

БЕЛЛО М. С., ПОЛЕЖАЕВ В. И.

**ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ  
ЖИДКОСТИ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ЭЛЕКТРОФОРЕТИЧЕСКОЙ КАМЕРЫ**

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в ячейке прямоугольного сечения, изображенной на фиг. 1. Жидкость поступает через отверстие в верхней грани камеры и откачивается через систему близко расположенных трубочек малого диаметра, установленных в нижней грани. Толщина ячейки  $2d$  много меньше ее высоты  $h$  и ширины  $2l$ . Число Рейнольдса, рассчитанное по средней скорости жидкости и полутолщине камеры, не превосходит 10. Эта система, близкая по своим характеристикам к ячейкам Хеле – Шоу, может служить гидродинамической моделью камеры свободнопоточного электрофоретического сепаратора, широко применяемого для разделения биологических смесей (см., например, [1]).

Основой электрофореза в свободном потоке является создание в камере ламинарного плоскопараллельного течения, в связи с чем представляет интерес изучение возможностей возникновения вторичных течений в камере и влияния параметров системы на протяженность участка гидродинамической стабилизации. Решение классической задачи о длине участка гидродинамической стабилизации течения в плоском канале [2], неприменимо к рассматриваемой системе. В данном случае длина входного участка определяется затуханием  $z$ -составляющей скорости жидкости, которое происходит на значительно больших масштабах, чем затухание  $x$ -составляющей (см. [3, 4]) и зависит, в частности, от размера входного отверстия.

Гидродинамическая система, аналогичная рассматриваемой, теоретически и экспериментально изучалась в [5, 6], однако авторы не ставили своей целью определение длины участка стабилизации.

В настоящей работе путем численного решения и приближенного анализа системы уравнений Навье – Стокса, осредненных по поперечной координате, получена зависимость длины участка гидродинамической стабилизации течения в тонкой ячейке прямоугольного сечения от числа Рейнольдса, ее относительной толщины и относительного размера входного отверстия. Рассчитаны основные и вторичные режимы течения жидкости.

**1. Постановка задачи о вынужденном течении жидкости в камере.** Течение вязкой несжимаемой жидкости в камере описывается уравнениями Навье – Стокса в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \text{ Re} = V_1 l / \nu \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости с компонентами  $V_x, V_y, V_z$ ;  $V_1$  – средняя по сечению  $y = \text{const}$  скорость жидкости, принимаемая за масштаб скорости;  $l$  – масштаб длины;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $t$  – безразмерное время, масштабом которого является  $l/V_1$ ;  $p$  – безразмерное давление.

Характерные размеры камеры (толщина  $2d \sim 1-3$  мм, ширина  $2l \sim 100$  мм и высота  $h \sim 500$  мм) позволяют пренебречь поперечной составляющей скорости  $V_x$  по сравнению с осевой компонентой  $V_y$  и продольной компонентой  $V_z$  в «плане», которые будем предполагать зависящими от всех трех координат, считая справедливым следующее представление, выделяющее их полиномиальную зависимость от поперечной координаты в виде:

$$V_{y,z} = {}^3/2 v_{y,z}(t, y, z) [1 - x^2(l/d)^2] \quad (1.3)$$

Такое представление обеспечивает выполнение условия прилипания на стенках камеры  $x = \pm d/l$ . В области стабилизированного течения в пределе  $l/d \rightarrow \infty$  (плоский канал),  $v_z$  обращается в ноль, а  $v_y$  стремится к единице и соотношение (1.3) представляет собой выражение для пуазейлевского профиля скорости (см., например, [7]). После подстановки (1.3) в (1.1), (1.2) и осреднения результата по оси  $x$ , получим

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{6}{5} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \alpha v_i \quad (1.4)$$

$$\alpha = \frac{3(l/d)^2}{\text{Re}}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (i=y, z; \quad j=y, z)$$

Представление скоростей жидкости в виде, близком (1.3), и последующее понижение пространственной размерности уравнений использовались рядом авторов при моделировании течения тонких слоев жидкости (см., например, [6, 8]). При этом сопоставление теоретических и экспериментальных результатов подтвердило адекватность такого подхода. В отличие от обычной системы уравнений Навье — Стокса уравнения (1.4) содержат член  $-\alpha v_i$ , описывающий сток импульса за счет трения жидкости о боковые стенки камеры. Безразмерный параметр  $\alpha$  характеризует отношение сил трения жидкости о стенки камеры к силам инерции.

Граничными условиями при  $z = \pm 1$  служат условия прилипания или свободные граничные условия

$$v_i = 0 \quad (z = \pm 1) \quad (1.5)$$

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad (z = \pm 1) \quad (1.6)$$

Жидкость вводится в камеру через относительно узкое отверстие  $2s \ll 1$ . Очевидно, что детали распределения скорости в отверстии не влияют на структуру течения в камере, в связи с чем во входном отверстии задана скорость, постоянная по сечению отверстия и величина которой удовлетворяет балансу расхода:

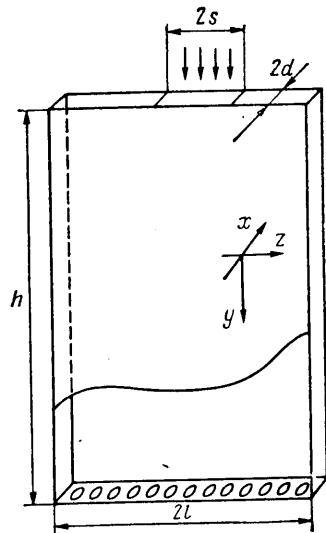
$$y=0; \quad v_y=1/s, \quad |z| \leq s, \quad (1.7)$$

$$v_y=0, \quad s < |z| \leq 1, \quad v_z=0$$

Жидкость выкачивается из камеры перистальтическим насосом через ряд трубочек малого диаметра, установленных на выходе камеры. Перистальтический насос обеспечивает равный расход жидкости через каждую трубочку. Следовательно, граничные условия на выходе могут быть приближенно заданы в следующем виде:

$$v_y=1, \quad v_z=0, \quad y=h/l \quad (1.8)$$

Граничное условие (1.8) «навязано» конструкцией камеры и не соответствует в общем случае стабилизированному плоскопараллельному течению.



Фиг. 1

Длину входного участка  $r$  можно определить различными способами. Будем использовать два из них:

1)  $r$  — это минимальное расстояние от входа в камеру до области, где отношение компонент скорости  $v_z/v_y$  меньше малой величины  $\epsilon$ , т. е.

$$\min_r \max_z \{v_z(r, z)/v_y(r, z)\} \leq \epsilon$$

2)  $r$  является минимальным корнем уравнения

$$v_y(r, 0) - v_\infty(0) = \epsilon$$

Здесь  $v_\infty(z)$  — одномерный профиль осевой скорости при  $y \rightarrow \infty$ . Оба определения и приводят к близким значениям для  $r$ , но первое более удобно для численных расчетов, в то время как второе более удобно для аналитических оценок. Отношение скоростей  $v_z/v_y$  представляет собой тангенс угла, образованного осью  $y$  и линией тока в точке  $(y, z)$ . Это отношение служит мерой параллельности потока.

Из уравнений (1.4)–(1.8) следует, что длина входного участка зависит от безразмерных параметров  $Re$ ,  $s$ ,  $l/d$ ,  $h/l$ . Ниже эта зависимость и структура течения в камере исследуются аналитически и численно.

**2. Приближенный анализ течения в камере.** Найдем профиль осевой скорости  $v_\infty$  в области стабилизированного течения. В этой области компонента скорости  $v_z$  равна нулю, а  $v_\infty$  зависит только от координаты  $z$ . По аналогии с решением задачи о течении Пуазейля в плоском канале [7] из (1.4) получим

$$\frac{d^2 v_\infty}{dz^2} = 3 \left( \frac{l}{d} \right)^2 v_\infty + Re \frac{\partial p}{\partial y}, \quad Re \frac{\partial p}{\partial y} = \text{const} \quad (2.1)$$

$$\int_0^1 v_\infty dz = 1 \quad (2.2)$$

где  $Re \partial p / \partial y$  определяется из условия (2.2).

Решая (2.1)–(2.2) с граничными условиями (1.5), получим

$$v_\infty = \left[ 1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{3}lz/d)}{\text{ch}(\sqrt{3}l/d)} \right] / \left[ 1 - \frac{d}{\sqrt{3}l} \text{th} \left( \frac{\sqrt{3}l}{d} \right) \right] \quad (2.3)$$

В рассматриваемом случае  $l/d \gg 1$  значения  $v_\infty$  незначительно отличаются от единицы (на величину порядка  $d/l$ ) практически при всех  $z$ , быстро спадая до нуля на расстояниях порядка  $d/l$  вблизи границ  $z = \pm 1$ .

Решение (2.1)–(2.2) со свободными граничными условиями (1.6) имеет вид  $v_\infty = 1$ . Таким образом, следует ожидать, что решения (1.4) с граничными условиями (1.5) и (1.6) будут существенно различаться лишь вблизи выходной границы  $y = h/l$ , где осуществляется перестройка течения, а также в тонких пристеночных слоях вблизи границ  $z = \pm 1$ .

Для дальнейшего удобно записать уравнения (1.4) в переменных вихрь — функция тока

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{6}{5} \left( v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{1}{Re} \Delta \omega - \alpha \omega \quad (2.4)$$

$$\omega = -\Delta \psi, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.5)$$

где  $\omega$  — вихрь,  $\psi$  — функция тока. В соответствии с (1.5)–(1.8) граничные условия для функции тока имеют вид

$$y=0: \psi=1 \quad (-1 \leq z \leq -s); \quad \psi = -z/s \quad (|z| < s) \quad (2.6)$$

$$\psi = -1 \quad (s \leq z \leq 1)$$

$$z = \pm 1: \psi = \mp 1; \quad y = h/l: \psi = -z$$

Рассмотрим случай  $\alpha \gg 1$ . Пренебрегая в (2.4) членами, содержащими производные по координатам, получим, что начальные возмущения завихренности убывают со временем как  $\exp(-\alpha t)$  с характерным временем  $\tau = 1/\alpha$ .

По истечении интервала времени порядка нескольких  $\tau$  от момента начала движения жидкости двумерное течение жидкости в плоскости  $y-z$  может рассматриваться как безвихревое. Уравнения (2.4) и (2.5) принимают вид

$$\omega = 0, \quad \Delta \psi = 0 \quad (2.7)$$

Уравнение Лапласа (2.7) описывает классическое течение в ячейках Хеле — Шоу, применяемых для физического моделирования потенциальных двумерных течений идеальной несжимаемой жидкости. Этот режим реализуется в случае  $\alpha \gg 1$ .

Найдем решение (2.7) с граничными условиями (2.6). Воспользуемся тем, что значения  $h/l$  обычно велики, и перенесем в связи с этим третье граничное условие на  $y = \infty$ . Искомое решение имеет вид

$$\psi = -z + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n s)}{\pi^2 n^2 s} \sin(\pi n z) \exp(-\pi n y) \quad (2.8)$$

В соответствии со вторым определением длины входного участка из (2.8) получим

$$r = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{\varepsilon s \pi}{2 \sin s \pi} \quad (2.9)$$

Рассмотрим случай, когда члены  $v_y \partial \omega / \partial y$  и  $\alpha \omega$  в (2.4) имеют один порядок величины, число Рейнольдса велико и размер входного отверстия много меньше ширины камеры:  $\alpha \sim 1$ ,  $\text{Re} \gg 1$ ,  $s \ll 1$ . В этих условиях можно ожидать формирования струи на входном участке камеры. Выведем приближенные формулы для осевой скорости жидкости при  $z=0$  и для длины входного участка.

В силу симметрии системы компонента скорости  $v_z$  обращается в ноль на оси камеры. Пренебрегая членами, пропорциональными  $1/\text{Re}$ , и полагая градиент давления  $\partial p / \partial y$  равным нулю в области струи, получим из (1.4) с учетом (1.7)

$$v_y = 1/s - \varepsilon / \alpha y \quad (2.10)$$

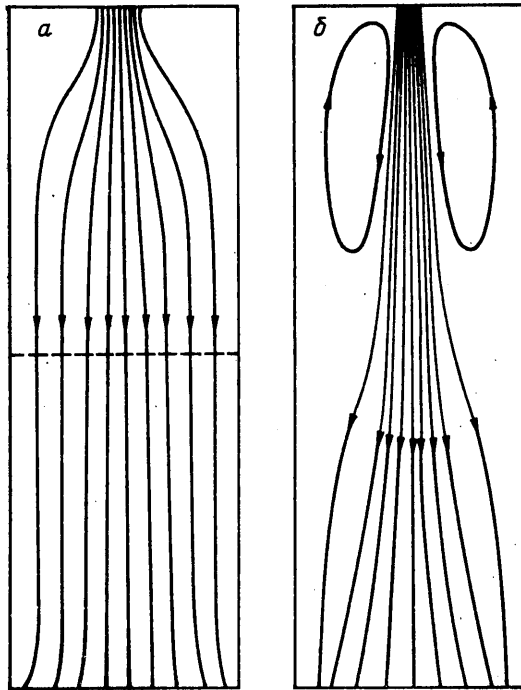
Исходя из второго определения длины участка стабилизации, соотношения (2.1) и того, что  $v_{\infty} = 1$ , получим оценку

$$r = \varepsilon / s (1/s - 1 - \varepsilon) / \alpha \quad (2.11)$$

Сделанное выше допущение о равенстве нулю продольного градиента давления теряет справедливость при больших значениях  $y$ , так как, согласно (2.1) — (2.3), при  $y \gg 1$  градиент давления приобретает постоянное значение, приближенно равное  $\alpha$ , в силу чего применимость (2.10), (2.11) также ограничена областью входного участка камеры.

Согласно (2.9), в пределе  $\alpha \gg 1$  длина входного участка стремится к конечному пределу. Объединяя (2.9) и (2.11), получим оценку длины входного участка как функции параметра  $\alpha$  и относительного размера входного отверстия  $s$

$$r = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{\varepsilon s \pi}{2 \sin s \pi} + \frac{6}{5\alpha} \left[ \frac{1}{s} - 1 - \varepsilon \right] \quad (2.12)$$



Фиг. 2

**3. Численный метод.** Уравнения (2.4)–(2.5) решались методом конечных разностей с помощью комплекса программ [9]. Используемый алгоритм основывается на методе переменных направлений для решения уравнения переноса вихря (2.4). Применялись два способа аппроксимации конвективных членов, приводящие при решении данной задачи к близким результатам: монотонная аппроксимация и аппроксимация направленными разностями.

Уравнение (2.4) решалось на конечно-разностной сетке, границы которой совпадают с границами  $y=0$ ,  $y=h/l$  и отстоят на один шаг сетки в глубину области от границ  $z=\pm 1$ .

Согласно методике [9], для выполнения условий прилипания на каждом временном слое производилась коррекция функции тока в узлах разностной сетки, прилегающей к границам  $z=\pm 1$ .

Численное решение уравнения Пуассона (2.6) осуществлялось методами быстрого преобразования Фурье и последовательной верхней релаксации [10].

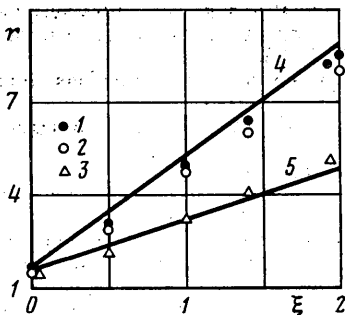
В качестве начального условия задавалось вихревое течение с центром вихря, расположенным на оси расчетной области. Стационарное решение всей системы (2.4), (2.5) находилось методом установления. Уравнения решались в итерационном цикле, пока максимальное значение относительной временной производной вихря не уменьшалось до  $10^{-3}$ . Максимальная относительная невязка уравнения переноса вихря для стационарного решения не превышала  $10^{-4}$ .

Использовались равномерные сетки  $21 \times 33$  и  $41 \times 65$ . Шаг интегрирования по времени выбирался в диапазоне от  $5 \cdot 10^{-3}$  до  $5 \cdot 10^{-2}$  в зависимости от значений параметров. Результаты, полученные на мелкой сетке, незначительно отличались от результатов, полученных на более грубой.

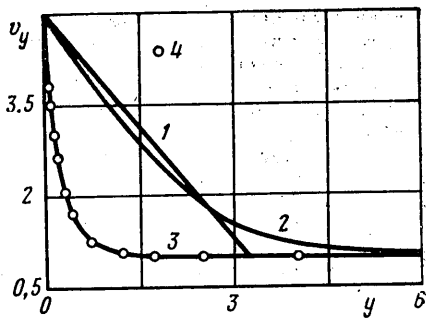
Вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6 и СУБЕР-172. В расчетах, проводимых на БЭСМ-6, использовалась система САФРА [11], с помощью которой осуществлялась автоматическая сборка программных модулей при проведении методических и параметрических расчетов.

**4. Параметрические исследования течения в камере.** Для изучения течения в камере были проведены расчеты в следующем диапазоне параметров:  $10 \leq l/d \leq 200$ ,  $0,1 \leq s < 1$ ,  $50 \leq Re \leq 500$ .

Картины течений, характерных для рассматриваемой системы, приведены на фиг. 2. На фиг. 2, а показаны линии тока стационарного течения, соответствующего значениям  $Re=200$ ,  $l/d=15$ ,  $s=0,2$ ,  $h/l=6,4$ . Штриховая линия ограничивает входной участок. Его длина, рассчитанная для  $\epsilon = 0,01$ , равна 3,2. Линии тока искривляются на выходе камеры, так как



Фиг. 3



Фиг. 4

граничные условия (1.8) перестраивают течение. Длина выходного участка оказалась практически не зависящей от параметров течения и равной приблизительно 1,5.

Увеличение толщины камеры (т.е. уменьшение  $l/d$ ) приводит к значительному увеличению входного участка и появлению вторичных течений. В случае  $Re=200$ ,  $l/d=10$ ,  $s=0,2$ ,  $h/l=10$  длина входного участка оказывается равной 5,6. Максимальное значение модуля функции тока  $|\psi|_{\max}$  характеризует интенсивность возвратного течения; его величина равна 1,016.

Уменьшение размера  $s$  входного отверстия приводит к увеличению начальной скорости струи, формирующейся на входе, и, как следствие, — к увеличению интенсивности обратного течения и длины входного участка. Линии тока течения при значениях параметров  $Re=200$ ,  $s=0,1$ ,  $l/d=10$ ,  $h/l=6,4$  приведены на фиг. 2, б. Значение  $|\psi|_{\max}$  равно 1,053, что показывает увеличение расхода жидкости в возвратном течении.

На фиг. 3 приведены результаты расчета длины входного участка  $r$  в зависимости от  $\xi = Re(l/d)^2$  (1 —  $Re=400$ ,  $S=0,1$ ; 2 —  $Re=200$ ,  $s=0,1$ ; 3 —  $Re=200$ ,  $s=0,2$ ) и ее аналитической оценки (2.13) (4 —  $s=0,1$ ; 5 —  $s=0,2$ ) для  $\epsilon=10^{-2}$ . Видно удовлетворительное совпадение численных и аналитических результатов и что чем больше число Рейнольдса, тем лучше это совпадение в соответствии со сделанными допущениями.

Численные расчеты осевой скорости при  $z=0$  и приближенные результаты сравниваются на фиг. 4. Здесь 1 — соотношение (2.10) для  $s=0,2$ ,  $d=1,5$ ; 2 — численный расчет для значений параметров  $Re=200$ ,  $l/d=10$ ,  $s=0,2$ ; 3 — численный расчет для  $Re=50$ ,  $l/d=50$ ,  $s=0,2$ ; 4 — значения  $v_y$ , найденные (2.10) для  $s=0,2$ ,  $\alpha=150$ . Видно, что, несмотря на грубые допущения, сделанные при выводе (2.8), согласие между (2.8) и численным расчетом удовлетворительное в случае  $Re \gg 1$  и  $\alpha \sim 1$ . В предельном случае  $\alpha \gg 1$ , как следует из сопоставления 3 и 4, значения скорости жидкости на оси камеры рассчитанные численным методом и полученные из (2.10), практически совпадают.

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в данной работе. В зависимости от значений параметров  $\alpha = 3(l/d)^2/Re$  и  $s$  в камере реализуются следующие стационарные течения. В случае  $\alpha \gg 1$  во фронтальной плоскости камеры устанавливается безвихревое течение. Длина входного участка при малых  $s$  — порядка единицы. При значениях  $\alpha \sim 1$  во входной области формируется струя, порождающая при достаточно малых  $\alpha$  и  $s$  вторичное возвратное течение во входном участке. Длина входного участка зависит от  $\alpha$  и  $s$ , увеличиваясь с уменьшением  $\alpha$  и  $s$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hannig K., Wirth H., Mayer B.-H., Zeiller K. Free-flow electrophoresis. I. Theoretical and experimental investigations of the influence of mechanical and electrokinetic variables on the efficiency of the method // Z. Physiol. Chem. 1975. V. 356. № 7. P. 1209–1223.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. Белло М. С., Галкин В. М., Жбанов и др. Камера разделения электрофоретического сепаратора. А. с. № 1364647 СССР // Б. И. 1988. № 1.
4. Головинкин А. В., Мешков М. А., Серебров А. А. Формирование ламинарного по-

- тока с заданными гидродинамическими характеристиками в камере прямоугольного сечения // Современные вопросы механики сплошной среды в геокосмических исследованиях: Междувед. сб. М.: МФТИ, 1987. С. 132–139.
5. *Накоряков В. Е., Ячникова И. Н.* Ламинарная струя в узкой щели при больших числах Рейнольдса // ПМТФ. 1985. № 5. С. 30–35.
  6. *Жак В. Д., Мухин В. А., Накоряков В. Е., Сафонов С. А.* Распространение затопленной струи в узкой щели // ПМТФ. 1985. № 3. С. 69–77.
  7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
  8. *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
  9. *Полежаев В. И., Бунэ А. В., Врезуб Н. А. и др.* Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
  10. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
  11. *Горбунов-Посадов М. М., Карнов В. Я., Корягин Д. А. и др.* Пакет прикладных программ САФРА. Системное наполнение: Препринт № 85. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1977. 27 с.

Ленинград  
Москва

Поступила в редакцию  
28.XI.1988