

ДОБРЫДНЕВ Б. В.

ЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК ПЛАЗМЫ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ,
НА ЛОКАЛИЗОВАННУЮ НАЧАЛЬНУЮ ЗАВИХРЕННОСТЬ

При локальном инициировании газодинамических возмущений в слабоионизованной плазме в присутствии магнитного поля, как правило, происходит разделение зарядов. Возникающее распределение плотности заряда может создать нелокальное электрическое поле. Во всей области, занятой проводящим газом, появляются возмущения силы Ампера $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ и джоулева тепловыделения $(j^2/\sigma)'$, обеспечивающие «мгновенное» распространение возмущений термодинамических параметров и скорости среды — эффект дальнего действия [1].

Одномерные возмущения при сверхзвуковых течениях плазмы в каналах с внешней электрической цепью рассматривались аналитически в [2, 3] и численно в [4]. В (5) рассматривалось формирование электроакустического предвестника в ограниченной плазме при инициировании двумерных звуковых импульсов в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

В упомянутых работах эффект дальнего действия изучался для ограниченных систем. В отсутствие границ разделение зарядов на начальных газодинамических неоднородностях может и не приводить к дальнему действию. Так, для двумерных возмущений, локализованных при $t=0$ и распространяющихся поперек магнитного поля, электрическое поле отлично от нуля только в ограниченной области [5]. В данной статье установлено, что для трехмерных возмущений эффект дальнего действия проявляется даже в отсутствие границ. Рассмотрена задача об эволюции электро- и газодинамических возмущений, созданных локализованным источником завихренности. Показано возникновение акустических возмущений нелокального характера. Исследована пространственная структура электрического потенциала и нелокального электрического поля, создаваемого локализованной начальной завихренностью при конечном значении параметра Холла.

1. Рассмотрим однородную безграничную плазму, находящуюся в постоянном магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ в отсутствие электрического тока. Наложим на это стационарное состояние локализованное возмущение скорости, имеющее вихревой характер, и исследуем в линейном приближении эволюцию связанных между собой электро- и газодинамических возмущений.

Система линеаризованных уравнений одножидкостной магнитной газодинамики в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью включает в себя уравнения непрерывности, движения и закона Ома, в котором учтен эффект Холла

$$\mathbf{j}' + \mathbf{j}' \times \beta = \sigma(-\nabla\phi' + \mathbf{V}' \times \mathbf{B}), \quad \beta = \beta\mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

Условия, когда можно считать электрическое поле потенциальным и пренебречь индуцированным магнитным полем, обсуждались в [1].

Ввиду отсутствия электрического тока в основном состоянии ($\mathbf{j}=0$) при анализе малых возмущений вместо уравнения энергии будет использовано соотношение $p' = a^2 \rho'$, где a — невозмущенная скорость звука, p' и ρ' — возмущения давления и плотности.

Представим возмущение скорости в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих $\mathbf{V}' = \nabla U + \text{rot } \Psi$ с калибровочным условием на векторный потенциал $\partial/\partial t \text{ div } \Psi = 0$.

После соответствующих преобразований систему линеаризованных

уравнений магнитной газодинамики можно привести к системе уравнений относительно безразмерного возмущения плотности $R=\rho'/\rho$, скалярного и векторного потенциала скоростей, а также функции $\Phi=\varphi'/B$, пропорциональной потенциалу электрического поля. Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + \Delta U &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) + \frac{\lambda}{1+\beta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \right] R &= \frac{\lambda\beta}{1+\beta^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\perp} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi \\ \left(\Delta + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi &= \beta \Delta_{\perp} U - \Delta \Psi_z + \beta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \Psi \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi_x &= \frac{\lambda}{1+\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Phi - \beta U + \Psi_z) - \frac{\partial}{\partial y} (\beta \Phi + U + \beta \Psi_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\beta \Psi_y - \Psi_x) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi_y &= \frac{\lambda}{1+\beta^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Phi - \beta U + \Psi_z) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta \Phi + U + \beta \Psi_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\beta \Psi_x - \Psi_y) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi_z &= \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda = \sigma B^2 / \rho$ — декремент магнитного трения, $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ — двумерный (поперечный к \mathbf{B}) оператор Лапласа, Δ — трехмерный оператор Лапласа, Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z — компоненты векторного потенциала скоростей.

Для системы (1.2) зададим начальные условия в виде

$$R(\mathbf{r}, 0) = R_0(\mathbf{r}), \quad U(\mathbf{r}, 0) = U_0(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r}, 0) = \Psi_0(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

Необходимые для решения задачи первая и вторая производные по времени от функции $R(\mathbf{r}, t)$ при $t=0$ определяются по начальным распределениям (1.3)

$$t=0: \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -\Delta U_0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = -a^2 \Delta R_0 + \lambda \left(\Delta_{\perp} U_0 - \beta \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_{y0}}{\partial x} \right) \right)$$

Входящее в (1.4) распределение Φ_0 определяется как решение эллиптического уравнения (третьего в (1.3)), в правую часть которого вместо U и Ψ подставлены начальные распределения U_0 и Ψ_0 из (1.3).

Исходная задача (1.2), (1.3) является линейной, так что ее общее решение есть суперпозиция отдельных линейно независимых решений, таких, что для каждой из них отлична от нуля только одна из начальных функций (1.3). Будем интересоваться такими решениями задачи (1.2), (1.3), для которых $R_0=0, U_0=0, \Psi_0=\Psi_0(\mathbf{r})$, т. е. случае, когда начальное поле скоростей имеет вихревой характер.

2. Ищется фундаментальное решение задачи (1.2) с начальными условиями двух видов:

$$R_0=0, U_0=0, \Psi_0=Q\delta(\mathbf{r})\mathbf{e}_z; \quad R_0=0, U_0=0, \Psi_0=Q\delta(\mathbf{r})\mathbf{e}_y \quad (2.1)$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — трехмерная дельта-функция. Условия (2.1) можно рассматривать как предельный случай вращающегося объема среды пренебрежимо малых размеров. В первом случае вращение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору магнитного поля, а во втором случае — в параллельной. Случай с произвольной ориентацией Ψ_0 относительно \mathbf{B} в силу линейности задачи получается комбинацией этих двух решений, взятых с соответствующими коэффициентами.

Решение системы (1.2) с начальными условиями (2.1) можно построить методом интегральных преобразований, используя преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по всем пространственным переменным. Формулы обращения для искомых функций имеют вид

$$\{R^*, U^*, \Phi^*, \Psi^*\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \left(\iiint_{-\infty}^\infty \{R, U, \Phi, \Psi\} e^{-i(kx+ly+mz)-st} dx dy dz \right) dt$$

$$\{R, U, \Phi, \Psi\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \left(\iiint_{-\infty}^\infty \{R^*, U^*, \Phi^*, \Psi^*\} e^{i(kx+ly+mz)+st} dk dl dm \right) ds$$

где прямая $\text{Re } s = s_0$ проходит правее всех особенностей подынтегрального выражения на комплексной плоскости s . Формулы для трансформант довольно громоздки, а их обратные преобразования Фурье – Лапласа не выражаются через табулированные функции. Тем не менее удержание только главных членов в разложении трансформант в ряду по степеням λt дадут асимптотический вид решения для достаточно малых времен ($\lambda t \ll 1$). Такое решение описывает начальную стадию эволюции вихревых возмущений и возможного возбуждения акустических возмущений. Соответствующие выражения для трансформант имеют в обоих случаях вид (для $\Psi_0 \perp \mathbf{B}$ и $\Psi_0 \parallel \mathbf{B}$)

$$\Phi^* = q(k^2 + l^2), \quad \Psi^* = qm(l - \beta k) \quad (2.2)$$

$$q = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{s(k^2 + l^2 + (1 + \beta^2)m^2)}$$

Трансформанты R^* получаются из (2.2) по формуле

$$R^* = \Phi^* \frac{\lambda \beta}{1 + \beta^2} \frac{k^2 + l^2}{s^2 + a^2(k^2 + l^2 + m^2)}$$

Тогда для главных членов в разложениях искомых функций $\Phi(\mathbf{r}, t)$ и $R(\mathbf{r}, t)$ по степеням λt получим в первом и втором случаях соответственно:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \frac{(1 + \beta^2)(2z^2 - (1 + \beta^2)(x^2 + y^2))}{r_*^5}$$

$$R = \Phi \frac{\lambda \beta}{a^2} + \frac{Q}{4\pi} \frac{\lambda}{a^4} \left[\frac{\beta(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + (1 + \beta^2)z^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta(t - r/a)}{at} + \right.$$

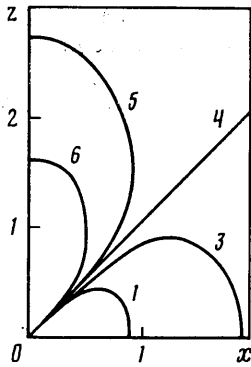
$$\left. + \frac{1 + \beta^2}{\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=r/a} \delta\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1 + \beta^2}{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \eta\left(\frac{r}{a} - t\right) \right],$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \frac{3(1 + \beta^2)z(y - \beta x)}{r_*^5} \quad (2.3)$$

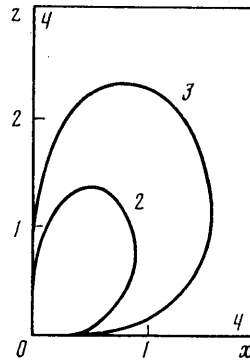
$$R = \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[-\frac{1}{r_*} + \frac{\eta\left(t - \frac{r}{a}\right)}{(1 + \beta^2)r} + w\eta\left(\frac{r}{a} - t\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right) \right\}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_* = \sqrt{(1 + \beta^2)(x^2 + y^2) + z^2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$g = r_*^2 - (\beta at)^2, \quad h = \sqrt{g^2 + (2\beta atz)^2}, \quad w = \sqrt{\frac{(g+h)}{2h^2}}$$

где η — ступенчатая функция Хевисайда.

3. Рассмотрим основные качественные свойства полученных решений (2.3). Вихревые возмущения «мгновенно» создают нелокальное электрическое поле независимо ни от взаимной ориентации векторов Ψ_0 и \mathbf{B} , ни от значения параметра Холла. В отсутствие границ объемный заряд ρ_e' может возникать за счет возмущения ЭДС индукции или компонент тензора проводимости, но в рассматриваемом случае ($\mathbf{j}=0$) возмущения электропроводности и параметра Холла в линейном приближении не влияют на плотность заряда, так что можно записать

$$\rho_e' = -\varepsilon_0 \Delta \Phi' = -\varepsilon_0 \left[\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{V}' + \beta B \left(\frac{\partial V_x'}{\partial x} + \frac{\partial V_y'}{\partial y} \right) - \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} \right] \quad (3.1)$$

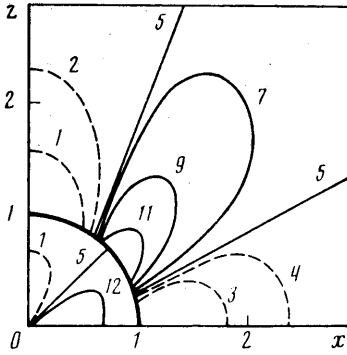
Формула (3.1) получается из уравнения неразрывности для возмущений электрического тока $\operatorname{div} \mathbf{j}'=0$ и линеаризованного закона Ома (1.1).

Для дальнейшего рассмотрения полезно использовать «деформированные» координаты r' : $x'=x$, $y'=y$, $z'=z/\sqrt{1+\beta^2}$. Тогда, записав (3.1) в новых координатах, можно вывести, что если для любого газодинамического возмущения, локализованного в начальный момент времени в области D , интеграл от \mathbf{V}' по области D равен нулю (а в рассматриваемой задаче это так), то мультипольное разложение Φ (в новых координатах) начнется с поля квадрупольного или поля более высокого порядка. В исходных координатах такое разложение нельзя полностью отождествлять со стандартным мультипольным разложением [6], которое получается в предположении, что ρ_e' — заданная функция координат. Это связано с тем, что в МГД-плазме ρ_e' само зависит от электрического поля (последний член в (3.1)).

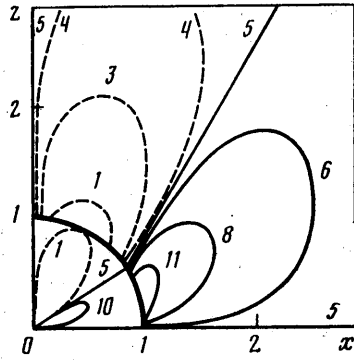
Функцию Φ можно представить в автомоделных координатах \mathbf{r}/at

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi a^3 t^3} \Phi' \left(\frac{\mathbf{r}}{at} \right) \quad (3.2)$$

На фиг. 1 и 2 показаны линии постоянных значений функции Φ' при $\beta=1$ в первом квадранте плоскости $y=0$ для случаев $\Psi_0 \parallel \mathbf{e}_z$ и $\Psi_0 \parallel \mathbf{e}_y$ соответственно. В первом случае функция Φ обладает симметрией относительно оси z и плоскости $z=0$, во втором случае Φ антисимметрична по z , а при $\beta=0$ еще и по y . Видно, что электрическое поле как на фиг. 1, так и на фиг. 2, подобно квадрупольному. Цифрам 1–6 соответствуют значения Φ' , равные -1 ; $-0,5$; $-0,1$; 0 ; $0,2$; 1 .



Фиг. 3



Фиг. 4

Вязкость приводит к распространению вихревого возмущения. В применяемой модели принято, что вязкость отсутствует, и при $\lambda=0$ (нет МГД-взаимодействия) линии тока вихря остаются замороженными в плазме. Дивергенция и ротор амперовой силы $\mathbf{F}=\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ имеют вид [5]

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -\sigma B^2 \left(\frac{\partial V_x'}{\partial x} + \frac{\partial V_y'}{\partial y} \right) - \beta B \frac{\partial j_z'}{\partial z}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = B \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial z} \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что при $\beta=0$ дальное действие проявляется только в мгновенном распространении вихревых возмущений. При этом вектор \mathbf{V}' скорости не имеет составляющей по z , если $\Psi_0 \parallel \mathbf{e}_z$, а если вектор Ψ_0 не параллелен магнитному полю \mathbf{B} , то дополнительно возникнет волна, распространяющаяся со скоростью звука от места инициирования вихревого возмущения.

Особый интерес представляет возбуждение нелокальных акустических возмущений. Такой аспект дальнего действия возможен только при $\beta \neq 0$.

Подобно тому как это было сделано для потенциала электрического поля (3.2), возмущение плотности можно представить в автомодельных координатах \mathbf{r}/at

$$R = \frac{Q\lambda}{4\pi a^5 t^3} R' \left(\frac{\mathbf{r}}{at} \right) \quad (3.4)$$

На фиг. 3 и 4 представлены линии равных значений R' при $\beta=1$ в плоскости $y=0$ для случаев $\Psi_0 \parallel \mathbf{e}_z$ и $\Psi_0 \parallel \mathbf{e}_y$, соответственно. Цифрам 1–12 соответствуют значения R' , равные $-1; -0,2; -0,1; -0,01; 0; 0,01; 0,02; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2$. Сплошной линией показаны области сжатия, пунктирной — разрежения, жирная линия изображает звуковой импульс. Распределение R' имеет мультипольную структуру с чередованием областей сжатия и разрежения. При смене направления вращения в исходном вихре знак R' изменится на противоположный. Кроме того, имеется сингулярность — звуковая волна, отошедшая от начала координат. Эта волна отлична от звуковой волны, инициированной точечным возмущением плотности.

Объяснить полученную структуру возмущений плотности можно, если учесть, что ρ' пропорциональна на больших расстояниях дивергенции амперовой силы. Действительно, из линеаризованных уравнений неразрывности и движения следует:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V}' = - \int_0^t (\operatorname{div} \mathbf{F} - a^2 \nabla \rho') dt \approx - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{F} dt \quad (3.5)$$

Последнее равенство в (3.5) приближенное и выполняется для малых t , так как при $r > at$ разложение по степеням t для ρ' начинается с

квадратичного члена, а для $\operatorname{div} \mathbf{F}$ — с члена первого порядка. Выражение для дивергенции амперовой силы дано формулой (3.3). По аналогичной причине в этой формуле на больших расстояниях второй член много больше первого и возмущения ρ' будут пропорциональны второй производной $\partial^2 \phi' / \partial z^2$, а так как распределение ϕ' подобно потенциалу квадруполья, то ρ' подобно потенциалу мультиполя четвертого порядка. Сингулярность на звуковом фронте объясняется тем, что возмущения ϕ' и \mathbf{j}' , а следовательно, и $\operatorname{div} \mathbf{F}$ имеют сингулярность в начале координат при $t=0$.

В заключение отметим, что с увеличением параметра Холла значения Φ и R достигают максимума и затем стремятся к нулю при $\beta \rightarrow \infty$. Одновременно с этим происходит вытягивание уровней равных значений Φ и R вдоль магнитного поля.

Таким образом, в слабоионизованной плазме начальная локализованная завихренность создает нелокальное возмущение давления, если параметр Холла отличен от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руткевич И. М. Влияние дальнего действия на возбуждение звука в проводящем газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 1. С. 135–143.
2. Руткевич И. М. О спектре газодинамических возмущений и устойчивости сверхзвукового потока плазмы при джоулевом разогреве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 154–162.
3. Глинов А. П., Дрейзин Ю. А. Анализ перегретой неустойчивости в МГД-системах при наличии обратной связи // Теплофизика высоких температур. 1986. Т. 24. № 5. С. 974–979.
4. Виноградова Г. Н., Губарев А. В., Лаптев С. А., Панченко В. П. О динамическом гистерезисе магнитогазодинамических течений в каналах // Теплофизика высоких температур. 1983. Т. 21. № 6. С. 1139–1144.
5. Добрыднев Б. В., Руткевич И. М. Влияние границ на двумерные звуковые импульсы в проводящем газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 118–126.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука. 1973. 504 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.VIII.1988