

УДК 532.595

© 1990 г.

ЖДАН Л. А., САМСОНОВ В. А.

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ВЯЗКИХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРЕ

Рассматривается задача об установившемся плоскопараллельном движении двух несмешивающихся вязких жидкостей в быстро вращающемся цилиндре под действием силового поля малой интенсивности. Случай однородного поля возникает, например, в теории центробежного литья [1], а поле центробежных сил — в динамике роторных систем [2, 3]. Информация, содержащаяся в указанных работах, не позволяет вычислить суммарный момент сил вязкого напряжения на стенках цилиндра.

В настоящей работе методом пограничного слоя определена форма границы раздела, вычислены положение центра масс жидкости и величина тормозящего момента, действующего со стороны жидкости на стенки вращающегося цилиндра.

1. Постановка задачи. Круговой бесконечно длинный цилиндр радиуса R целиком заполнен двумя несмешивающимися вязкими несжимаемыми жидкостями ((ρ_2, μ_2) — соответственно плотность и коэффициент динамической вязкости внутренней жидкости, (ρ_1, μ_1) — параметры внешней жидкости). Цилиндр вращается вокруг своей оси симметрии (OA) с постоянной угловой скоростью ω_0 . (Пусть, например, вращение происходит против часовой стрелки.)

В режиме стационарного вращения цилиндра, когда поле внешних сил отсутствует, обе жидкости и цилиндр вращаются как одно целое. Граница раздела жидкостей в этом случае представляет собой цилиндрическую поверхность радиуса $r=a_1$.

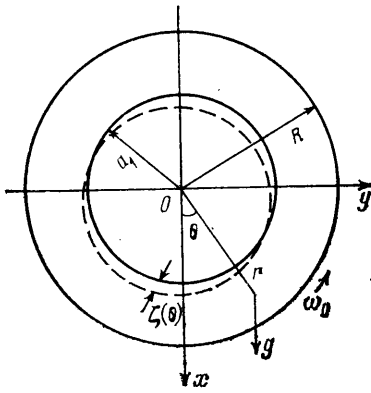
Исследуем возмущение этого движения полем сил малой интенсивности, перпендикулярных оси цилиндра. Будем рассматривать два случая поля: первый — однородное поле тяжести интенсивности g (фиг. 1), второй — поле сил инерции, возникающих при круговой прецессии цилиндра с радиусом прецессии R_1 и угловой скоростью Ω (фиг. 2). Мерой интенсивности дополнительного поля служит отношение E — ускорения поля к центробежной силе: в первой задаче $E=g/\omega_0^2 R$, во второй $E=\Omega^2 R_1/\omega_0^2 R$. Считаем, что $E \ll 1$ вследствие быстрого вращения цилиндра ($\omega_0 \rightarrow \infty$).

Движение жидкостей будем описывать в системе отсчета, где внешние условия стационарны. В случае поля силы тяжести это будет неподвижная система отсчета, связанная с Землей, а для второй задачи — система отсчета, вращающаяся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью Ω .

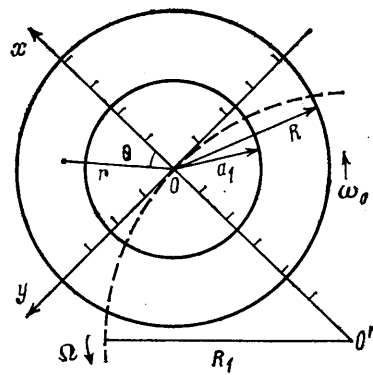
В дальнейшем рассматриваем плоскую задачу об установившемся движении жидкостей в круге радиуса R , который является сечением цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси вращения.

При наличии внешнего силового поля граница раздела жидкостей примет некоторую форму, которую представим в виде $r=a_1+\zeta'(\theta)$, где $\zeta'(\theta)$ — малая величина порядка возмущений, которую надо определить.

Уравнения движения запишем в полярных координатах. Для этого направим полярную ось x по линии центров (OO'). Угол θ будем отсчитывать от положительного направления оси x в сторону против часовой стрелки (см. фиг. 1, 2). Приняв в качестве масштабов величины ρ_1 , ω_0 , R , уравнения в полярных координатах (r, θ) для относительной скорости и



Фиг. 1



Фиг. 2

граничные условия запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial \theta} - 2\omega v_i + u_i \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{v_i}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - \frac{v_i^2}{r} = -\frac{\partial P_i}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \dots \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} + 2\omega u_i + u_i \frac{\partial v_i}{\partial r} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial r} = -\frac{\partial P_i}{r \partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_i} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \dots \right)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial v_i}{r \partial \theta} = 0 \quad (1.2)$$

$$r=1: \quad u_i=0, \quad v_i=0$$

$$r=a:$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} P_2 - P_1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a E \cos \theta + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \zeta a \omega^2 +$$

$$+ \frac{2}{\text{Re}_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) + O(E^2) = 0$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial v_2}{\partial r} - v_2 \right) = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + a \frac{\partial v_1}{\partial r} - v_1 + O(E^2)$$

$$u_i - \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + O(E^2) = 0 \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2$$

$$P_1 = p_1 - \frac{\omega^2 r^2}{2} - E r \cos \theta, \quad P_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} p_2 - \frac{\omega^2 r^2}{2} - E r \cos \theta$$

$$\frac{1}{\text{Re}_i} = \frac{v_i}{\omega_0 R^2}, \quad a = \frac{a_1}{R}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{R}$$

где (u_i, v_i) — радиальная и тангенциальная составляющие относительной скорости, p_i — давление, а индекс i указывает, к какой жидкости относятся величины — внешней ($i=1$) или внутренней ($i=2$).

Кроме того, в уравнения (1.1) входит параметр ω . Для первой задачи $\omega=1$, для второй $\omega=1 \pm E^{1/2}$. (Знак плюс соответствует прямой прецессии, а минус — обратной.)

2. Представление решения в виде рядов по степеням параметра $E^{1/2}$.
Для единообразного представления решения обеих задач разложения будем строить по параметру $E^{1/2}$. Учтем при этом, что для первой задачи коэффициенты при дробных степенях будут отсутствовать. Разложим все члены уравнений и граничных условий в регулярный ряд по параметру

$E^{1/2}$ ($f=f^{(0)}+E^{1/2}f^{(1/2)}+Ef^{(1)}+\dots$, где f — одна из функций $\{u_i, v_i, P_i, \zeta_i, \dots\}$). Тогда в нулевом приближении, а также при $E^{1/2}$ получим нулевое решение (в силу однородных граничных условий), а при E^1 будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - 2v_i &= -\frac{\partial P_i}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \dots \right), \\ \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + 2u_i &= -\frac{\partial P_i}{r \partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_i} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial v_i}{r \partial \theta} &= 0 \\ r=1: u_i=0, v_i=0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} r=a: \frac{\rho_2}{\rho_1} P_2 - P_1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a \cos \theta + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \zeta a + 2\mu^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + a \frac{\partial v_2}{\partial r} - v_2 \right) = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + a \frac{\partial v_1}{\partial r} - v_1 \\ u_i - \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} &= 0, \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс (1), указывающий номер приближения по E , опущен.

Уравнения для следующих приближений по $E^{1/2}$ отличаются от системы (2.1), (2.2) лишь неоднородностью, содержащей линейные и нелинейные комбинации предшествующих приближений.

3. Вычисление невязкого течения. Как отмечалось выше, рассматривается случай $\omega_0 \rightarrow \infty$. Поэтому система (2.1), (2.2) содержит еще малые параметры $1/\text{Re}_i$ при старших производных. Сведем их к одному, считая

$$\mu^2 = \frac{1}{\text{Re}_1}, \quad \frac{1}{\text{Re}_2} = \frac{\mu^2 \mu_2 \rho_1}{\rho_2 \mu_1}$$

Применим к этой системе метод пограничного слоя [4-7].

Полагая в (2.1) $\mu=0$, получим уравнения для определения невязкого течения

$$\frac{\partial u_i}{\partial \theta} - 2v_i = -\frac{\partial P_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + 2u_i = -\frac{\partial P_i}{r \partial \theta}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial v_i}{r \partial \theta} = 0 \quad (3.1)$$

Граничные условия примем такими, которые соответствуют условиям идеальной жидкости

$$\begin{aligned} r=1: u_i=0; \quad r=a: u_i - \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} P_2 - P_1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a \cos \theta + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \zeta a &= 0 \\ u_1 &= u_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Течение, удовлетворяющее (3.1), (3.2), ищем в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей.

Для потенциала φ_i ($u_i = \partial \varphi_i / \partial r$, $v_i = \partial \varphi_i / r \partial \theta$), исключая из граничных условий (3.2) $\partial \zeta / \partial \theta$ и пользуясь выражением для $\partial P_i / \partial \theta$ из (3.1), получим следующую краевую задачу:

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}(1, \theta) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2}(a, \theta) = - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{\sin \theta}{a}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(a, \theta) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(a, \theta)$$

Применяя для решения этой задачи метод разделения переменных, получим для φ_1 и φ_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_4(r+r^{-1}) \sin \theta + C_1 \theta + C_2 \\ \varphi_2 &= C_6 r \sin \theta + C_3, \quad C_4 = - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{a^2}{2}, \quad C_6 = C_4(1-a^{-2}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Вихревая составляющая скорости, удовлетворяющая (3.1), (3.2), будет иметь вид $\{0, f_i(r)\}$, где $f_i(r)$ — произвольная функция.

Для системы уравнений (2.1) в соответствии с [8] имеем

$$f_1(r) = C_7 r + C_8 r^{-1}, \quad f_2(r) = C_5 r \quad (3.5)$$

где C_7, C_8, C_5 — неизвестные постоянные.

Из (3.4), (3.5) для полного внутреннего течения получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= C_4(1-r^{-2}) \sin \theta, \quad v_1 = C_4(1+r^{-2}) \cos \theta + C_7 r + C_8 r^{-1} \\ u_2 &= C_4(1-a^{-2}) \sin \theta, \quad v_2 = C_4(1+a^{-2}) \cos \theta + C_5 r \\ C_9 &= C_1 + C_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Воспользовавшись теперь вторым условием (3.2) и выражением для u_1 из (3.6), найдем ζ и r

$$\begin{aligned} \zeta &= -C_4(1-a^{-2}) \cos \theta \\ r &= a + E \zeta(\theta) = a + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{E a^2}{2} (1-a^{-2}) \cos \theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формула (3.7) для случая $\rho_2=0$, т. е. когда полость частично заполнена жидкостью, приведена в [1].

Нетрудно показать, что постоянные C_5, C_7, C_8 , входящие в (3.6), в первом приближении по E равны нулю.

4. Вычисление пограничных функций. Найденное выше течение (3.6) удовлетворяет уравнениям движения (2.1), но не удовлетворяет всем граничным условиям (2.2). Для того чтобы обеспечить выполнение условий прилипания на твердой стенке и равенства касательных скоростей и касательных напряжений на границе раздела, построим пограничные функции. В дальнейшем пограничные функции для скорости и давления в окрестности твердой стенки будем обозначать u^T, v^T, p^T , а вблизи границы раздела — соответственно u^P, v^P, p^P .

Сделаем замену переменных в (2.1), (2.2)

$$\tau = (1-r)/\mu, \quad u_\tau^T = u_1^T/\mu$$

Приравнивая в полученных таким образом уравнениях и граничных условиях члены при одинаковых степенях μ и пользуясь (3.6), для пограничных функций в окрестности твердой стенки будем иметь

$$\frac{\partial p_1^T}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial v_1^T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v_1^T}{\partial \tau^2} \quad (4.1)$$

$$v_1^T(0, \theta) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a^2 \cos \theta$$

при $\tau \rightarrow \infty$: $v_1^T \rightarrow 0, p_1^T \rightarrow 0$.

Из (4.1) следует, что $p_1^T = 0$, а для v_1^T с помощью метода разделения переменных получим

$$v_1^T(\tau, \theta) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a^2 \cos \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \theta \right) \exp \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.2)$$

Составляющая u^r находится из уравнения неразрывности

$$u_r^r = - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a^2 \cos \left(- \frac{\tau}{\sqrt{2}} + \theta + \frac{\pi}{4} \right) \exp \left(- \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.3)$$

Аналогично для пограничных функций вблизи границы раздела жидкостей с внешней и внутренней стороны заменой переменных из уравнений (2.1) и граничных условий (2.2) получаем с учетом (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1^p}{\partial \tau_1} &= 0, & \frac{\partial p_2^p}{\partial \tau_2} &= 0, \\ \frac{\partial v_1^p}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 v_1^p}{\partial \tau_1^2}, & \frac{\partial v_2^p}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 v_2^p}{\partial \tau_2^2}, \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial v_2^p}{\partial \tau_1}(0, \theta) &= \frac{\partial v_1^p}{\partial \tau_1}(0, \theta) \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{(r-a)}{\mu}, \quad \tau_2 = \beta \frac{a-r}{\mu}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho_2 \mu_1}{\rho_1 \mu_2}} \quad (4.4)$$

$$\tau_1 \rightarrow \infty: v_1^p \rightarrow 0, \quad p_1^p \rightarrow 0, \quad \tau_2 \rightarrow \infty: v_2^p \rightarrow 0, \quad p_2^p \rightarrow 0$$

Радиальные составляющие u_1^p , u_2^p определяются из уравнений неразрывности и условий затухания течения вглубь соответствующей жидкости.

Приведем здесь лишь окончательный результат для пограничных функций (в переменных (r, θ))

$$\begin{aligned} u_1^p &= - \frac{2\mu C_4 \alpha}{a^3(1+\alpha)} \cos \left(\frac{r-a}{\sqrt{2}\mu} - \theta - \frac{\pi}{4} \right) \exp \left(- \frac{r-a}{\sqrt{2}\mu} \right) \\ v_1^p &= - \frac{2C_4 \alpha}{a^2(1+\alpha)} \cos \left(\frac{r-a}{\sqrt{2}\mu} - \theta \right) \exp \left(- \frac{r-a}{\sqrt{2}\mu} \right) \\ u_2^p &= \frac{2\mu C_4}{a^3 \beta (1+\alpha)} \sin \left(\beta \frac{(r-a)}{\sqrt{2}\mu} + \theta - \frac{\pi}{4} \right) \exp \left(\beta \frac{r-a}{\sqrt{2}\mu} \right) \\ v_2^p &= \frac{2C_4}{a^2(1+\alpha)} \cos \left(\beta \frac{(r-a)}{\sqrt{2}\mu} + \theta \right) \exp \left(\beta \frac{r-a}{\sqrt{2}\mu} \right) \\ p_1^p &= 0, \quad p_2^p = 0, \quad \alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1} \beta \end{aligned} \quad (4.5)$$

Достаточно подставить (4.5) в (4.4), чтобы убедиться, что выражения для (u_i^p, v_i^p) , p_i^p из (4.5) являются решением исходной системы.

5. Уточнение формы границы раздела. Нулевое приближение по μ невязкой задачи (3.6) и пограничные функции (4.5) удовлетворяют уравнениям движения (2.1) и граничным условиям (2.2) с точностью до членов порядка μ . Для того чтобы построить решение, удовлетворяющее уравнениям движения с точностью до μ^2 , учтем в (2.1) члены порядка μ . Тогда для потенциальной составляющей Φ_i^{**} невязкого течения из (2.1), (2.2) получим уравнение $\Delta \Phi_i^{**} = 0$ и граничные условия

$$\begin{aligned} r=1: \quad \frac{\partial \Phi_1^{**}}{\partial r} &= - \frac{u_1^r}{\mu} \\ r=a: \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} P_2^{**} - P_1^{**} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a \zeta^{**} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_1^{**}}{\partial r} + \frac{u_1^p}{\mu} &= \frac{\partial \zeta^{**}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi_1^{**}}{\partial r} + \frac{u_1^p}{\mu} = \frac{\partial \Phi_2^{**}}{\partial r} + \frac{u_2^p}{\mu} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Исключая из последней системы $\partial \zeta^{**}/\partial \theta$ и учитывая выражения для $\partial P_i^{**}/\partial \theta$ (из уравнений движения, аналогичных (3.1)) и u_i^T, u_i^P из (4.3), (4.5), придем к граничным условиям для φ_1^{**}

$$\frac{\partial \varphi_1^{**}}{\partial r}(1, \theta) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a^2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{\partial^2 \varphi_1^{**}}{\partial r^2}(a, \theta) = 0 \quad (5.2)$$

Из уравнения Лапласа для φ_1^{**} и граничных условий (5.2) следует, что φ_1^{**} имеет вид

$$\varphi_1^{**} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) a^2 r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.3)$$

С учетом (5.3) из третьего условия (5.1) получим

$$\zeta^{(1)} = a^{-1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) d \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right), \quad d = a^3 + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (5.4)$$

Уравнение границы раздела с учетом нулевого и первого приближения по μ примет вид

$$r = a + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{E a^2}{2} (1 - a^{-2}) \cos \theta + \mu E \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) d \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.5)$$

6. Определение гидродинамического момента. Из уравнения энергии следует, что вращающий момент будет величиной второго порядка малости относительно E [1].

Определим гидродинамический момент другим способом, пользуясь уравнением для изменения момента количества движения системы относительно оси вращения, для чего достаточно знать лишь первое приближение по E . Жидкость совершает стационарное движение, следовательно, момент ее количества движения сохраняется, т. е. $-L + M = 0$, где L — момент силы трения между жидкостью и стенками цилиндра (гидродинамический момент), M — момент внешних сил (либо силы тяжести — для первой задачи, либо центробежной силы — для второй).

Следует отметить, что во второй задаче в L войдет также момент L_k — кориолисовой силы. Легко показать, что $L_k \sim \mu E^{5/2}$, в то время как момент центробежной силы M , как будет показано ниже, имеет порядок малости μE^2 .

Введем прямоугольную систему координат, дополнив ось x ортогональной ей осью y . Тогда для первой задачи, как легко видеть

$$M = -E \pi \left(1 - a^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} a^2 \right) y_0, \quad E = \frac{g}{\omega_0^2 R} \quad (6.1)$$

где y_0 — координата центра тяжести жидкости.

Во второй задаче необходимо подсчитать момент центробежных сил инерции переносного движения. Поскольку поле центробежной силы зависит от радиуса-вектора точки, то его можно представить в виде суммы однородного поля интенсивности $\Omega^2 R_1$ и центрального, интенсивность которого равна $\Omega^2 r$, с центром в точке O . Центральная сила, очевидно, не создает момента относительно этой точки. В то же время вклад в величину момента, вносимый однородной составляющей поля, определяется формулой (6.1), в которой необходимо положить $E = \Omega^2 R_1 / \omega_0^2 R$.

Определив с помощью (5.5) координату y_0 , для гидродинамического момента L получаем (в старшем ненулевом приближении)

$$L = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mu E^2 \pi a \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)^2 d \quad (6.2)$$

7. Второй способ вычисления гидродинамического момента L . Вычисляя момент L непосредственно через касательные напряжения на твердой стенке по формуле

$$-L = \int_0^{2\pi} (p_{nr} r^2) |_{r=1} d\theta = \mu^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) \Big|_{r=1} d\theta \quad (7.1)$$

находим, что $L=0$ в первом приближении по E , так как в этом приближении течение не имеет составляющей, зависящей только от r . Такой результат был получен и в работе [2].

Составляющие скорости порядка $E^{3/2}$ также не дают вклада в момент L .

Следовательно, для вычисления L через касательные напряжения на твердой стенке надо знать вторичное течение, т. е. необходимо учесть в уравнениях Навье — Стокса (2.1) члены порядка малости E^2 . При этом интересна лишь та часть течения, которая зависит только от r и не зависит от θ (своего рода «среднее вторичное течение», характеризующее отставание вращения жидкости от вращения тела).

Таким образом, вычисление момента вязких напряжений с использованием стационарной конфигурации жидкости оказывается более экономным. Тем не менее представляет интерес вычисление L через вторичное течение хотя бы для частного случая одной жидкости. С одной стороны, при этом достаточно приведенных выше формул первого приближения (случай двух жидкостей требует дополнительных вычислений). С другой стороны, необходимо убедиться в том, что вторичное течение не вносит никаких дополнений в формулу (6.2).

Для пограничных функций $v^{(2)}$ (нулевого приближения по μ и второго по E) вблизи твердой стенки имеем аналогично (4.1) уравнение

$$\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \theta} + f^1(\tau, \theta) = \frac{\partial^2 v_1^{(2)}}{\partial \tau^2}, \quad f^1(\tau, \theta) = f_1^1(\tau) + f_2^1(\tau, \theta) \quad (7.2)$$

$$f_1^1(\tau) = -\frac{a^4}{2} \left(\tau \cos \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \exp \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) + \exp(-\sqrt{2}\tau) - \cos \frac{\tau}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ \left(\tau = \frac{1-r}{\mu} \right)$$

Для составляющей $v_1^{(2)}$, не зависящей от θ , будем иметь

$$\frac{d^{(2)} v_1^{(2)}}{d\tau^2} = f_1^1(\tau) \quad (7.3)$$

Откуда

$$\frac{d v_1^{(2)}}{d\tau} = -\frac{a^4}{2} \left[-\frac{\tau}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + 1 \right) \sin \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \sin \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp \left(-\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} a^4 \exp(-\sqrt{2}\tau) \quad (7.4)$$

Из (7.4) при $\tau=0$ получим

$$\frac{d v_1^{(2)}}{d\tau} = -\frac{a^4}{2} \sin \frac{\pi}{4} \quad (7.5)$$

С помощью выражения (7.5) из формулы (7.1) имеем

$$-L = \mu E^2 \pi a^4 / \sqrt{2}$$

что совпадает со значением момента, вычисленного первым способом.

Для задачи с двумя жидкостями пограничные функции на границе раздела жидкостей будут иметь такой же порядок малости, как и на твердой стенке (на свободной поверхности они на порядок меньше, чем на твердой границе). Поэтому здесь задача вычисления гидродинамического момента сложнее и требует вычисления высших приближений по μ (при E^1). На этом пути авторам не удалось добиться стыковки результатов.

В заключение отметим, что формула (6.4) определяет величину момента сил вязкости, действующих на поверхность цилиндра единичной длины. При переходе к размерным величинам в расчете на цилиндр длины l необходимо дополнительно домножить L на $\rho_1 \omega_0^2 R^4 l$. В итоге получим

$$L = - \frac{\sqrt{\nu} \lambda}{\sqrt{2} \omega_0^5}, \quad \lambda = \pi a_1 \rho_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)^2 \left[\frac{a_1^3}{R^3} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right] \kappa^2$$

Здесь $\kappa = g$ — для первой задачи и $\kappa = \Omega^2 R_1$ — для второй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепиного М. М. К гидродинамической теории центробежного литья // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 3. С. 92–105.
2. Дерендяев Н. В., Сандалов В. М. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578–586.
3. Дерендяев Н. В., Семяткин В. А. Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной несжимаемой жидкостью // ПМТФ. 1984. № 1. С. 34–44.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.
5. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
6. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. // Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
7. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
8. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. № 2. P. 177–190.

Москва

Поступила в редакцию
23.IX.1988