МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1990

УДК 533.7+624.131

ГОЛЬДШТЕЙН А. И., ПОТУРАЕВ В. Н., ШУЛЯК И. А.

О СТРУКТУРЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ СРЕДЫ ИЗ НЕУПРУГИХ ШЕРОХОВАТЫХ ШАРОВ

Для описания целого ряда технологических процессов в качестве модели динамики сыпучей среды используют уравнения гидродинамики газа, состоящего из одинаковых не вполне упругих (шероховатых) сферических частиц. Так, в [1, 2] уравнения гидродинамики такого газа были использованы для моделирования кипящего слоя, в [3, 4] – виброкипящего слоя, в [5, 6] – для описания взаимодействия диспергированной фазы с преградой. Хороший обзор работ, применяющих модель среды из неупругих шаров для моделирования быстрых сдвиговых течений гранулированной среды, приведен в [7].

Несмотря на применение как феноменологического, так и статистического подходов вопрос о структуре уравнений гидродинамики газа из неупругих шаров остается открытым. Одной из причин такого положения является недостаточная исследованность структуры «нормальных» решений соответствующих кинетических уравнений для системы неупругих шаров. Во всех работах, использующих методы кинетической теории газов, столкновения шаров считались слабо неупругими, функция распределения частиц по скоростям для пространственно однородного состояния газа предполагалась максвелловой или близкой к максвелловой [4].

Предположение о слабой неупругости (и шероховатости [7]) соударений существенно сужает область практических приложений модели газа из неупругих шероховатых шаров.

В настоящей работе определена структура уравнений гидродинамики среды, состоящей из одинаковых неупругих шероховатых шаров, соответствующих решению кинетического уравнения типа Энскога методом Чепмена – Энскога во всем диапазоне изменения параметров, характеризующих неупругость и шероховатость частиц, для которого решение существует. Построены уравнения, необходимые для вычисления коэффициентов, входящих в уравнения гидродинамики. Показано, что уравнения Эйлера для газа неупругих шаров содержат источниковые члены, которые также необходимо учитывать в условиях на ударной волне.

1. Кинетическое уравнение и законы сохранения. Рассмотрим систему одинаковых твердых неупругих шероховатых шаров диаметром σ и массой m (момент инерции $I=0{,}1m\sigma^2$). Обозначим через $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ – поступательные и угловые скорости первой и второй частицы до столкновения; $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, $\boldsymbol{\omega}_1'$, $\boldsymbol{\omega}_2'$ – соответствующие скорости частиц после столкновения; $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный от центра второй частицы к центру первой в момент удара; $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}'$ – относительные скорости точек контакта шаров до и после столкновения. Скорость $\mathbf{V}$ очевидным образом выражается через скорости шаров

$$\mathbf{V}=\mathbf{v}_{21}-[\sigma\mathbf{k}\times(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)/2], \quad \mathbf{v}_{21}\equiv\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1 \tag{1.1}$$

Примем простейшую [8] гипотезу изменения относительной скорости шаров после столкновения

$$\mathbf{V}'\cdot\mathbf{k}=-R(\mathbf{V}\cdot\mathbf{k}),\ \mathbf{V}'-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}')=r[\mathbf{V}-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})] \tag{1.2}$$

где R, r – коэффициенты неупругости и шероховатости частиц ($0<R\leqslant1$, $-1\leqslant r\leqslant1$). Соотношения (1.1), (1.2) совместно с законом сохранения импульса $\mathbf{J}$, передаваемого при столкновении первой частице со стороны вто-

рой, и момента импульса

$$\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1'=\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2=\frac{\mathbf{J}}{m},\qquad \boldsymbol{\omega}_1'-\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_2'-\boldsymbol{\omega}_2=\frac{\sigma}{2I}(\mathbf{k}\times\mathbf{J}) \tag{1.3}$$

полностью определяют акт столкновения двух шаров. Описанная модель использовалась в [9] в качестве кинетической модели быстрого течения гранулированной среды.

Выведем кинетическое уравнение для рассматриваемой системы. Это можно сделать, используя предположения, принятые в теории плотного газа [10], и понятия прямого и обратного столкновения. В этих терминах формулы (1.1)—(1.3) описывают прямое столкновение $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2\to\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, $\boldsymbol{\omega}_1'$, $\boldsymbol{\omega}_2'$. Учитывая определение обратного столкновения

$$(\mathbf{v}_1'')'\equiv\mathbf{v}_1,\quad (\mathbf{v}_2'')'\equiv\mathbf{v}_2,\quad (\boldsymbol{\omega}_1'')'\to\boldsymbol{\omega}_1,\quad (\boldsymbol{\omega}_2'')'\equiv\boldsymbol{\omega}_2 \tag{1.4}$$

и упомянутые выше формулы, можно описать обратное столкновение

$$\mathbf{v}_1'',\ \mathbf{v}_2'',\ \boldsymbol{\omega}_1'',\ \boldsymbol{\omega}_2''\to\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{\omega}_2$$

В итоге приходим к следующему кинетическому уравнению типа Энскога:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)}{\partial t}=-v_{1i}\frac{\partial f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)}{\partial x_i}+J(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,f)$$

$$J(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)\equiv\sigma^2\int d^3v_2\,d^3\omega_2\,d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21}) \tag{1.5}$$

$$\left[\frac{1}{R^2r^2}g\left(\mathbf{x}+\frac{\sigma}{2}\mathbf{k}\right)f_1''(\mathbf{x})f_2''(\mathbf{x}+\sigma\mathbf{k})-g\left(\mathbf{x}-\frac{\sigma}{2}\mathbf{k}\right)f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}-\sigma\mathbf{k})\right]$$

где учтено, что

$$\frac{\partial(\mathbf{v}_1'',\mathbf{v}_2'',\boldsymbol{\omega}_1'',\boldsymbol{\omega}_2'')}{\partial(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)}=-\frac{1}{Rr^2}$$

При этом $f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)$ представляет собой одночастичную функцию распределения, Θ — функция Хевисайда, g — частотный множитель Энскога. При записи столкновительного члена $J(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,f)$ использована краткая форма обозначений $f_1''(\mathbf{x})\equiv f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)$ и т. д.

Для вывода уравнений сохранения для системы неупругих шероховатых сфер воспользуемся методом выделения дивергентных членов, предложенным в [11] (в [4] этим методом были получены уравнения сохранения для частного случая $r=1$). С этой целью, используя (1.1)—(1.5), запишем тождество, справедливое для произвольной функции $\varphi(\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3v_1\,d^3\omega_1\,\varphi(\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1)f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\int d^3v_1\,d^3\omega_1\varphi(\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1)\times$$

$$\times f(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1,t)-\frac{\sigma^3}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\int d\mu\,d^2k\int_0^1 d\lambda\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})k_i(\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2)\times$$

$$\times g\left(\mathbf{x}-\sigma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\mathbf{k}\right)f_1(\mathbf{x}+\sigma(1-\lambda)\mathbf{k})f_2(\mathbf{x}-\sigma\lambda\mathbf{k})+I(f,\varphi) \tag{1.6}$$

$$d\mu\equiv d^3v_1d^3\omega_1d^3v_2d^3\omega_2,\quad \Delta\varphi_l\equiv\varphi(\mathbf{v}_l,\boldsymbol{\omega}_l)-\varphi(\mathbf{v}_l',\boldsymbol{\omega}_l'),\quad l=1,2$$

$$I(f,\varphi)\equiv\frac{\sigma^2}{2}\int d\mu\,d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})(\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2)g\left(\mathbf{x}+\frac{\sigma}{2}\mathbf{k}\right)f_1(\mathbf{x}+\sigma\mathbf{k})f_2(\mathbf{x})$$

Последний член в соотношении (1.6) учитывает изменение $\varphi(\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\omega}_1)$ при соударениях. В силу того что количество частиц и их суммарный импульс сохраняются (см. (1.3)), а энергия соударяющихся частиц изменяется на величину ΔE

$$\Delta E = -m\left[\frac{1-R^2}{4}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})^2 + \frac{1-r^2}{14}|\mathbf{V}-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})|^2\right]$$

при соответствующем выборе функции φ из тождества (1.6) получаем уравнения сохранения числа частиц, импульса и энергии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{u_i}{n}\frac{\partial(nu_j)}{\partial x_i} - \frac{1}{n}\frac{\partial t_{ij}(\mathbf{x},f)}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e_0 + \frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{mu_j}{n}\frac{\partial t_{ij}(\mathbf{x},f)}{\partial x_i} + \frac{1}{n}\left[\left(e_0 - \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\right)\frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial q_i(\mathbf{x},f)}{\partial x_i} + I(\mathbf{x},f)\right] \tag{1.7}$$

$$n = \int d\eta\, f_1(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{n}\int d\eta\, \mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{x}), \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{n}\int d\eta\, \boldsymbol{\omega}_1 f_1(\mathbf{x})$$

$$e_0 = \frac{m}{n}\int d\eta\left[\frac{|\mathbf{v}_1-\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{|\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}|^2}{2}\frac{I}{m}\right]f_1(\mathbf{x}), \qquad d\eta = d^3v_1\, d^3\omega_1 \tag{1.8}$$

Здесь n, u_i, ω_i, e_0 — средние плотность, линейная и угловая скорость, энергия частиц. Плотности потоков энергии $q_i(\mathbf{x}, f)$ и импульса $t_{ij}(\mathbf{x}, f)$, источник энергии $I(\mathbf{x}, f)$ определяются следующими формулами:

$$q_i(\mathbf{x},f) = \int d\eta\, v_{1i}\left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2m}\right)f_1(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^3}{4}\int d\mu\, d^2k\int_0^1 d\lambda\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})\times$$

$$\times k_i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})\left\{\frac{1+a-R}{2}\left[(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{k})^2 - (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k})^2\right] - \frac{a\sigma^2}{8}\left[(\boldsymbol{\omega}_2\cdot\mathbf{k})^2 - (\boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{k})^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{2}\left[v_2^2 - v_1^2 + \frac{\sigma^2}{4}(\omega_2^2 - \omega_1^2) - \sigma\varepsilon_{jlm}k_j(\omega_{2l}v_{2m} + \omega_{1l}v_{1m})\right]\right\}g(\mathbf{x}-\sigma(\lambda-0{,}5)\mathbf{k})\times$$

$$\times f_1(\mathbf{x}+\sigma(1-\lambda)\mathbf{k})f_2(\mathbf{x}-\sigma\lambda\mathbf{k}) \tag{1.9}$$

$$t_{ij}(\mathbf{x},f) = \int d\eta\, v_{1i}v_{1j}f_1(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^3}{4}\int d\mu\, d^2k\int_0^1 d\lambda\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})k_i[(1+R-a)\times$$

$$\times(\mathbf{v}_{21}\cdot\mathbf{k})k_j + av_{21j} - \sigma a\varepsilon_{ilm}k_l(\omega_{1m}+\omega_{2m})/2]g(\mathbf{x}-\sigma(\lambda-0{,}5)\mathbf{k})f_1(\mathbf{x}+\sigma(1-\lambda)\mathbf{k})\times$$

$$\times f_2(\mathbf{x}-\sigma\lambda\mathbf{k})$$

$$I(\mathbf{x},f) = \frac{\sigma^2}{2}\int d\mu\, d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{21})\Delta E g\left(\mathbf{x}+\frac{\sigma}{2}\mathbf{k}\right)f_1(\mathbf{x}+\sigma\mathbf{k})f_2(\mathbf{x})$$

где ε_{ijk} — тензор Леви — Чевита, $a \equiv {}^2/_7(1-r)r^{-1}$. Эти формулы используются ниже при выводе уравнений гидродинамики для рассматриваемой системы.

2. Гидродинамика системы неупругих шероховатых шаров. Уравнение (1.5) описывает кинетический этап эволюции системы неупругих шаров, на котором ее состояние определяется функцией распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \boldsymbol{\omega}_1, t)$. Предположим, что по прошествии некоторого характерного времени τ_0 наступает гидродинамический этап эволюции рассматриваемой системы, когда ее состояние полностью описывается величинами $n(\mathbf{x}, t)$, $u_i(\mathbf{x}, t)$, $e_0(\mathbf{x}, t)$ и является слабо неоднородным. Последнее означает, что для градиентов гидродинамических величин справедлива оценка вида

$$\partial^n e_0(\mathbf{x}, t)/\partial x_{l_1}\ldots\partial x_{l_n} \sim \mu^n, \quad \mu \ll 1 \tag{2.1}$$

где μ — пропорционально L^{-1}, L — характерный размер неоднородностей в системе.

В соответствии с основной идеей метода Чепмена — Энскога [10] предположим, что на гидродинамическом этапе эволюции одночастичная функция распределения системы имеет структуру

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1, t) \underset{t\geq\tau_0}{=} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1, \zeta_\alpha(t)) \tag{2.2}$$

где $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1, \zeta_\alpha(t))$ — функционал от гидродинамических величин $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv \{\zeta_0(\mathbf{x}, t), \zeta_j(\mathbf{x}, t), \zeta_4(\mathbf{x}, t)\} \equiv \{n(\mathbf{x}, t), u_j(\mathbf{x}, t), e_0(\mathbf{x}, t)\}$ и может быть представлена в виде ряда по степеням μ

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1, t) = f_1^{(0)} + f_1^{(1)} + O(\mu^2), \; f_1^{(n)} \sim \mu^n \tag{2.3}$$

Функции $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ будем считать не зависящими от $\mu(\zeta_\alpha \sim 1)$.

Прежде чем переходить к решению кинетического уравнения (1.5), уточним структуру функции $f_1^{(0)}$. В силу того, что $f_1^{(0)}$ является решением пространственно однородного уравнения Энскога, она не зависит явным образом от $\mathbf{x}\,(f_1^{(0)} = f^{(0)}(\mathbf{v}_1, \omega_1, \zeta_\alpha))$.

Попутно отметим, что для состояний системы, близких к пространственно однородному, средняя скорость вращения частиц близка к скорости вращения газа как жесткого целого

$$\omega_i = 0{,}5\varepsilon_{ijk}\partial u_k/\partial x_j + O(\mu^2) \tag{2.4}$$

Последнее соотношение может быть получено строго, если учесть закон сохранения момента количества движения частиц и ограничиться классом задач, в которых характерное время релаксации ω меньше τ_0 (для абсолютно шероховатых сфер это сделано в [12]).

Если предположить изотропность $f_1^{(0)}$ в пространстве скоростей, то структура ее зависимости от ζ_α может быть определена на основании теории размерностей.

$$\begin{gathered} f^{(0)}(\mathbf{v}_1, \omega_1, \zeta_\alpha) = \frac{n(mI)^{3/2}}{e_0^3} F_1, \qquad F_1 \equiv F(|\mathbf{V}_1|^2, |\boldsymbol{\Omega}_1|^2) \\ \mathbf{V}_1 \equiv (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u})\sqrt{m/e_0}, \quad \boldsymbol{\Omega}_1 \equiv (\omega_1 - \omega)\sqrt{I/e_0} \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{V}_1$ и $\boldsymbol{\Omega}_1$ — безразмерные линейная и угловая скорости частиц. При таком выборе независимых переменных условия нормировки для функций $f_1^{(1)}$, F_1 следуют из обычного для метода Чепмена — Энскога предположения о неразложимости ζ_α в ряд по μ и соотношений (1.8), (2.5)

$$\begin{gathered} \int d^3V_1\, d^3\Omega_1\, F_1 = \frac{1}{2}\int d^3V_1\, d^3\Omega_1 (|\mathbf{V}_1|^2 + |\boldsymbol{\Omega}_1|^2) F_1 = 1 \\ \int d^3v_1\, d^3\omega_1\, \psi(\mathbf{v}_1, \omega_1) f_1^{(1)} = 0 \\ \psi(\mathbf{v}_1, \omega_1) \equiv \{1, \mathbf{v}_1, \omega_1, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2/2 + |\omega_1 - \omega|^2 I/(2m)\} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Зависимость правой части (2.5) от ω можно исключить после разложения F_1 в ряд по малому параметру ω (см. (2.4)) и добавления члена первого порядка малости к $f_1^{(1)}$, второго порядка малости к $f_1^{(2)}$ и т. д. Но соотношение (2.5) позволяет несколько упростить условия нормировки и структуры решения $f_1^{(1)}$. Учитывая это соображение, проще использовать соотношение (2.5) непосредственно.

Переходя к решению системы уравнений (1.5), (1.7), (1.8), (2.2) заметим, что если для функций ζ_α справедливы оценки типа (2.1), то такие же оценки справедливы и для градиентов $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1, t)$. Обратное утверждение, очевидно, следует из (1.8), прямое же верно в силу лежащего в основе метода сокращенного описания требования полноты набора параметров ζ_α. Малостью градиентов $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1, \zeta_\alpha)$ можно воспользоваться для разложения по μ функционалов $J(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \boldsymbol{\omega}_1, f)$, $t_{ij}(\mathbf{x}, f)$, $q_i(\mathbf{x}, f)$, определяемых формулами (1.5), (1.9). После этого в формулах для потоков и источника энергии становится возможным выполнить интегрирование по $\mathbf{k}$, λ.

В силу того что уравнения сохранения зависят от градиентов потоков импульса и энергии (в отличие от источника энергии), определение структуры функции распределения с точностью до членов порядка μ^n позволяет определить структуру уравнения сохранения импульса и энергии вплоть до членов порядка μ^{n+1} и μ^n соответственно. Поэтому для замыкания уравнения гидродинамики выражения для t_{ij}, I необходимо вычислять с точностью до членов порядка μ^n, а для q_i – порядка μ^{n-1}. В настоящей работе (см. (2.3)) $n=1$.

В нулевом приближении по μ потоки импульса и энергии, источник энергии зависят только от $f_1^{(0)}$:

$$\begin{gathered}t_{ij}^{(0)}=\rho u_iu_j+P\delta_{ij}, \qquad P=(ne_0+\Delta P)C(F),\\ \Delta P=b\sigma^2n^2g(n)e_0, \qquad q_i^{(0)}=u_i(P+\rho|\mathbf{u}|^2/2+ne_0)\\ I^{(0)}=N(F)\sigma^2n^2mg(n)(e_0/m)^{3/2}, \quad \rho\equiv mn\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь δ_{ij} – единичный тензор, $b\equiv\pi(1+R)/3$, а операторы $C(F)$, $N(F)$ определены следующим образом:

$$\begin{gathered}K(g,h)\equiv-\frac{1}{2}\int d\mu_1\, g(\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\Omega}_1)h(\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\Omega}_2)\Delta E_1, \qquad d\mu_1\equiv d\mu\frac{e_0^3}{(mI)^{3/2}}\\ \Delta E_1\equiv\left(\frac{m}{e_0}\right)^{3/2}\int d^2\mathbf{k}\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})\Delta E, \qquad \mathbf{V}_{21}\equiv\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1\\ C(F)\equiv\frac{1}{3}\int d^3\mathbf{V}_1\,d^3\boldsymbol{\Omega}_1|\mathbf{V}_1|^2F_1, \qquad N(F)\equiv K(F,F)\end{gathered} \tag{2.8}$$

Из формул (2.7), (2.8) видно, что шероховатость и неупругость частиц не влияют на структуру выражений для $t_{ij}^{(0)}$, $q_i^{(0)}$. Структура зависимости величины P, которую следует трактовать как давление в рассматриваемой системе шаров, от основных гидродинамических величин также неизменна. Уравнение состояния определено в соотношениях (2.7) с точностью до коэффициента пропорциональности $C(F)$, область изменения которого может быть найдена после сравнения первого из соотношений (2.8) со вторым из условий нормировки для F_1 (2.6)

$$1/3\leqslant C(F)\leqslant 2/3$$

Источник имеет ту же структуру, что и для системы слабо неупругих гладких сфер (см., например, [4]).

Вклад $f_1^{(0)}$ в выражение для источника энергии и потока импульса имеет вид

$$I^{(1)}(f^{(0)})=-N_1(F)\Delta P\frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \qquad N_1(F)=\frac{1}{R}\left\{\left(\frac{1-R^2}{10}+\frac{1-r^2}{105}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int d\mu_1\left(V_{1s}^2+\frac{V_{1s}V_{2s}}{3}\right)F_2\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}+\frac{20}{63}(1-r^2)\int d\mu_1\,V_{1s}\Omega_{1s}\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}\right\}$$

$$t_{ij}^{(1)}(f^{(0)})=\sigma^4n^2g(n)\sqrt{e_0m}\left\{M_1(F)\left[\frac{4(1+R)+3a}{240}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1+R}{36}\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]+M_2(F)a\varepsilon_{ijk}\omega_k\right\} \tag{2.9}$$

$$M_1(F)=\pi\int d\mu_1(V_{1s}-\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2)|\mathbf{V}_{21}|F_2\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}, \qquad M_2(F)=\frac{\pi}{12}\int d\mu_1|\mathbf{V}_{21}|F_1F_2$$

В последних соотношениях индексом s обозначены квадраты модулей соответствующих векторов: $V_{1s}=|\mathbf{V}_1|^2$ и т. д. Из формул (2.9) видно, что источник пропорционален работе кинетической составляющей давления (как и для гладких сфер [4]), а поток импульса содержит антисимметричный тензор, пропорциональный $\varepsilon_{ijk}\omega_k$ (как и для абсолютно шероховатых упругих сфер [12]). Структура выражений (2.9) не зависит от величины r, R (за исключением частных случаев $r=1$ или $R=1$).

С учетом (2.7), (2.9) уравнения сохранения (1.7) в первом приближении по градиентам приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\frac{\partial (nu_i)}{\partial x_i},\ \frac{\partial u_j}{\partial t}=-u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial e_0}{\partial t}=-u_i\frac{\partial e_0}{\partial x_i}-\frac{P}{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{m}{n}\left[I^{(0)}(f^{(0)})+I^{(1)}(f^{(0)})+I^{(1)}(f^{(1)})\right] \tag{2.10}$$

$$I^{(1)}(f^{(1)})=\frac{\pi\sigma^2 ng(n)e_0{}^3}{2(mI)^{1/2}}\int d\mu_1(F_1f_2^{(1)}+F_2f_1^{(1)})\Delta E_1 \tag{2.11}$$

где через $I^{(1)}(f^{(1)})$ обозначен вклад порядка μ в источник от функции $f^{(1)}$.

Для определения структуры уравнений Эйлера газа неупругих шероховатых сфер необходимо определить структуру $I^{(1)}(f^{(1)})$. Для этого в свою очередь необходимо определить вид решения кинетического уравнения в первом приближении по градиентам. После разложения уравнения (1.5) в ряд по малому параметру μ, учитывая соотношения (2.2), (2.3), (2.7)–(2.11), получаем уравнения для F

$$L(F)N(F)=0{,}5J(F,\ F) \tag{2.12}$$

где операторы $J(f, g)$, $L(F)$ определены следующим образом:

$$J(f,g)\equiv\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})\left(\frac{f_1''g_2''+f_2''g_1''}{R^2r^2}-f_1g_2-f_2g_1\right)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21}) \tag{2.13}$$

$$L(F)\equiv V_{1s}\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}+\Omega_{1s}\frac{\partial F_1}{\partial \Omega_{1s}}+3F_1$$

а $f^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{n(mI)^{1/2}}{e_0{}^3}\left\{\frac{\partial n}{\partial x_i}\sqrt{\frac{e_0}{m}}\frac{V_{1i}}{n}\left(F_1+2\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}\right)+\frac{\partial \Delta P}{\partial x_i}\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{m}{e_0}}\times\right.$$

$$\times\left[2C(F)V_{1i}\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}-\frac{A_i(F)}{2}\right]+\frac{\partial e_0}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{e_0m}}\left[\left(2C(F)\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}-L(F)\right)V_{1i}+\right.$$

$$+\frac{\Delta P}{ne_0}\left(\frac{7}{2}A_i(F)+B_i(F)\right)\Bigg]-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Bigg[2V_{1i}V_{1j}\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}+F_1\delta_{ij}+\left(\frac{N_1(F)\Delta P}{ne_0}-\right. \tag{2.14}$$

$$\left.-\frac{P}{ne_0}\right)L(F)\delta_{ij}-\frac{\Delta P}{ne_0}C_{ij}(F)=\sigma^2 ng(n)\sqrt{\frac{e_0}{m}}J(F,f^{(1)})-$$

$$-(e_0)^{-4}(mI)^{1/2}I^{(1)}(f^{(1)})L(F)-\partial f^{(1)}/\partial t$$

Операторы $A_i(F)$, $B_i(F)$, $C_{ij}(F)$ появляются в левой части последнего уравнения вследствие нелокальности интеграла столкновений

$$A_i(F)\equiv b^{-1}\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})k_i\left(\frac{F_1''F_2''}{R^2r^2}+F_1F_2\right) \tag{2.15}$$

$$B_i(F)\equiv b^{-1}\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})k_i\left[\frac{F_1''}{R^2r^2}\left(V_{2s}''\frac{\partial F_2''}{\partial V_{2s}''}+\Omega_{2s}''\frac{\partial F_2''}{\partial \Omega_{2s}''}\right)+\right.$$

$$+F_1\left(V_{2s}\frac{\partial F_2}{\partial V_{2s}}+\Omega_{2s}\frac{\partial F_2}{\partial \Omega_{2s}}\right)\Big]$$

$$C_{ij}(F)=b^{-1}\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,d^2k\,\Theta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_{21})k_i\left(\frac{V_{2j}''F_1''}{R^2r^2}\frac{\partial F_2''}{\partial V_{2s}''}+V_{2j}F_1\frac{\partial F_2}{\partial V_{2s}}\right)$$

Таким образом, гипотеза (2.5) позволяет перейти от решения пространственно однородной задачи для уравнения (1.5) к решению уравнения (2.12) (оператор $N(F)$ определен в (2.8), операторы $L(F)$, $J(F,F)$ определены соотношениями (2.13)), удовлетворяющему условиям нормировки в первой строке (2.6).

Переходя к анализу уравнения (2.14), необходимо отметить, что шероховатость частиц влияет на структуру его зависимости от гидродинамических величин неявно (Ω_1 зависит от ζ_α). Неупругость соударений частиц приводит к появлению в левой части этого уравнения членов, пропорциональных градиентам n и ΔP, а в правой — двух последних операторов. Один из них пропорционален источнику $I^{(1)}(f^{(1)})$, а вклад второго в уравнение (2.14) обусловлен наличием источника $I^{(0)}$ в уравнении сохранения энергии. Действительно, предполагая функцию $f_1^{(1)}$ линейной по градиентам гидродинамических величин u_i, n, e_0, ΔP (по аналогии с левой частью уравнения (2.14))

$$f_1^{(1)}=A_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+B_i\frac{\partial n}{\partial x_i}+C_i\frac{\partial \Delta P}{\partial x_i}+D_i\frac{\partial e_0}{\partial x_i} \tag{2.16}$$

и учитывая уравнения Эйлера в форме (2.10), последний оператор в правой части уравнения (2.14) можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial t}=\frac{m}{n}I^{(0)}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_0}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial B_i}{\partial e_0}\frac{\partial n}{\partial x_i}+\frac{\partial C_i}{\partial e_0}\frac{\partial \Delta P}{\partial x_i}\right)+D_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m}{n}I^{(0)}\right) \tag{2.17}$$

Из этой формулы и определения источника $I^{(0)}$ (2.7) видно, что $\partial f^{(1)}/\partial t$ также является линейной комбинацией градиентов u_i, n, e_0, ΔP. Учитывая это обстоятельство, линейность операторов $I^{(1)}(f^{(1)})$, $J(F,f^{(1)})$ и вид левой части уравнения (2.14) его решение следует искать в виде (2.16). Принимая во внимание изотропию операторов, стоящих в правой части (2.14), в пространстве скоростей $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{\Omega}_1$ и ортогональность $f_1^{(1)}$ всем функциям $\psi(\mathbf{V}_1,\mathbf{\Omega}_1)$ (см. (2.6)), можно определить структуру множителей перед градиентами гидродинамических величин

$$A_{ij}=-S\sqrt{\frac{m}{e_0}}\left[V_{1i}V_{1j}G_1-\frac{\delta_{ij}}{3}V_{1s}G_4+\frac{\Delta P}{ne_0}\left(V_{1i}V_{1j}G_2-\frac{\delta_{ij}}{3}V_{1s}G_3\right)\right]$$

$$D_i=-\frac{V_{1i}S}{e_0}\left(H_1+\frac{\Delta P}{ne_0}H_2\right),\qquad B_i=-\frac{V_{1i}S}{n}\left(H_3+\frac{\Delta P}{ne_0}H_5\right) \tag{2.18}$$

$$C_i=-\frac{V_{1i}S}{ne_0}\left(H_4+\frac{ne_0}{\Delta P}H_6\right),\qquad S=\frac{(mI)^{1/2}}{\sigma^2e_0{}^3g(n)}$$

где $G_i\equiv G_i(V_{1s},\Omega_{1s})$, $H_j\equiv H_j(V_{1s},\Omega_{1s})$ ($i=1,\dots,4$; $j=1,\dots,6$) — некоторые функции, удовлетворяющие следующим условиям нормировки:

$$\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,V_{1s}G_{14}=\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,V_{1s}G_{23}=0$$

$$\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,V_{1s}(V_{1s}+\Omega_{1s})G_{14}=\int d^3V_1\,d^3\Omega_1\,V_{1s}(V_{1s}+\Omega_{1s})G_{23}=0 \tag{2.19}$$

$$\int d^3V_1\, d^3\Omega_1\, V_{1s} H_j = 0, \qquad G_{14} \equiv G_1 - G_4, \qquad G_{23} \equiv G_2 - G_3$$

Для абсолютно гладких сфер $G_{14}=0$.

Уравнения для определения G_i, H_j могут быть получены после подстановки (2.16) с учетом (2.17)–(2.19) в уравнение (2.14). В частности, интегродифференциальные уравнения для функций G_{14}, G_{23}, G_1, G_2 являются независимыми

$$\begin{gathered}
2V_{1s}\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}} + 3F_1 - C(F)L(F) = -N(F)\left(V_{1s}\frac{\partial G_{14}}{\partial V_{1s}} + \frac{9}{2}G_{14}\right) - \\
-\frac{1}{3}K(F, G_{14})L(F) + J(F, V_{1s}G_{14}) \\
L(F)\left[N_1(F) - C(F)\right] - C_{ij}(F)\delta_{ij} = -N(F)\left(V_{1s}\frac{\partial G_{23}}{\partial V_{1s}} + \frac{9}{2}G_{23}\right) - \\
-\frac{1}{3}K(F, G_{23})L(F) + J(F, V_{1s}G_{23}) \\
2\frac{\partial F_1}{\partial V_{1s}}a_{ij}(\mathbf{V}_1) = -N(F)a_{ij}(\mathbf{V}_1)\left(V_{1s}\frac{\partial G_1}{\partial V_{1s}} + \frac{9}{2}G_1\right) + J(F, a_{ij}(\mathbf{V}_1)G_1) \\
\delta_{ij}\left[\delta_{lk}\frac{C_{lk}(F)}{3}\right] - C_{ij}(F) = -N(F)a_{ij}(\mathbf{V}_1)\left(V_{1s}\frac{\partial G_2}{\partial V_{2s}} + \frac{9}{2}G_2\right) + \\
+J(F, a_{ij}(\mathbf{V}_1)G_2), \quad a_{ij}(\mathbf{V}_1) \equiv \frac{1}{3}V_{1i}V_{1j} - \delta_{ij}V_{1s}
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Соотношения (2.16), (2.18), (2.19) позволяют определить структуру вклада $f_1^{(1)}$ в выражения для потоков импульса и энергии источника энергии. Несложный анализ показывает, что вклад в t_{ij}, I вносят только члены, пропорциональные градиенту макроскопической скорости, поэтому

$$\begin{gathered}
t_{ij}^{(1)}(f^{(1)}) = -\left\{1 + \frac{\Delta P}{ne_0}\left[\frac{2}{5} + \frac{3a}{5(1+R)}\right]\right\}\frac{\sqrt{e_0/m}}{\sigma^2 g(n)}\left\{\left[M_3(G_1) + \right.\right. \\
\left. + \frac{\Delta P}{ne_0}M_4(G_2)\right]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) - \\
-\left[M_5(G_{14}) + \frac{\Delta P}{ne_0}M_6(G_{23})\right]\frac{\sqrt{m/e_0}\,P}{C(F)\sigma^2 n}\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \\
I^{(1)}(f^{(1)}) = \frac{1}{3}\left[K(F, V_{1s}G_{14})ne_0 + K(F, V_{1s}G_{23})\Delta P\right]\frac{\partial u_l}{\partial x_l}
\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered}
M(g) \equiv \int d^3V_1\, d^3\Omega_1\, V_{1s}g(\mathbf{V}_1, \mathbf{\Omega}_1); \qquad M_3(G_1) = \frac{1}{15}M(G_1) \\
M_4(G_2) = \frac{1}{15}M(G_2), \qquad M_5(G_{14}) = \frac{1}{9}M(G_{14}), \qquad M_6(G_{23}) = \frac{1}{9}M(G_{23})
\end{gathered} \tag{2.22}$$

Из формул (2.21) и (2.9) видно, что учет $f_1^{(1)}$ дополняет структуру выражений для потока импульса и источника энергии слагаемыми, пропорциональными работе потенциальной составляющей давления. Впервые слагаемое этого вида в выражении для t_{ij} было учтено в [10] (объемная вязкость в разреженном газе абсолютно шероховатых упругих сфер). Структура источника первого порядка по градиентам в цитированных выше работах по кинетике системы неупругих шероховатых шаров не исследовалась.

Остальные члены в формуле (2.17) вносят вклад только в выражения для потока тепла. Как уже говорилось ранее, определение структуры $q_i^{(1)}$ недостаточно для замыкания уравнения сохранения энергии. Поэтому ограничимся формулировкой общего результата, следующего из (2.17): неупругость соударений частиц приводит к появлению дополнительных потоков тепла, пропорциональных градиентам n и ΔP.

3. Обсуждение результатов. Полученные во втором параграфе выражения для источника и давления совместно с уравнениями (2.10) позволяют определить структуру уравнений Эйлера для среды из неупругих шероховатых шаров. Для всех значений параметров $r\in[-1;\ 1)$ и $R\in(0;\ 1)$, а также $R=1$ и $r\in(-1;\ 1)$ уравнение сохранения энергии исследуемого газа содержит источник I вида

$$I=c_1ne_0\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+c_2\Delta P\frac{\partial u_i}{\partial_i x}+c_3\sigma^2n^2g(n)\left(\frac{e_0}{m}\right)^{3/2} \tag{3.1}$$

где в соответствии с (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.21), (2.22)

$$c_1={}^1/_3K(F,\ V_{1s}G_{14}),\quad c_2={}^1/_3K(F,\ V_{1s}G_{23})-N_1(F),\quad c_3=N(F) \tag{3.2}$$

В случае $r=1$, $0<R<1$ отсутствует первый член и уравнения Эйлера имеют ту же структуру, что и полученные в [4] уравнения Эйлера газа слабо неупругих гладких шаров.

Последний член в соотношении (3.1) учитывает потери энергии хаотического движения в покоящемся газе, а первый и второй характеризуют потери энергии при сжатии газа. Оба этих члена необходимо учитывать не только в уравнении сохранения энергии, но и в соответствующем ему условии на ударной волне, которое для исследуемого газа имеет вид

$$[n(D-u_n)\ (e_0+P/n+{}^1/_2(D-u_n)^2]=0{,}5\{c_1ne_0+c_2\Delta P\}\ [u_n] \tag{3.3}$$

Здесь D – скорость ударной волны, u_n – проекция скорости газа на нормаль фронта ударной волны, $[f]\equiv f_{+0}-f_{-0}$, $\{f\}\equiv f_{+0}+f_{-0}$, f_{+0}, f_{-0} – значения гидродинамической величины справа и слева от разрыва (волна распространяется слева направо). Из формул (3.2), (3.3) видно, что при переходе через поверхность ударной волны в газе происходят потери энергии (исключение составляют случаи $R=1$ и $r=\pm1$).

Уравнения Эйлера являются простейшей гидродинамической моделью сыпучей среды. При необходимости учета вязкости можно рассмотреть более сложную модель, которая получается при замене величины P во втором уравнении системы (2.11) на $P+\overset{(1)}{t_{ij}}(f^{(0)})+\overset{(1)}{t_{ij}}(f^{(1)})$. Структура двух последних слагаемых аналогична структуре итогового выражения для потока импульса (первый порядок по градиентам) в газе абсолютно шероховатых упругих шаров (см. [12]). Уравнения гидродинамики среды из неупругих шероховатых шаров определены с точностью до коэффициентов переноса, которые зависят только от параметров R и r. Вид этих функциональных зависимостей может быть определен после решения интегродифференциальных уравнений (2.12), (2.20) с условиями (2.6), (2.19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштик М. А., Козлов Б. Н.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем // ПМТФ. 1973. № 4. С. 67–77.
2. *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. *Раскин Х. И.* Применение методов физической кинетики к задачам вибрационного воздействия на сыпучие среды // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 54–57.
4. *Потураев В. Н., Соколовский А. И., Шуляк И. А., Гольдштейн А. И.* Кинетика системы неупругих шаров // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 4. С. 56–59.
5. *Матвеев С. К.* Модель газа из твердых частиц с учетом неупругих соударений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 12–16.
6. *Матвеев С. К.* Динамика газа не полностью упругих частиц // Динамика неоднородных и сжимаемых сред. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.

7. *Ширко И. В., Семенов А. В.* Быстрые течения гранулированных материалов // Механика неоднородных систем. Новосибирск, 1985. С. 147—177.
8. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
9. *Ширко И. В., Семенов А. В.* Быстрое течение гранулированной среды из неупругих, шероховатых, сферических частиц // Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1984. С. 100—104.
10. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
11. *Пелетминский С. В., Соколовский А. И.* Операторы потоков физических величин и метод квазисредних // Теорет. и мат. физика. 1974. Т. 18. № 1. С. 121—129.
12. *McCoy B. J., Sandler S. I., Dahler J. S.* Transport properties of poluatomic fluids. IV. The kinetic theory of dense gas of perfectly rough spheres // J. Chem. Phys. 1966. V. 45. № 10. P. 3485—3512.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 15.XI.1988