МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1990

УДК 532.5.013.4

МАКОВ Ю. Н.

АНАЛОГИЯ ЭФФЕКТОВ СТРАТИФИКАЦИИ И СЖИМАЕМОСТИ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В дополнение к известным аналогиям в гидродинамике (например, плазменно-гидродинамической [1] или аналогии эффектов стратификации и вращения [2]) предпринята попытка выявить и развить еще одну гидродинамическую аналогию в теории устойчивости стратифицированных несжимаемых и однородных сжимаемых сдвиговых течений. Неявным указанием на ее существование явилось краткое замечание в [3] о сопоставимости некоторых асимптотик для характеристик устойчивости сдвиговых течений несжимаемой [3] и сжимаемой [4] жидкостей с тангенс-гиперболическим профилем скорости при определенной трансформации числа Ричардсона в число Маха. Более подробного сопоставления этих двух течений до сих пор не производилось, хотя представляет большой интерес выяснение всей полноты этой аналогии и нахождение связи между всеми величинами, описывающими эти течения, с целью взаимного перенесения характерных результатов и решений. Именно эту цель преследует данная работа.

Рассмотрим для стратифицированного плоского сдвигового потока с профилями плотности $\rho(z)$ и скорости $U(z)$ уравнение, описывающее в приближении Буссинеска малые отклонения $\eta=F(z)\exp[ik(x-ct)]$ линий постоянной плотности (изопикн) от их среднего положения [5]

$$[(U-c)^2F']'-[k^2(U-c)^2-J]F=0 \tag{1}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по поперечной (по отношению к направлению скорости) координате z. В уравнении (1) все величины считаются безразмерными, поэтому в последнем слагаемом вместо квадрата частоты Брента — Вяйсяля N^2 стоит безразмерное число Ричардсона $J=N^2(U_0/d)^{-2}$, куда входит характерный масштаб сдвиговой скорости U_0 и характерный поперечный размер сдвигового слоя d.

Уравнение (1) для $F(z)$ получается из хорошо известного уравнения Тейлора — Гольдштейна для «амплитуды» вертикальной составляющей возмущения скорости $W(z)$ заменой

$$W(z)=F(z)(U(z)-c)$$

и оно используется, например, при выводе теоремы Ховарда о полукруге [5].

Параллельно рассмотрим уравнение для возмущения давления $p(x, z, t)=P(z)\exp[ik(x-ct)]$ в двумерном сдвиговом течении сжимаемой жидкости с профилем скорости $V(z)$ при отсутствии внешних силовых полей [6]

$$[(V-c)^{-2}P']'-[k^2(V-c)^{-2}-k^2\mathrm{M}^2]P=0 \tag{2}$$

В уравнении (2) также все величины обезразмерены, чем обусловлено наличие в нем числа Маха $\mathrm{M}=V_0/a$, являющегося отношением характерной величины сдвиговой скорости V_0 к скорости звука a в сжимаемой жидкости.

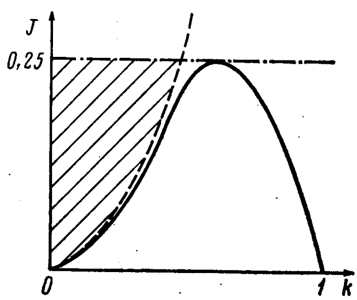
Сравнение уравнений (1) и (2) показывает их структурное тождество при условии следующего соответствия величин, входящих в эти уравнения и характеризующих стратифицированную несжимаемую жидкость (левые части соответствий) и однородную сжимаемую жидкость (правые части соответствий)

$$F\equiv W/(U-c)\to P,\quad U-c\to(V-c)^{-1},\quad J\to k^2\mathrm{M}^2,\quad k\to k \tag{3}$$

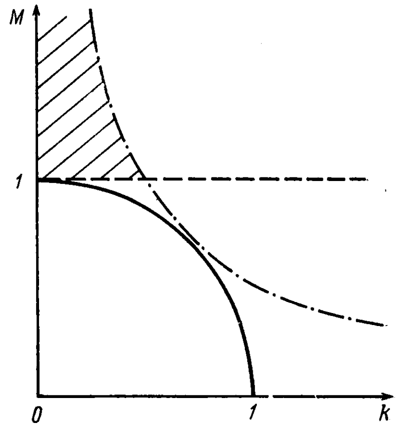
Посмотрим, как работает данная аналогия при анализе конкретных моделей сдвиговых течений. Будем исходить из известного решения [7] для нейтрально-устойчивой моды и кривой нейтральной устойчивости (фиг. 1, сплошная линия) модели Дразина сдвигового течения $U=U_0\,\mathrm{th}\,z$ стратифицированной жидкости $\rho=\rho_0\exp(-bz)$

$$W=U^{1-k^2}(1-U^2)^{k^2/2}=(\mathrm{th}\,z)^{1-k^2}(\mathrm{sech}\,z)^{k^2},\quad c=0 \tag{4}$$

$$J=k^2(1-k^2) \tag{5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Пользуясь полученными сопоставлениями (3), найдем (без аналитических расчетов) решение для нейтрально-устойчивой моды и кривой нейтральной устойчивости в сдвиговом течении (с тем же профилем скорости) сжимаемой однородной жидкости. Поскольку задача для сжимаемой жидкости также решена аналитически [6], то это будет тестовой проверкой полученной аналогии между стратификацией и сжимаемостью.

Итак, запишем решение для нейтрально-устойчивой моды возмущения давления и уравнение кривой нейтральной устойчивости (фиг. 2, сплошная линия) для сдвигового течения $V=\operatorname{th} z$ сжимаемой жидкости (при $c=0$), используя решения для стратифицированной жидкости (4), (5) и указанную аналогию (3). Имеем

$$W/U=U^{-k^2}(1-U^2)^{k^2/2}\leftrightarrow P=V^{k^2}(1-V^{-2})^{k^2/2}=$$

$$=(\operatorname{th} z)^{k^2}(1-\operatorname{th}^{-2} z)^{k^2/2}=(i\operatorname{sech} z)^{k^2} \tag{6}$$

$$J=k^2(1-k^2)\leftrightarrow k^2\mathrm{M}^2=k^2(1-k^2)$$

Из последнего соотношения получаем

$$\mathrm{M}^2+k^2=1 \tag{7}$$

Проведенная на основе аналогии трансформация решений (4), (5) одной модели в решения (6), (7) для другой модели приводит к тому же результату, который получается из аналитического решения уравнения (2) для сжимаемой жидкости (см. [6]).

Отметим также дополнительные соответствия для решений в рассмотренных двух моделях. Согласно общепринятой теории ранее считалось, что области неустойчивости на плоскости соответствующих параметров лежат внутри найденных кривых нейтральной устойчивости (5) и (7), а области вне этих кривых соответствуют значениям параметров устойчивости. Однако последующий численный анализ исходных уравнений (1), (2) показал [3, 4], что имеются дополнительные области неустойчивости, которым соответствуют неустойчивые моды другого характера (так называемые излучательные неустойчивые моды). В [8] аналитически исследовались излучательные моды (моды типа B) для модели Дразина. Были найдены уравнения границ дополнительных областей неустойчивости, отвечающих модам типа B, а также показано, что все дополнительные области неустойчивости лежат выше кривой, описываемой (при малых k) параболой $J=k^2$ (фиг. 1, штриховая линия). Согласно проводимой аналогии (3), такие же дополнительные области для сжимаемого сдвигового течения должны иметься за границей, уравнение которой определяется из следующего соответствия:

$$J/k^2=1\leftrightarrow\mathrm{M}^2=1$$

а сама граница изображена на фиг. 2 штриховой линией.

Действительно, как показывают численные результаты [4], при $\mathrm{M}>1$ [1] существуют дополнительные области неустойчивости (фиг. 2), отвечающие сверхзвуковым модам в сжимаемой жидкости. Таким образом, излучательным неустойчивым мо-

[1] В действительности это неравенство описывает приближенно разделительную границу, поскольку оно получено из приближенного неравенства $J>k^2$ для аналогичной границы в модели Дразина.

дам типа B в стратифицированной жидкости соответствуют сверхзвуковые неустойчивые моды в сжимаемой жидкости, причем имеется соответствие в расположении областей, отвечающих этим модам, на плоскостях характерных параметров (фиг. 1, 2).

Используя полученные в [8] аналитические уравнения для границ неустойчивых областей типа B на плоскости (J, k) и производя в них замену J на $k^2\mathrm{M}^2$ согласно (3), можно получить соответствующие уравнения для границ зон неустойчивости сверхзвуковых мод на плоскости (M, k) в случае сжимаемых течений.

После демонстрации выявленной аналогии на примере известных решений используем ее для получения новых результатов, относящихся к критериям устойчивости сдвиговых течений сжимаемой жидкости. Напомним, что подобные критерии получают на основе интегральных соотношений, вытекающих из исходных дифференциальных уравнений или их модификаций (см., например, [5]). Однако интегральные соотношения для сжимаемых течений, получаемые из дифференциального уравнения (2) и его модификаций, являются «неудобными» для получения требуемых критериев. Поэтому таких критериев известно значительно меньше для сжимаемых сдвиговых течений, чем в случае стратифицированных сдвиговых течений. Рассматриваемое сопоставление позволяет найти до сих пор неизвестные для сжимаемых течений аналоги имеющимся критериям устойчивости для стратифицированных течений.

Хорошо известно [5], что если всюду в стратифицированном сдвиговом течении выполняется условие $J>{}^1/_4$, то это течение устойчиво (теорема Майлса – Ховарда). Другими словами, на плоскости параметров (J, k) все возможные зоны неустойчивости лежат под прямой $J={}^1/_4$ (фиг. 1, штрихпунктирная линия). Исходя из соответствия (3), подобный критерий устойчивости можно записать для сжимаемых сдвиговых течений в виде неравенства $\mathrm{M}^2k^2>{}^1/_4$, т. е.

$$\mathrm{M}>{}^1/_2k^{-1} \tag{8}$$

и все зоны неустойчивости для сжимаемых сдвиговых течений должны лежать под гиперболой $\mathrm{M}={}^1/_2k^{-1}$ (фиг. 2, штрихпунктирная линия). Отметим, что полученная численно в [4] граница области сверхзвуковых неустойчивых мод (при $\mathrm{M}>1$) хорошо аппроксимируется этой гиперболой.

Таким образом, условие (8) представляет собой новое достаточное условие устойчивости сдвиговых течений сжимаемой жидкости, являющееся аналогом известного критерия Майлса – Ховарда для стратифицированных течений. Подчеркнем, что получить этот критерий удалось из рассматриваемой аналогии. Сделать это непосредственно из анализа уравнения (2) и его следствий представляется затруднительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Реутов В. П.* Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн // Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 12. С. 1266–1275.
2. *Владимиров В. А.* Аналогия эффектов стратификации и вращения // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 270–312.
3. *Drazin P. G., Zaturska M. B., Banks W. H. H.* On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid. Pt 2. Unbounded flow with propagation at infinity // J. Fluid Mech. 1979. V. 95. № 4. P. 681–705.
4. *Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1975. V. 71. № 2. P. 305–316.
5. *Howard L. N.* Note on a paper of John W. Miles // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. № 4. P. 509–512.
6. *Blumen W.* Shear layer instability of an invescid compressible fluid // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. № 4. P. 769–781.
7. *Drazin P. G.* The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 2. P. 214–224.
8. *Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.* Излучательная неустойчивость стратифицированных сдвиговых течений в модели Дразина // ПММ. 1987. Т. 51. № 5. С. 791–797.

Москва

Поступила в редакцию
5.I.1989