

УДК 533.6.011.8

© 1990 г.

КРАСНОБАЕВ К. В., ТАРЕВ В. Ю.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ДИССИПАТИВНОМ ГАЗЕ С ИЗБЫТКОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Влияние обмена энергией между поступательными и колебательными степенями свободы в молекулярном газе на распространение звуковых и ударных волн рассматривалось в [1–6]. В [1, 2] в линейном приближении получено условие усиления звуковых волн, а в [3–5] учитывались нелинейные эффекты и выведен критерий опрокидывания одномерных плоских волн сжатия. В [6] численно исследовалась эволюция слабой ударной волны для случаев стационарного поддержания неравновесности, а также после «выключения» источника неравновесности. Показано, что при избытке колебательной энергии по сравнению с равновесным значением происходит усиление ударной волны. При этом усиление более значительно, когда неравновесное состояние перед волной стационарно.

Таким образом, одним из важных результатов исследований является возможность усиления волн давления за счет передачи неравновесной колебательной энергии распространяющемуся возмущению. Однако в отмеченных теоретических работах не затрагивался вопрос о нелинейной эволюции цилиндрических и сферических волн и о влиянии диссипативных процессов (вязкости, теплопроводности, лучистой теплопроводности) на характер волновых движений газа. Ниже с помощью метода двухмасштабных разложений результаты работ [3–5] обобщаются на случай цилиндрических и сферических волн, для одномерных плоских нелинейных волн малой амплитуды выводится уравнение для скорости газа с учетом диссипативных процессов. Найден ряд точных частных решений этого уравнения. Поскольку оценка точности решений, полученных с помощью приближенных методов, в задачах рассматриваемого типа ранее не проводилась, то путем сравнения с численными расчетами выявляются границы применимости использовавшегося аналитического метода.

**1. Применение метода двухмасштабных разложений к задаче о распространении одномерных нелинейных волн.** Рассмотрим распространение одномерной волны малой конечной амплитуды по однородному покоящемуся газу, в котором к моменту времени  $t=0$  за счет внешнего источника накачки запасена колебательная энергия. Будем считать, что выполнено условие применимости используемой ниже модели колебательной релаксации [7, 8]  $T_v/T \leq 5 \div 10$ , где  $T$  и  $T_v$  — соответственно поступательная и колебательная температуры газа.

В отсутствие волны  $T_v$  будет зависеть от времени из-за продолжающегося при  $t > 0$  действия внешнего источника накачки и вследствие процесса колебательной релаксации. Одновременно при  $T_v > T$  будет расти  $T$ . Таким образом, если при  $T=0$  возникает возмущение, то оно будет распространяться в среде с изменяющимися со временем  $T$  и  $T_v$ . При этом очевидно, что усиление или затухание волн зависят от того, что будет происходить в фазе сжатия — дополнительный приток энергии или ее отток.

Система уравнений газовой динамики, описывающая неустановившиеся движения вязкого теплопроводного газа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \rho V = 0, \quad \rho \frac{dV}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \pi \quad (1.1) \\ \rho \frac{dE}{dt} + p \frac{\partial}{\partial r} V = \pi \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\kappa_T + \kappa_R) \frac{\partial T}{\partial r} + \rho j(t) \end{aligned}$$

$$p = \rho \frac{R_0}{\mu_a} T$$

Здесь  $\rho$ ,  $V$ ,  $p$ ,  $E$  — соответственно плотность, скорость, давление, внутренняя энергия единицы массы газа;  $\pi$  — тензор вязких напряжений;  $\kappa_T$ ,  $\kappa_R$  — коэффициенты теплопроводности и лучистой теплопроводности;  $j(t)$  — удельная мощность внешнего источника накачки;  $R_0$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu_a$  — молекулярная масса газа.

Для того чтобы система (1.1) была замкнутой, необходимо определить  $E$ , обратившись к конкретной модели процесса релаксации. Характерное время колебательной релаксации обычно существенно больше характерных времен поступательной и вращательной релаксации, но заметно меньше времен химических реакций. Следовательно, можно считать, что в процессе колебательной релаксации существует равновесное распределение по поступательным и вращательным степеням свободы, а химические реакции не происходят. Это обстоятельство позволяет представить величину  $E$  в виде

$$E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + e, \quad e = \frac{R_0 T_r}{\mu_a} \frac{1}{\exp(T_r/T_v) - 1} \quad (1.2)$$

где  $e$  — энергия колебательных степеней свободы единицы массы газа,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $T_r$  — температура, соответствующая энергии колебательного кванта.

При выполнении  $T_v/T_r \leq 5-10$  для изменения  $e$  можно пользоваться теорией Ландау — Теллера, предполагающей гармоничность колебаний атомов в молекулах. Тогда скорость изменения колебательной энергии единицы массы газа дается релаксационным уравнением

$$\frac{de}{dt} = \frac{e - e_E(T)}{\tau(p, T)} + j(t), \quad e_E = \frac{R_0 T_r}{\mu_a} \frac{1}{\exp(T_r/T) - 1}, \quad \tau = \frac{A}{p} \exp(BT^{-1/2}) \quad (1.3)$$

Здесь  $e_E(T)$  — равновесное значение колебательной энергии единицы массы,  $\tau(p, T)$  — время колебательной релаксации,  $A$  и  $B$  — положительные постоянные, зависящие только от физических свойств газа.

Система уравнений (1.1) — (1.3) с учетом закона Навье — Стокса замкнута и для нее ставится задача Коши. Рассматривается задача о распространении волн в неподвижном газе. При этом невозмущенное состояние характеризуется постоянной плотностью  $\rho_0$  и изменяющимися со временем давлением  $p_0$ , температурой  $T_0$ , энергией колебательных степеней свободы единицы массы  $e_0$ .

Покажем, что для одномерных бегущих волн малой амплитуды система уравнений (1.1) — (1.3) может быть сведена к одному уравнению для скорости газа  $u(r, t)$ , где  $r$  — пространственная координата.

Будем считать, что безразмерная амплитуда волны  $\epsilon$ , равная отношению характерной скорости газа в волне к скорости звука  $a_0$ , достаточно мала, а влияние колебательно-поступательного обмена энергией на эволюцию возмущений с масштабом  $L$  — того же порядка, что и нелинейность, т. е.  $\tau \sim L/\epsilon a_0$ . Для анализа распространения нелинейных волн в среде с энергояделением воспользуемся методом двухмасштабных разложений. Уравнение энергии с учетом (1.2) запишем в виде

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) + p \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V} = \pi \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\kappa_T + \kappa_R) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - \rho \frac{de}{dt} + \rho j(t)$$

Разлагая  $de/dt$  в ряд в окрестности невозмущенного состояния, получим

$$-\frac{de'}{dt} = -\frac{e_0 - e_E(T_0)}{\tau^2(T_0)} \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_0 T' + \left( \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right)_0 \rho' \right] + \frac{e'}{\tau(T_0 + T', \rho_0 + \rho')} - \frac{1}{\tau(T_0)} \left( \frac{\partial e_E}{\partial T} \right)_0 T' \quad (1.4)$$

где штрихом обозначены возмущения величин  $\rho$ ,  $T$ ,  $e$ , вызванные прохождением волны.

Для бегущих волн в области с характерным размером  $L$  функции  $T'$  и  $\rho'$  в течение времени  $\sim L/a_0$  ( $a_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ ) имеют порядок  $\epsilon$ , а вне этой области они либо равны нулю, либо порядка  $\epsilon^2$ . Поскольку  $\tau \sim L/\epsilon a_0$ , то левая часть (1.4) имеет порядок  $\epsilon^2$ . Следовательно, если  $e'(t=0) = 0$ , то  $e'/e_0(0) \sim \epsilon^2$ . Значит, второе слагаемое правой части (1.4) имеет порядок  $\epsilon^3$  и может быть опущено.

В соответствии с методом двухмасштабных разложений, учитывая нестационарность среды, введем новые переменные

$$\xi = r - \int_0^t a_0(\epsilon t) dt, \quad \eta = \epsilon t$$

После этого, ограничиваясь пока случаем невязкого нетеплопроводного газа и отбрасывая слагаемые порядка  $\epsilon^3$  и выше, нетрудно получить следующее уравнение для скорости газа:

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\gamma+1}{2} u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \left( \mu(T_0) - \frac{a_0(T_0)}{r(\xi, \eta)} \frac{d-1}{2} \right) u \quad (1.5)$$

$$\mu(T_0) = \frac{\gamma-1}{2a_0^2} \frac{e_0 - e_E(T_0)}{\tau(T_0)} \left[ \frac{4-\gamma}{2} + (\gamma-1) \left( 1 + \frac{BT_0^{-1/2}}{3} \right) \right] - \frac{(\gamma-1)^2 T_0}{2a_0^2 \tau(T_0)} \left( \frac{\partial e_E}{\partial T} \right)_0 \quad (1.6)$$

Здесь  $d=1, 2, 3$  для плоских, цилиндрических и сферических волн.

В координатах  $r, t$  уравнение (1.5) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \right) \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \mu - \frac{a_0}{r} \frac{d-1}{2} \right) u \quad (1.7)$$

Уравнение для определения  $T_0(t)$  получается из уравнений энергии и релаксации, записанных для невозмущенного прохождением волны состояния

$$\frac{\tau(T_0)}{\gamma-1} \frac{R_0}{\mu_a} \frac{dT_0}{dt} = \Phi(t) - \Phi(0) + \frac{1}{\gamma-1} \frac{R_0}{\mu_a} (T_0(0) - T_0(t)) + e_0(0) - e_E(T_0) \quad (1.8)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = j(t)$$

Не ограничивая общности, полагаем  $\Phi(0) = 0$ . Тогда  $\Phi(t)$  — полная энергия, реализуемая источником накачки к моменту  $t$ .

Решение (1.7) может быть найдено для произвольных начальных данных, что позволяет найти момент опрокидывания  $t_0$  из соотношения

$$\int_0^{t_0} \exp \left[ \int_0^t \left( \mu(t') - \frac{a_0(t')}{r'} \frac{d-1}{2} \right) dt' \right] dt = -\frac{2f'}{\gamma+1} \quad (1.9)$$

$$r' = r_0 + \int_0^{t'} a_0(t'') dt''$$

где  $f'$  — значение производной в точке перегиба функции  $f$ , задаваемой профилем скорости  $f(u)$  при  $t=0$ , а в качестве  $r_0$  в рамках используемого приближения можно взять любую точку начального профиля, так как  $r_0 \sim L/\varepsilon$ .

Анализ уравнения (1.7) и формулы (1.9) показывает, что максимум амплитуды волны в плоском случае всегда больше, чем в цилиндрическом и сферическом, а время опрокидывания плоских волн всегда меньше, чем время опрокидывания цилиндрических и сферических волн (при одинаковых  $a_0, \mu, f'$ ).

В адиабатическом случае вопрос о распространении волны малой амплитуды после опрокидывания решается с помощью введения разрыва, положение которого определяется из условия равенства нулю интеграла от  $\rho_1$  до  $\rho_2$  по неоднозначной ветви профиля плотности [9]. Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — значения плотности до разрыва и за ним. В рассматриваемом случае разрыв можно ввести аналогичным образом. В этом нетрудно убедиться при помощи непосредственной проверки соотношений Ранкина — Гюгонио, которые выполняются с точностью до  $\varepsilon^2$  включительно.

Рассмотрим теперь влияние вязкости и теплопроводности на распространение плоских волн. Уравнение для скорости  $u(r, t)$  с учетом диссипации энергии принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \right) \frac{\partial u}{\partial r} = \mu u + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (1.10)$$

где коэффициент  $\sigma$  зависит от конкретного механизма диссипации и ниже принимается равным  $\sigma(T_0)$ .

Нахождение общего решения (1.10) затруднительно (о некоторых частных решениях (1.10) с постоянными  $a_0, \mu, \sigma$  см., например, [5, 10]). Покажем, что при определенной связи между  $\mu$  и  $\sigma$  задача Коши для уравнения (1.10) может быть решена точно при произвольных начальных данных.

Переходя в (1.10) к переменным  $s_1$  и  $x_1$  по следующим формулам, для  $v(s_1, x_1)$  будем иметь уравнение

$$s = t, \quad x = r - \int_0^t a_0 dt, \quad u = v \exp\left(\int_0^s \mu ds'\right)$$

$$s_1 = \int_0^s \exp\left(\int_0^{s''} \mu ds'\right) ds'', \quad x_1 = \frac{2}{\gamma+1} x$$

$$\frac{\partial v}{\partial s_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{4}{(\gamma+1)^2} \sigma \exp\left(-\int_0^s \mu ds'\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \quad (1.11)$$

Выберем  $T_0(t)$  так, чтобы

$$\sigma \exp\left(-\int_0^s \mu ds'\right) = \sigma_0 = \text{const}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \exp\left(\int_0^s \mu ds'\right), \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT_0} \frac{dT_0}{ds} = \mu(T_0) \quad (1.12)$$

Из последнего равенства с учетом выражения для  $\mu$  (1.6) получаем уравнение для определения  $T_0$

$$\left\{ \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT_0} - \frac{1}{2\gamma T_0} \left[ \frac{4-\gamma}{2} + (\gamma-1) \left( 1 + \frac{BT_0^{-1/2}}{3} \right) \right] \right\} \frac{dT_0}{dt} = - \frac{(\gamma-1)T_0}{2a_0^2\tau(T_0)} \left( \frac{\partial e_E}{\partial T} \right)_0 \quad (1.13)$$

Очевидно, что если (1.13) выполняется, то в силу (1.8) функция  $\Phi(t)$  (а значит, и удельная мощность накачки  $j(t)$ ) не может быть произвольной. Таким образом, уравнение (1.11) с  $\sigma_0 = \text{const}$  отвечает вполне определенному способу притока колебательной энергии к газу.

Если условие (1.12) удовлетворяется, то (1.11) является уравнением Бюргерса и общее решение задачи Коши для него хорошо известно (см., например, монографию [11]).

Рассмотрим свойства некоторых частных решений уравнения (1.11) в плоскости  $(r, t)$ , считая справедливыми (1.12) и (1.13).

Обратимся сначала к простейшему случаю  $\sigma = \text{const}$ . Тогда из (1.12) следует, что  $\mu(t) \equiv 0$ . Поскольку при этом  $s_1 = t$  и  $v = u$ , то для произвольных начальных данных амплитуда возмущения будет уменьшаться со временем, несмотря на приток энергии к газу и возрастание  $T_0(t)$ . Следовательно, усиление волн давления возможно не при любом выборе  $\Phi(t)$  ( $j(t)$ ). Интересно также, что в пределе  $\sigma \rightarrow 0$  амплитуда постоянна, в то время как скорость распространения волны увеличивается с ростом  $T_0$ .

Пусть теперь  $\sigma = \sigma(T_0)$  и начальные условия соответствуют хорошо известному в литературе решению уравнения (1.11) типа одиночного горба [11]. В переменных  $r, t$  это решение имеет вид

$$u = \frac{4\sqrt{\sigma_0}}{\gamma+1} \frac{d\sqrt{h}}{dt} \frac{(e^R-1)e^{-\xi^2}}{F(\xi)}, \quad F(\xi) = \sqrt{\pi} + (e^R-1) \int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$R = \frac{(\gamma+1)M}{4\sigma_0}, \quad h(t) = \int_0^t \frac{\sigma}{\sigma_0} dt \quad (1.14)$$

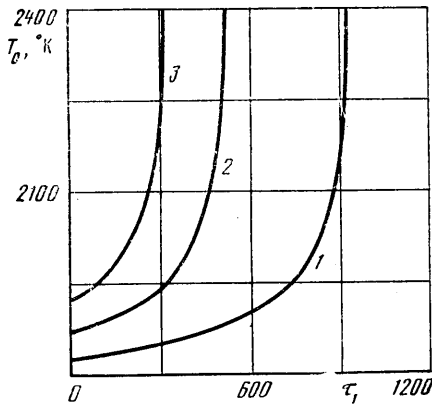
$$\xi = \frac{r}{2\sqrt{\sigma_0 h}} - \frac{1}{2\sqrt{\sigma_0 h}} \int_0^t a_0 dt, \quad M = \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, r) dr = \text{const}$$

где  $M$  — так называемый главный момент.

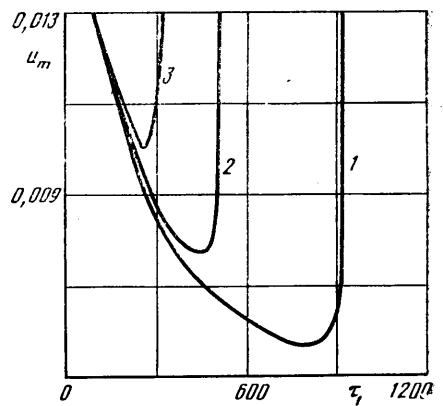
В отличие от случая диссипативного газа без учета колебательной релаксации соотношения (1.14) показывают, что в зависимости от поведения функции  $d\sqrt{h}/dt$  в газе с избытком колебательной энергии возможно как затухание, так и нарастание возмущений. Эта особенность изменения  $u(r, t)$  иллюстрируется фиг. 1, 2, на которых для различных  $T_0(0)$  представлено решение уравнения (1.13) и соответствующие наибольшие значения скорости  $u_m = u/a_0(0)$  в различные моменты времени  $\tau_1 = a_0(0)t/L$ . Для определенности принималось, что  $\sigma$  равно кинематическому коэффициенту вязкости воздуха, а постоянные, характеризующие процесс релаксации, выбирались такими же, как для азота [12].

Зависимость  $u_m(t)$ , вообще говоря, немонотонная — первоначально  $u_m$  убывает и лишь позднее растет. Рост амплитуды волны начинается тем раньше, чем больше  $T_0(0)$ . Немонотонность  $u_m(t)$  представляет интерес по следующей причине.

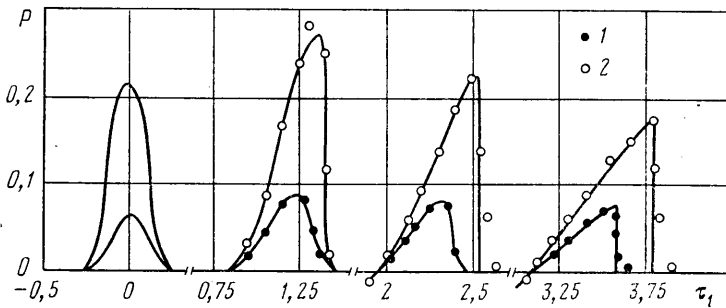
Подстановка решения уравнения (1.13) в (1.8) дает возможность легко найти  $\Phi(t)$ . Анализ показывает, что для  $\Phi(t)$ , как и для  $T_0(t)$ , характерно монотонное возрастание и обращение в бесконечность в течение конечного промежутка времени. Однако реально  $\Phi(t)$  ограничено, так как



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

представляет собой энергию, подведенную к единице массы газа за время  $t$ . Поэтому режим усиления волны (кривые 1–3 на фиг. 2) осуществим, только если запас колебательной энергии источника накачки достаточно велик.

Приведенные примеры показывают, что несмотря на приток энергии в фазе сжатия, для роста амплитуды возмущения необходима достаточно высокая мощность накачки и большой запас колебательной энергии.

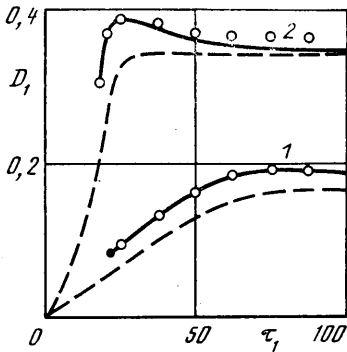
**2. Численные расчеты распространения одномерных нелинейных волн.** При проведении конкретных расчетов остается неопределенной величина погрешности, возникающей в результате отбрасывания слагаемых порядка  $\epsilon^3$ . Поэтому с целью выявить границы применимости метода двухмасштабных разложений было проведено численное интегрирование системы уравнений (1.1)–(1.3) для вязкого нетеплопроводного газа с  $j=0$  методом Мак-Кормака и результаты этих расчетов сопоставлялись с решением уравнения (1.7). При этом начальные условия для системы (1.1)–(1.3) выбирались такими же, как для (1.7), с учетом соотношений для давления и плотности, которые легко получаются из (1.1)–(1.3), (1.7). Начальный профиль скорости брался в виде

$$u(r, 0) = 0,5\epsilon a_0(0) (1 + \cos(\pi r/L)) \quad (|r| \leq L)$$

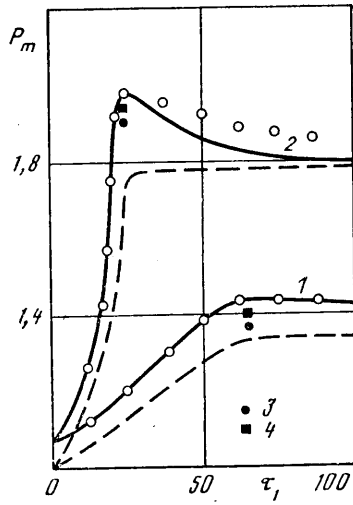
$$u(r, 0) = 0 \quad (|r| > L)$$

Параметр  $\epsilon$  варьировался в пределах 0,05–0,15. Ниже приводятся результаты расчетов для  $B=21,67T_0^{1/3}(0)$ ,  $T_r=2,62T_0(0)$  и различных  $A$  и  $e_0(0)$  (указанные значения постоянных, а также использовавшиеся величины  $e_0(0)$  соответствуют данным [12]).

Результаты одного из вариантов расчетов представлены на фиг. 3 ( $e_0(0) = 0,52(R_0T_0(0)/(\gamma-1)\mu_0)$ ,  $A=4,6 \cdot 10^{-9}\rho_0 a_0 L/\gamma$ ). Сплошными линиями изображены найденные с помощью метода двухмасштабных разложений профили давления  $P=p'/\rho_0(t)$  в последовательные моменты времени  $t=0; 0,6t_2; 1,2t_2; 1,8t_2$  ( $t_2$  – момент времени, когда  $\mu(t)$  становится равной нулю, а  $e=e_E$ ;  $r_1=r/L$ ). Кривым 1–2 отвечают  $\epsilon=0,05; 0,15$ . Видно, что расхождение с численным решением в величине и положении максимума давления не превосходит нескольких процентов. Вместе с тем на



Фиг. 4



Фиг. 5

временах, заметно превышающих время релаксации, при  $\epsilon=0,15$  различия в положении скачка достигают величины порядка  $10^{-1}L$ .

Об особенностях роста амплитуды возмущений в случае плоской волны дают представление фиг. 4, 5 (для кривых 1-2 безразмерный множитель в выражении для  $A$  равен  $1,84 \cdot 10^{-8}$ , а для  $\epsilon_0(0)$  соответственно 0,52; 1,11. На фиг. 4 показано относительное превышение скорости ударной волны  $D_1 = (D(t) - a_0(0))/a_0(0)$  ( $D$  — скорость ударной волны) над скоростью звука в начальный момент времени. Зависимость максимального давления в волне  $p_m$  от времени иллюстрируется фиг. 5. По оси ординат отложена относительная величина  $P_m = p_m/p_0(0)$ . Штриховыми линиями на фиг. 4, 5 изображены соответственно  $(a_0(t) - a_0(0))/a_0(0)$  и  $p_0(t)/p_0(0)$ .

Из графиков следует, что с ростом запасенной неравновесной колебательной энергии растут максимум давления, превышение давления в волне над невозмущенным прохождением волны давлением, скорость распространения образовавшегося скачка. Хорошо видно также, что в связи с нарушением условия  $\tau < L/\epsilon a_0$  после окончания процесса релаксации наблюдаются существенные отличия от численного решения при сильной начальной неравновесности.

Выведем теперь верхнюю оценку для максимума скорости в плоской волне  $U_2$  за весь рассматриваемый промежуток времени. Для этого примем в качестве  $U_2$  значение на характеристике, соответствующей максимуму начального распределения. При таком представлении не учитывается влияние на  $U_2$  эффекта опрокидывания волны, в результате которого «отсекается» наиболее высокая часть профиля скорости. Однако возникающее из-за этого уменьшение  $u_2$  при условии  $t_2 \sim t_0$ , как свидетельствуют расчеты, мало.

Из условия на характеристике для уравнения (1.7) следует

$$u_2 \approx \epsilon a_0(0) \exp \left[ \int_0^{t_2} \mu(T_0(t)) dt \right] \quad (2.1)$$

В рассматриваемом диапазоне изменения параметров в соотношении (1.6) последнее слагаемое правой части существенно меньше первого при всех  $t < t_2$ , за исключением небольшого интервала времени, когда  $t \approx t_2$ , и им можно пренебречь. Тогда интеграл в (2.1) вычисляется и будем иметь

$$u_2 \approx \epsilon a_0(t_2) \left( \frac{T_2}{T_0(0)} \right)^{(2-\gamma)/4\gamma} \exp \left[ \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left( \frac{B}{T_0^{1/2}(0)} - \frac{B}{T_2^{1/2}} \right) \right] \quad (2.2)$$

причем  $T_2$  — значение температуры невозмущенного газа по завершении процесса релаксации.

На основании (2.1)–(2.2) можно сделать следующие выводы. Определяющее влияние на усиление волны оказывают начальные значения поступательной и колебательной температур и свойства газа ( $\gamma$ ,  $\mu_a$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $T_\gamma$ ). Длина волны практически не сказывается на величине максимума  $u_2$ , что подтверждается непосредственными расчетами. Лишь когда опрокидывание происходит существенно раньше  $t_2$ , проявляется слабая зависимость максимума от длины волны.

В заключение рассмотрим влияние геометрических факторов на эволюции волны, т. е. обратимся к анализу распространения цилиндрических и сферических волн. На фиг. 5 точки 3 и 4 — положение и величина максимумов  $p_m(t)$  соответственно для цилиндрических и сферических волн (обозначения и безразмерные параметры те же, что и на фиг. 5 для плоских волн; координата переднего фронта начального возмущения принималась равной  $r=6L$ ). Качественные особенности поведения  $P_m$  аналогичны тем, которые характерны для плоских волн. Но усиление волны существенно более слабое, чем при  $d=1$ .

Суммируя результаты аналитического и численного решений, отметим, что распространение нелинейных волн в газе с избытком колебательной энергии может сопровождаться увеличением скорости волны и ростом ее амплитуды. Однако для диссипативного газа выявлен такой диапазон начальных температур и такие режимы накачки, при которых усиление волн не происходит.

Авторы благодарят М. С. Рудермана за полезное обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коган Е. Я., Мальнев В. Н. Распространение звука в колебательно-возбужденном газе // ЖТФ. 1977. Т. 47. № 3. С. 653–656.
2. Осипов А. И., Уваров А. В. Распространение звука в колебательно-неравновесном газе // Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия. 1984. Т. 25. № 6. С. 74–77.
3. Богданов А. Н. Асимптотические законы распространения слабых нелинейных волн в релаксирующем газе при воздействии внешнего излучения // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1985. № 6. С. 70–73.
4. Кириллов И. А., Русанов В. Д., Фридман А. А. Формирование ударных волн в потоке колебательно-неравновесного газа // Хим. физика. 1985. Т. 4. № 1. С. 132–136.
5. Осипов А. И., Уваров А. В. Распространение нелинейных гидродинамических возмущений в колебательно-неравновесном газе // Хим. физика. 1987. Т. 6. № 3. С. 385–389.
6. Встовский Г. В., Козлов Г. И. Распространение слабых ударных волн в колебательно-неравновесном газе // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 8. С. 1536–1542.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
8. Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры. М.: Наука, 1980. 512 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Краснобаев К. В., Тарев В. Ю. Квазиизэнтропические нелинейные волны в газе с тепловой неустойчивостью // Астрон. журн. 1987. Т. 64. № 6. С. 1210–1219.
11. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
12. Евтюхин Н. В., Марголин А. Д., Шмелев В. М. Взаимодействие ударных волн с колебательно-возбужденным газом // Хим. физика. 1985. Т. 4. № 9. С. 1276–1280.

Москва

Поступила в редакцию  
20.I.1988