad (t_0^*)_{\Gamma_0}=0$$

сводится к определению функции $\omega=t_0-t_0^*$, удовлетворяющей соотношениям

$$\Delta\omega=0$$
$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)_{\Gamma_c}=-\frac{q_{n0}(P)}{\lambda}-\frac{k}{\varkappa}\int\limits_{F_{0M}} u_0(M)\left(\frac{\partial G}{\partial n_P}\right)dF_M \quad P\in\Gamma_0 \tag{2.3}$$

Из условия равенства нулю интеграла от $\partial\omega/\partial n$ по контуру Γ_0 с использованием свойств функции Грина находим

$$k=\frac{q_0}{\rho cUF_0}, \qquad q_0=\int\limits_{\Gamma_0} q_{n0}\,dl \tag{2.4}$$

Здесь dl — элемент вдоль контура Γ_0.

Соотношение (2.4) может быть также получено путем интегрирования уравнения (1.4) по области F_0. Решение уравнения (2.3) проводится стандартными методами.

3. Интегральные характеристики. Пусть возмущение поверхности цилиндрической трубы сосредоточено на участке конечной длины L, так что можно ввести величину

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_w'(x,\varphi)\,dx=r_w^\circ(\varphi) \tag{3.1}$$

На некотором расстоянии Δx вниз по потоку от участка L течение опять становится стабилизированным в динамическом и тепловом отношении, так что асимптотически выполняются условия

$$x=\infty: \quad \mathrm{v}'=0, \quad \frac{\partial \mathrm{v}'}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p'}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial t'}{\partial x}=0, \quad p'=p_+'=\mathrm{const}, \quad t'=t_+'=\mathrm{const} \tag{3.2}$$

Вверх по потоку от участка L все возмущения асимптотически стремятся к нулю

$$x=-\infty: \quad \mathrm{v}'=0, \quad p'=0, \quad t'=0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x}=0 \tag{3.3}$$

Величина p_+' является дополнительным перепадом давления, обусловленным возмущением поверхности трубы.

Величина t_+' связана с дополнительным тепловым потоком через боковую поверхность трубы на участке L, обусловленным изменением ее площади.

При достаточно больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re}=Uh/\nu$, где h — характерный поперечный размер цилиндрической трубы, в зоне L на поверхности трубы развивается пограничный слой толщины δ для возмущенного течения (см. (1.5)). Если толщина δ становится порядка h на некоторой длине $L_1<L$, то участок Δx, на котором происходит переход к асимптотике

(3.2) вследствие «снятия» возмущений поверхности трубы оказывается порядка L_1. Если же величина δ в конце участка L оказывается меньше h, то в первом приближении $\Delta x \sim L$.

Покажем, что интегральные характеристики течения можно определить не решая трехмерной системы уравнений (1.7)–(1.10), путем перехода к более простым двумерным уравнениям.

Введем на основании (3.2), (3.3) следующие функции:

$$\mathbf{v}^\circ(y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}'(x,y,z)\,dx,\qquad \mathbf{v}^\circ=(u^\circ,v^\circ,w^\circ),\qquad \mathbf{v}'=(u',v',w')$$

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} t'(x,y,z)\,dx=t_+'x+t^\circ(y,z)$$

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} p'(x,y,z)\,dx=p_+'x+p^\circ(y,z) \tag{3.4}$$

Обратимся к уравнениям (1.8). Дифференцируя первое из них по z, а второе по y, составляя разность полученных выражений и интегрируя ее по x в пределах $(-\infty,\infty)$, с учетом (3.2)–(3.4) находим

$$\frac{\partial\Delta v^\circ}{\partial z}-\frac{\partial\Delta w^\circ}{\partial y}=0 \tag{3.5}$$

Интегрируя по x в тех же пределах уравнения (1.9) и последние два граничных условия (1.11), находим

$$\frac{\partial v^\circ}{\partial y}+\frac{\partial w^\circ}{\partial z}=0;\qquad \Gamma_0\colon\ v^\circ=0,\qquad w^\circ=0 \tag{3.6}$$

Вводя, согласно (3.6), функцию тока Ψ и подставляя ее в (3.5), получим для Ψ бигармоническое уравнение с равными нулю Ψ и $\partial\Psi/\partial n$ на Γ_0. Тождественно равное нулю решение этого уравнения является единственным [3] и поэтому

$$v^\circ=0,\ w^\circ=0 \tag{3.7}$$

Интегрируя по x в пределах $(-\infty,\infty)$ уравнение (1.7) с использованием (3.2)–(3.4) и (3.7) и аналогично интегрируя первые два соотношения (1.11), находим следующие двумерные уравнения для определения u° и величины p_+':

$$\mu\Delta u^\circ=p_+',\qquad (u^\circ)_{\Gamma_0}=\alpha^\circ(\varphi),\qquad \int\limits_{F_0}u^\circ\,dF=0$$

$$\alpha^\circ=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x,\varphi)\,dx=-\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)_{\Gamma_0}r_w{}^\circ(\varphi)\sin\varphi-\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)_{\Gamma_0}r_w{}^\circ\cos\varphi \tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.8) имеет вид

$$u^\circ(P)=-\frac{p_+'}{\mu}\int\limits_{F_{0M}}G(P,M)\,dF_M-\int\limits_{\Gamma_{0M}}\alpha^\circ(M)\frac{\partial G}{\partial n_M}\,dl_M \tag{3.9}$$

$$p_+'=-\mu m\int\limits_{F_{0M}}\int\limits_{\Gamma_{0M}}\alpha^\circ(M)\frac{\partial G}{\partial n_M}\,dF_P\,dl_M \tag{3.10}$$

С помощью (2.1) формула (3.10) преобразуется к виду

$$p_+'=-\frac{\mu}{S_0 U}\int_{\Gamma_{0M}}\alpha^\circ(M)\frac{\partial u_0}{\partial n_M}\,dl_M \tag{3.11}$$

Таким образом, дополнительный перепад давления p_+' равен интегралу по контуру от произведения «интегрального» возмущения поверхности $r_w^\circ(\varphi)$ на контурную функцию, определяемую геометрией невозмущенной поверхности.

Перейдем к тепловой задаче. Интегрируя (1.10) по x в пределах $(-\infty, x)$, где $x\to\infty$, и используя (3.2)–(3.4), находим

$$\varkappa\Delta t^\circ=-ku^\circ+t_+'u_0 \tag{3.12}$$

Входящие в (3.12) функции $u_0(y, z)$ и $u^\circ(y, z)$ определяются выражениями (2.1) и (3.9) соответственно.

Граничное условие для решения уравнения (3.12) находится с помощью интегрирования в пределах $(-\infty, x)$, где $x\to\infty$, соотношения (1.20) и на основании (3.1)–(3.4) представляется в виде

$$-\lambda\left(\frac{\partial t^\circ}{\partial n}\right)_{\Gamma_0}=\gamma^\circ q_{n0}+A^\circ(\varphi) \tag{3.13}$$

где A° и γ° определяются формулами (1.16) и (1.19) с заменой r_w' на r_w°.

Интегрируя (3.12) по площади F_0, учитывая соотношения (1.3) и (3.8) и граничное условие (3.13), находим

$$t_+'=-\frac{1}{\rho c U S_0}\int_{\Gamma_0}(\gamma^\circ q_{n0}+A^\circ)\,dl \tag{3.14}$$

Интегрирование уравнения (3.12) с граничным условием (3.13) производится так же, как в разд. 2. Важной интегральной характеристикой тепловых полей является осредненная по длине канала разность δT между среднемассовой температурой жидкости $T_m=T_m(x)$ и средней по периметру температурой стенки $T_{wl}=T_{wl}(x)$

$$\delta T=\frac{1}{X}\int_x[T_m(x)-T_{wl}(x)]\,dx \tag{3.15}$$

$$T_m(x)=\frac{1}{S_0 U}\int_F uT\,dF=-kx+t_{m0}+t_m' \tag{3.16}$$

$$T_{wl}(x)=\int_\Gamma T\,dl\Big/\int_\Gamma dl=-kx+t_{wl0}\left(1+\frac{1}{\Pi_0 t_{wl0}}\int_{\Gamma_0}(\gamma' t_0+\xi')\,dl-\frac{1}{\Pi_0}\int_{\Gamma_0}\gamma'\,dl\right)$$

$$t_{wl0}=\frac{1}{\Pi_0}\int_{\Gamma_0}t_0\,dl,\qquad \Pi_0=\int_{\Gamma_0}dl, \tag{3.17}$$

$$\xi'=\left(\frac{\partial t_0}{\partial y}\right)_{\Gamma_0}r_w'\sin\varphi+\left(\frac{\partial t_0}{\partial z}\right)_{\Gamma_0}r_w'\cos\varphi+(t')_{\Gamma_0} \tag{3.18}$$

Здесь X — длина рассматриваемого участка трубы, F, Γ и F_0, Γ_0 — деформированные и недеформированные поперечные сечения трубы и их контуры, Π_0 — периметр поперечного сечения цилиндрической трубы.

Формулы (3.16)–(3.18) записаны с точностью до членов второго порядка малости.

Будем считать, что участок длины X включает зону возмущений поверхности трубы L и зону асимптотического затухания возмущений Δx. Тогда, подставляя (3.16)–(3.18) в (3.15), производя интегрирование по x в пределах (x_1, x_1+X) и считая, что X — достаточно большая величина, чтобы выполнялись асимптотические представления (3.1), (3.2), (3.4), а x_1 — координата сечения, для которого выполняется асимптотика (3.3), с точностью до членов более высокого порядка малости находим

$$\delta T=(t_{m0}-t_{wl0})(1+N^\circ)$$

$$N^\circ=\frac{1}{(t_{m0}-t_{wl0})}\left[\frac{1}{US_0X}\int\limits_{F_0}(u^\circ t_0+t^\circ u_0)\,dF-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Pi_0X}\int\limits_{\Gamma_0}(t_{m0}-t_{wl0})\gamma^\circ\,dl-\frac{1}{\Pi_0X}\int\limits_{\Gamma_0}\xi^\circ\,dl\right] \tag{3.19}$$

Величина ξ° определяется формулой (3.18), в которой r_w' заменяется на r_w°, а $(t')_{\Gamma_0}$ — на $(t^\circ)_{\Gamma_0}$.

Определим суммарную силу R_x, действующую вдоль оси x на внутреннюю поверхность трубы на участке X. Применяя интегральную теорему импульсов к объему жидкости в деформированном канале между сечениями x_1 и x_1+X, в которых течение является полностью развитым, получим

$$R_x=\left[-\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)X-p_+'\right]S_0 \tag{3.20}$$

Аналогично применяя уравнение энергии в интегральной форме для того же объема жидкости, найдем следующее выражение для суммарного теплового потока:

$$Q=Q_0+Q',\ Q'=-\rho cUS_0t_+',\ Q_0=q_0X \tag{3.21}$$

где q_0 определяется формулой (2.4).

С другой стороны, величина Q при использованном граничном условии $q_n=q_{n0}$ на Σ с точностью до членов второго порядка малости определяется в виде

$$Q=\int\limits_{x_1}^{x_1+X}\int\limits_0^{2\pi}q_{n0}a(\varphi)(1+\gamma')\,d\varphi\,dx=Q_0+Q'$$
$$Q'=\int\limits_0^{2\pi}q_{n0}a(\varphi)\gamma^\circ\,d\varphi=\int\limits_{\Gamma_0}q_{n0}\gamma^\circ\,dl \tag{3.22}$$

Здесь $a(\varphi)$ вычисляется по (1.18). Сопоставляя (3.21), (3.22) и (3.14), находим, что интеграл от A° по контуру Γ_0 должен равняться нулю.

Введем коэффициент сопротивления канала C_d и интегральное число Стантона St следующим образом:

$$C_d=\frac{R_x/\Sigma}{1/2\rho U^2},\qquad \mathrm{St}=\frac{Q/\Sigma}{\rho cU(\delta T)} \tag{3.23}$$

где Σ — площадь боковой поверхности канала.

Используя формулы (3.20), (3.23), (3.19) и считая, что в начале и конце участка длины X вырабатываются асимптотические условия, находим

$$C_d=C_{d0}\left\{1-p_+'\left[-\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)X\right]^{-1}-\frac{1}{X\Pi_0}\int\limits_{\Gamma_0}\gamma^\circ\,dl\right\} \tag{3.24}$$

$$C_{d0}=-\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)\frac{S_0}{{}^1/_2\rho U^2\Pi_0},\qquad \mathrm{St}_0=\frac{(Q_0/\Pi_0X)}{\rho Uc(t_{m0}-t_{wl0})}$$

$$St=St_0\left\{1+\frac{Q'}{Q_0}-\frac{1}{X\Pi_0}\int\limits_{\Gamma_0}\gamma^\circ\,dl-N^\circ\right\}$$

Все величины, входящие в (3.24), определяются на основе сформулированных выше двумерных задач.

4. Обобщения теории. Развитый выше метод определения интегральных характеристик течения можно использовать для анализа возмущенного течения в цилиндрической трубе, возникающего вследствие действия объемных сил и наличия вдува и отсоса жидкости малой интенсивности.

Пусть на участке L цилиндрической трубы на поток действует объемная сила $\mathbf{f}'(x, y, z)$, либо имеющая только одну составляющую f_x', либо три составляющие, но при выполнении условия

$$\frac{\partial f_y^\circ}{\partial z} - \frac{\partial f_z^\circ}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{f}^\circ(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}'(x, y, z)\, dx \tag{4.1}$$

Считая, что имеются только силовые возмущения, и используя теорию разд. 3, найдем

$$v^\circ = 0, \quad w^\circ = 0, \quad \mu\Delta u^\circ = p_+' - f_x^\circ \tag{4.2}$$

$$(u^\circ)_{\Gamma_0} = 0, \quad \int_{F_0} u^\circ\, dF = 0$$

Решение (4.2) имеет вид

$$u^\circ(P) = \frac{m}{\mu}\left[m^{-1}\int_{F_{0M}} f_x^\circ dF_M - \int_{F_{0M}} G dF_M \int_{F_{0M}}\int_{F_{0P}} f_x^\circ G(P, M)\, dF_M' dF_P\right] \tag{4.3}$$

$$p_+' = m\int_{F_{0M}}\int_{F_{0P}} f_x^\circ(P)\, G(P, M)\, dF_M\, dF_P \tag{4.4}$$

Величина m определяется формулой (2.1). Сила сопротивления R_x дается выражением

$$\begin{aligned} R_x &= \left[-\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)X - p_+'\right]S_0 + \int_{F_0} f_x^\circ\, dF = \\ &= -\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)X + m\left[m^{-1}\int_{F_0} f_x^\circ\, dF - S_0 \int_{F_{0M}}\int_{F_{0P}} f_x^\circ G\, dF_M\, dF_P\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Если $f_x^\circ = \text{const}$, то $R_x' = 0$. При неоднородном поле $f_x^\circ(y, z)$ с помощью (4.5) можно целенаправленно изменять силу сопротивления канала.

Пусть на участке L цилиндрической трубы осуществляется вдув (отсос) жидкости по закону

$$\Gamma_0\colon\ u' = u_w'(x, \varphi), \quad v' = v_w'(x, \varphi), \quad w' = w_w'(x, \varphi) \tag{4.6}$$

$$\mathbf{v}_w^\circ = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_w'\, dx$$

Нормальная скорость вдува жидкости v_n' определяется формулой

$$\begin{gathered} -v_n' = \frac{1}{a(\varphi)}[-w_w' b(\varphi) + v_w' l(\varphi)] \\ -\int_{\Gamma_0} v_n' dl = g'(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\, dx = G' \end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь $g(x)$ и G – расход вдуваемой жидкости на единицу длины канала и ее полный расход.

Асимптотическое возмущенное течение при $x \to \infty$ обусловлено наличием дополнительного расхода G' и описывается уравнениями

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_+' = (u_+'(y, z), 0, 0)$$

$$\frac{\partial p_+'}{\partial x} = \text{const}, \quad \frac{\partial p_+'}{\partial x} = \mu\Delta u_+', \quad (u_+')_{\Gamma_0}=0, \quad \int\limits_{F_0} u_+' dF = G' \tag{4.8}$$

(Так как вдув жидкости отсутствует при $x\to\infty$, то для асимптотического течения выполняются обычные условия прилипания жидкости.)

Решение уравнений (4.8) дается формулами, аналогичными (2.1), (2.2).

Уравнения для поперечных «проинтегрированных» скоростей v° и w° и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial\Delta v^\circ}{\partial z} - \frac{\partial\Delta w^\circ}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial y} + \frac{\partial w^\circ}{\partial z} + u_+'(y, z) = 0 \tag{4.9}$$

$$\Gamma_0:\ v^\circ = v_w^\circ(\varphi), \quad w^\circ = w_w^\circ(\varphi) \tag{4.10}$$

Решение этой двумерной системы уравнений относительно v° и w° представляет собой сложную, но принципиально разрешимую двумерную задачу.

Проинтегрируем уравнение (1.7) по x в пределах $(-\infty, x)$, где $x\to\infty$. Учитывая (4.8), находим

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} u'(x, y, z)\,dx = u^\circ(y, z) + xu_+'(y, z)$$

$$K(y, z) = u_0 u_+' + v^\circ \frac{\partial u_0}{\partial y} + w^\circ \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} p_+' + \nu(\Delta u^\circ + x\Delta u_+') = \nu\Delta u^\circ + A \quad (A = \text{const}) \tag{4.11}$$

Граничные условия для решения (4.11) имеют вид

$$(u^\circ)_{\Gamma_0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_w' dx$$

$$\int\limits_F u^\circ\, dF = \lim_{x\to\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} g' dx\right)dx - xG'\right] = b = \text{const} \tag{4.12}$$

Из уравнений (4.11)–(4.12) определяется функция $u^\circ(y, z)$ и неизвестная постоянная A.

5. Приложения. Рассмотрим динамическое поле в канале, поверхность которого слабо отклоняется от поверхности цилиндрической трубы круглого сечения ($r_w = h + r_w'(x, \varphi)$, $h = \text{const}$). Используя (2.1), (3.9) и (3.10), находим

$$u_0 = \frac{2U}{h^2}(h^2 - r^2), \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = -\frac{8U\mu}{h^2} \tag{5.1}$$

$$p_+' = \frac{16U\mu}{\pi h^3}\int\limits_0^{2\pi} r_w^\circ d\varphi \tag{5.2}$$

Здесь $r_w^\circ(\varphi)$ выражается формулой (3.1). Таким образом, дополнительный перепад давления определяется непосредственным двукратным интегрированием по x и φ возмущения поверхности $r_w'(x, \varphi)$.

Заметим, что общими условиями постоянства площади боковой поверхности ($\Sigma' = 0$) и объема ($V' = 0$) деформируемой цилиндрической трубы являются (с точностью до членов второго порядка малости) соотношения

$$\Sigma' = \int\limits_{\Gamma_0} \gamma^\circ dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r_{w0}^2 + \left(\frac{\partial r_{w0}}{\partial\varphi}\right)^2}\, \gamma^\circ d\varphi = 0$$

$$V' = \int\limits_0^{2\pi} r_{w0} r_w^\circ d\varphi = 0 \tag{5.3}$$

Для круглой цилиндрической трубы имеем

$$\Sigma' = \int_0^{2\pi} r_w^\circ d\varphi, \quad V' = h \int_0^{2\pi} r_w^\circ d\varphi \tag{5.4}$$

Отсюда следует, что условие $\Sigma'=0$ (или $V'=0$) эквивалентно равенству нулю дополнительного перепада давления.

Пусть поверхность цилиндрической трубы круглого сечения испытывает деформации вида $r_w=h+r_w'(x)$, $r_w^\circ=\mathrm{const}$. Тогда выражения для возмущенных динамического и теплового полей на основе разд. 3 даются выражениями

$$p_+' = \frac{32\mu U r_w^\circ}{h^3}, \quad u^\circ(r) = -\frac{4Ur_w^\circ}{h^3}(h^2-2r^2) \tag{5.5}$$

$$t_0 = -\frac{q_{n0}}{\lambda h^3}\left(h^2r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{3}{4}h^4\right) + \mathrm{const} \tag{5.6}$$

$$q_0 = 2\pi h q_{n0}, \quad (q_{n0}=\mathrm{const})$$

$$t^\circ(r) = \frac{q_{n0} r_w^\circ}{\lambda h^4}\left(h^2r^2 - \frac{3}{4}r^4\right) + \mathrm{const}, \quad t_+' = -\frac{2r_w^\circ q_{n0}}{\rho c U h^2} \tag{5.7}$$

$$C_d = C_{d0}\left(1 - \frac{5r_w^\circ}{Xh}\right), \quad \mathrm{St} = \mathrm{St}_0\left(1 - \frac{17}{11}\frac{r_w^\circ}{Xh}\right) \tag{5.8}$$

$$C_{d0} = \frac{8}{\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{St}_0 = \frac{24}{11}\frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{Uh}{\nu}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\varkappa}$$

Таким образом, при интенсификации теплообмена (см. формулы (5.8), в которых $r_w^\circ<0$) происходит еще более значительное увеличение сопротивления канала. Это показывает, что в рамках рассматриваемой модели идея интенсификация теплообмена при малом росте гидравлического сопротивления канала несостоятельна.

Авторы выражают признательность за обсуждение работы А. Ю. Клименко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калинин Э. К., Дрейцер Г. А., Ярхо С. А.* Интенсификация теплообмена в каналах. М.: Машиностроение, 1981. 207 с.
2. *Регирер С. А.* Квазиодномерная теория перистальтических течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 89–97.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.III.1989