

БОГОЯВЛЕНСКИЙ А. Б.

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ
СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ГРАНИЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

Рассматриваются движения вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей сферический слой $R_1 \leq r \leq R_2$, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг собственной неподвижной оси. На границах слоя заданы тангенциальные напряжения

$$\tau_{r\varphi}(R_1, \theta) = \varepsilon_*(R_2/R_1)^3 P_1^1(\cos \theta), \quad \tau_{r\varphi}(R_2, \theta) = \varepsilon_* P_1^1(\cos \theta) \quad (1)$$

Здесь P_1^1 — функции Лежандра, θ и φ — меридиональный и азимутальный углы; $\tau_{r\varphi}$ — выбраны так, чтобы сохранялся момент количества движения слоя. Границы считаются непротекаемыми. Такая постановка задачи возникает при рассмотрении глобальных циркуляций в астро- и геофизических объектах, где исследуемый слой граничит не с твердыми поверхностями, а с другими слоями, имеющими существенно отличные характеристики. Действие последних на исследуемый слой заменяется приложением на границах тангенциальных напряжений. (Подробно подобные постановки задач рассмотрены, например, в [1–3].) Цель данной работы — исследовать влияние граничных условий на структуру глобально устойчивых течений в сферических слоях.

Представим искомое соленоидальное поле скоростей в виде $\mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{r}W) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}S)$ и применим операторы $\mathbf{r}\nabla \times$ и $\mathbf{r}\nabla \times \nabla \times$ к уравнению импульсов. Приняв за характерные масштабы длины и времени соответственно R_1 и R_1^2/ν (ν — кинематическая вязкость), получим систему двух уравнений относительно W и S в безразмерном виде во вращающейся сферической системе координат

$$\frac{\partial}{\partial t} L^2 \Delta S = L^2 \Delta^2 S + 2 \operatorname{Re} QW + \mathbf{r}\nabla \times \nabla \times [(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L^2 W = L^2 \Delta W - 2 \operatorname{Re} QS - \mathbf{r}\nabla \times [(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}]$$

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$Q = r \cos \theta \Delta - \left(L^2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Здесь $\operatorname{Re} = \Omega R_1^2/\nu$ — число Рейнольдса, Δ — оператор Лапласа.

На границах слоя в соответствии с (1) должны быть заданы следующие условия:

$$S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0, \quad r \frac{\partial W}{\partial r} = \varepsilon \kappa P_1(\cos \theta)$$

где $\kappa = a^3$ при $r=1$ и $\kappa=1$ при $r=a$, $a=R_2/R_1$, ε — безразмерное напряжение, P_1 — полином Лежандра.

Осесимметричные стационарные решения задачи получены методом Галеркина установлением по времени. Искомые функции раскладывались в ряды

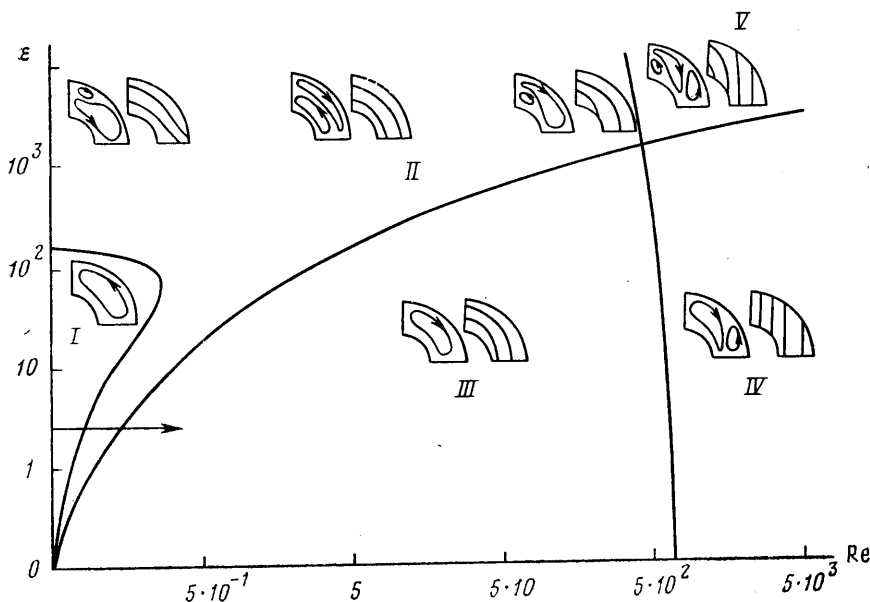
$$S = \sum_l \sum_k a_{kl}(t) S_l^k(r) P_{2l}(\cos \theta)$$

$$W = \sum_l \sum_k b_{kl}(t) W_l^k(r) P_{2l-1}(\cos \theta) + W^0(r, \theta)$$

где S_l^k , W_l^k — полные системы функций, являющихся решениями следующих задач на собственные значения:

$$D_{2l}(D_{2l} + \nu_l^k) S_l^k = 0, \quad (D_{2l-1} + \mu_l^k) W_l^k = 0$$

$$D_m = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{m(m+1)}{r^2}$$



Фиг. 1

$$r=1, a: S_l^k = S_l^{k'} = (W_l^k/r)' = 0$$

Здесь искомая функция W представлена в виде

$$W = W^* + W^0, \quad W^0 = \varepsilon \left[\frac{5(a^5 - a^3)}{6(a^5 - 1)} r - \frac{a^3}{3} r^{-2} \right] P_1(\cos \theta)$$

W^0 удовлетворяет неоднородным граничным условиям и уравнению Лапласа, а W^* удовлетворяет однородным граничным условиям.

Численные расчеты проведены для значений параметров $a=1,2$, $0 \leq \varepsilon \leq 5 \cdot 10^3$, $0 \leq \text{Re} \leq 5 \cdot 10^3$. Количество базисных функций при вычислениях варьировалось. Имея в виду дальнейшие исследования вторичных течений, максимальное количество функций по $r - K$ и по $\theta - L$ принималось соответственно $K=10$, $L=20$. Однако в указанной области параметров увеличение функций более чем $K=5$, $L=10$ приводит к уточнению характеристик течения менее чем на 2%, а качественное представление о характере поведения течений можно получить на меньшем количестве функций. Полученная процедурой Галеркина система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась методом Рунге - Кутты. Процесс установления контролировался по затуханию норм $\max_{l,k} |\dot{a}_{kl}/a_{kl}|$ и поведению некоторых интегральных

характеристик течения.

Были получены решения пяти различных типов, различающихся по характеру циркуляции в меридиональной плоскости. На фиг. 1 в плоскости параметров (Re, ε) показаны области, соответствующие различным решениям, там же схематично показаны картины линий тока и линий уровня угловых скоростей в меридиональной плоскости.

При $\text{Re}=0$ с ростом ε тип меридиональной циркуляции меняется от одновихревой против часовой стрелки (тип I) до циркуляции с двумя противоположно направленными вихрями (тип II). При фиксированном значении ε , например $\varepsilon=10^3$, с ростом Re от 0 до $4,6 \cdot 10^2$ вихрь, вращающийся по часовой стрелке (назовем его положительным), постепенно вытесняет вихрь с отрицательным направлением вращения к внутренней приполярной области. Интенсивность положительной циркуляции возрастает, а отрицательной убывает.

В интервале $4,6 \cdot 10^2 \leq \text{Re} \leq 4,9 \cdot 10^2$ имеет место только одновихревая положительная циркуляция (тип III). С дальнейшим ростом Re во внешней приэкваториальной области зарождается отрицательный вихрь. Реализуется течение, состоящее из большого тороидального вихря с положительной меридиональной циркуляцией и второго, гораздо менее интенсивного, занимающего приэкваториальную область вне цилиндрической поверхности радиуса $1 \leq r_c < a$. С ростом Re приэкваториальный вихрь увеличивается в размерах, не выходя, однако, за область, ограниченную цилиндром радиуса внутренней сферы ($r_c=1$), а его интенсивность слабо возрастает, оставаясь в несколько раз меньше интенсивности приполярного вихря (течение типа IV). При больших значениях Re указанные решения можно сопоставить с

известными асимптотическими и численными решениями (см. [4, 5]). В этом случае, согласно [4], движение вне цилиндра радиуса $r_c=1$ сводится к почти твердотельному вращению, вблизи цилиндра возникает сдвиговый слой, а внутри — торoidalная ячейка.

При меньших значениях ε картина функций тока с ростом Re меняется аналогично, однако значения Re , при которых меняется тип течения, различны при разных ε , и, как уже отмечалось, при не очень больших ε ($\varepsilon \approx 1,7 \cdot 10^2$) и достаточно малых Re возникает область с циркуляцией типа I. При достаточно больших значениях ε ($\varepsilon > 1,2 \cdot 10^3$) с ростом Re течение типа II сменяется не одним, а тремя вихрями разного направления (течения типа V). С дальнейшим ростом Re приполярный отрицательный вихрь исчезает, реализуется течение типа IV.

При малых значениях ε и Re можно сопоставить течение во вращающемся со скоростью $\Omega = \nu Re/R_1^2$ слое, имеющем напряжения (1) на границах, с течением между двумя вращающимися сферами (условия прилипания на границах). Для этого введем параметр $\omega = (\Omega + \Omega_2)/(\Omega + \Omega_1)$, где $\Omega_i = v_\varphi^\circ(R_i, \theta)/R_i \sin \theta$, а скорости v_φ° на границах $r=R_i$ определены по решению W° исходной задачи. Получим

$$\omega = \frac{Re + \varepsilon [{}^5_6 a^3 (a^2 - 1) / (a^5 - 1) - {}^1_3]}{Re - {}^1_3 \varepsilon a^3 [1 - {}^5_2 (a^2 - 1) / (a^5 - 1)]} \quad (3)$$

Характеристики течений при малых ε и Re и произвольных толщинах слоя (параметра a) можно получить аналитически. Для этого, следуя методу [6], будем решать задачу в неподвижной системе координат разложением искомых функций — углового момента $w = -r \sin \theta \partial W / \partial \theta$ и функции тока $\psi = -r \sin \theta \partial S / \partial \theta$ — в ряды по целым неотрицательным степеням параметра R

$$R = |Re - {}^1_3 \varepsilon a^3 [1 - {}^5_2 (a^2 - 1) / (a^5 - 1)]|$$

$$w = \sum_n R^{2n} w_{2n}(r, \theta), \quad \psi = \sum_n R^{2n+1} \psi_{2n+1}(r, \theta)$$

где параметр R соответствует числу Рейнольдса, определенному по угловой скорости вращения внутренней сферы для течения между двумя вращающимися сферами. Для первых ненулевых членов разложения получим

$$w_0 = (A_1 r^2 + A_2 r^{-1}) \sin^2 \theta$$

$$\psi_1 = (B_1 r^5 + B_2 r^3 + B_3 + B_4 r^{-2} + {}^1_4 A_1 A_2 r^2 + {}^1_4 A_2^2 r^{-1}) \sin \theta P_2^1$$

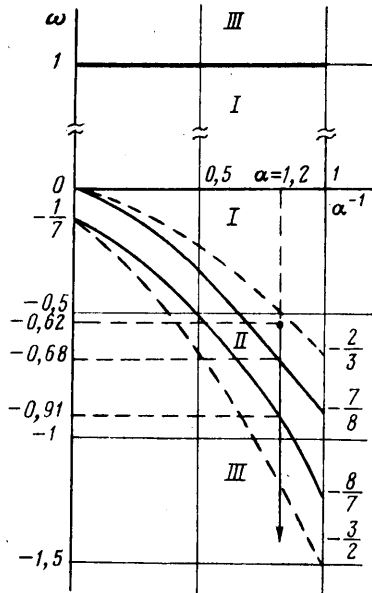
Здесь A_i, B_i — постоянные, определенные из граничных условий

$$w_0(1) = \sin^2 \theta, \quad w_0(a) = a^2 \omega \sin^2 \theta$$

$$\psi_1 = 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} = 0, \quad r=1, a$$

На фиг. 2 в плоскости параметров (a^{-1}, ω) сплошными линиями выделены области, соответствующие первым трем типам меридиональной циркуляции (пунктирной линией показаны результаты решения задачи с условиями прилипания на вращающихся границах, приведенные в [6]). Граница раздела областей находится из условия смены знака функции ψ_1 , т. е. $\partial \psi_1 / \partial r = 0$ при $r=1, a$, и определяется единственным параметром ω , зависящим от a . Каждому фиксированному значению параметра a соответствуют два значения ω : ω_1 , характеризующее переход от области I к II, и ω_2 , соответствующее переходу от II к III.

Положив $a=1,2$, что соответствует значению, принятому в численных расчетах, получим $\omega_1 \approx -0,686$, $\omega_2 \approx -0,906$. При фиксированном значении ε с ростом Re от 0 до Re_c , где $Re_c = {}^1_3 \varepsilon a^3 [1 - {}^5_2 (a^2 - 1) / (a^5 - 1)]$, согласно (3), величина ω уменьшается. На фиг. 2 это соответствует вертикальному перемещению от точки ω_0 (при $a=1,2$ $\omega_0 \approx -0,615$) вниз от области I через область II к области III (на фиг. 2 вертикальная стрелка). На фиг. 1 указанному изменению параметров соответствует горизонтальное перемещение (горизонтальная стрелка). Поведение кривых на фиг. 1 при $\varepsilon, Re \rightarrow 0$ легко проанализировать на основе формулы (3), приравняв правую часть значениям ω_1 и ω_2 и разрешив относительно ε ($\varepsilon = \varepsilon(Re)$).



Фиг. 2

Таким образом, если слой покоится ($Re=0$), условие сохранения момента количества движения приводит к такому соотношению напряжений (1), когда на структуру течения основное влияние оказывает внутренняя граница, в меридиональной плоскости реализуется одновихревое движение отрицательного направления. Это соответствует более быстрому вращению внутренней границы в соответствующей задаче с условиями прилипания. С началом вращения всего слоя в сторону действия $\tau_{r\varphi}(R_2)$ влияние внутренней границы уменьшается (суммарная угловая скорость внутренней границы уменьшается), а внешней увеличивается. В некотором интервале значений Re влияние границ выравнивается, возникает двухвихревая циркуляция. С дальнейшим ростом Re на структуру течения большее влияние оказывает внешняя граница (один положительный вихрь). При больших Re ($\sim 5 \cdot 10^2$) возникает сдвиговой цилиндрический слой, вне которого имеется почти твердотельное вращение, а внутри – циркуляция, обусловленная влиянием внешней границы.

Сопоставление значений величин ω_1 и ω_2 , полученных из численных расчетов, со значениями, полученными аналитически, свидетельствует о хорошем совпадении (расхождение менее 2%) при $\varepsilon < 80$. При достаточно больших значениях напряжений ε сопоставления становятся неверными, появляются течения, обусловленные одновременным влиянием обеих границ, и даже при малых Re возникает двухвихревая циркуляция типа II.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press. 1961. 652 p.
2. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
3. Келлер Б. С., Яворская И. М. Моделирование гидродинамических процессов в атмосферах больших планет // Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 256–259.
4. Stewartson K. On almost rigid rotations. Pt 2. // J. Fluid Mech. 1966. V. 26. Pt 1. P. 131–144.
5. Беляев Ю. Н., Яворская И. М. Течения вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях и их устойчивость // Итоги науки и техники ВИНТИ. Механика жидкости и газа. 1980. Т. 15. С. 3–80.
6. Яворская И. М. Влияние широтного градиента температуры на сферическое течение Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 2. С. 15–23.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1987

УДК 532.526

© 1990 г.

АЛЬТШУЛЬ А. Д., СЕРЕБРО В. В.

О ТАК НАЗЫВАЕМЫХ КОНСТАНТАХ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ШЕРОХОВАТЫХ ТРУБАХ

Проведенная непосредственная обработка опытов Никурадзе по течению в шероховатых трубах показала, что величина второй константы турбулентности в квадратичной области сопротивления зависит от относительной шероховатости трубы. Установлено, что универсальная логарифмическая формула для профиля скорости в трубе в квадратичной области сопротивления является аппроксимацией полученной авторами более точной зависимости, учитывающей влияние относительной шероховатости трубы. Предложенное соотношение для коэффициента гидравлического трения в случае значительной шероховатости превосходит по точности известную формулу Прандтля – Никурадзе.

1. Известно [1, 2], что в трубах с однородной песочной шероховатостью типа Никурадзе в режиме автомодельности по числу Рейнольдса профиль скорости и закон сопротивления удается представить в замкнутом виде с привлечением двух эмпирических постоянных – констант Кармана κ и $\beta = u_k/u_\tau$ (u_k – скорость потока на уровне вершин выступов высотой k , u_τ – динамическая скорость на стенке)

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k} \beta \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\beta - \frac{1,5}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R}{k} \right) \quad (1.2)$$