

УДК 532.516.013.4:517.958

© 1990 г.

СКОБЕЛЕВ Б. Ю.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В настоящее время существует довольно много различных подходов к исследованию нелинейного развития гидродинамических возмущений. В основе этих подходов лежат методы теории возмущений. Решения уравнений Навье-Стокса ищутся в виде формальных рядов по амплитуде возмущения, и, как правило, рассматривается лишь первый нелинейный член разложения. Отсутствие достаточно детальных экспериментов и тот факт, что иногда разные методы дают противоречивые результаты [1], вызывают необходимость обсуждения математической обоснованности этих методов. С другой стороны, в нелинейной теории гидродинамической устойчивости исследуются решения специального вида, поэтому желательно знать, в какой степени поведение этих решений отражает поведение произвольных возмущений. Наряду с теорией гидродинамической устойчивости интенсивно развивается математически строгая теория бифуркаций уравнений Навье-Стокса. В теории бифуркаций исследованы условия, при которых уравнения Навье-Стокса помимо исходного «ламинарного» решения имеют другие стационарные или периодические решения. Развита метод нахождения новых решений в виде сходящихся рядов.

В данной работе излагается новый подход к исследованию нелинейного развития возмущений, основанный на теории инвариантных многообразий. Предлагается метод получения проекций уравнений Навье-Стокса на конечномерные инвариантные многообразия. В итоге поведение возмущений описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями в виде степенных рядов по амплитудам. Существенная особенность метода состоит в том, что эти ряды являются сходящимися. Проведен численный расчет двумерной инвариантной проекции для плоского течения Пуазейля. В результате удалось выяснить характер смены докритической бифуркации на закритическую и исследовать новые бифуркации периодических режимов течения.

1. Постановка задачи. Предположим, что уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в некоторой области Ω с границей $\partial\Omega$ имеют стационарное решение $(v_0(x), p_0(x))$. Положим, $v(x, t) = v_0(x) + u(x, t)$, $p(x, t) = p_0(x) + q(x, t)$. Для возмущений скорости $u(x, t)$ и давления $q(x, t)$ получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) v_0 + (u \cdot \nabla) u = -\nabla q + \frac{1}{R} \Delta u \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

В общем случае область Ω может быть неограниченной, а нулевые граничные условия на части границы могут быть заменены на периодические, что имеет место для плоскопараллельных течений.

Первым шагом при построении любой нелинейной теории устойчивости является исследование линеаризованной системы (1.1). Ясно, что линеаризованная система имеет решения вида $u(x, t) = e^{\sigma t} \varphi(x)$, $q(x, t) = e^{\sigma t} q'(x)$. Поэтому задача сводится к спектральной задаче для определения собственных значений σ

$$\sigma \varphi = - (v_0 \cdot \nabla) \varphi - (\varphi \cdot \nabla) v_0 - \frac{1}{R} \Delta \varphi - \nabla q, \quad \operatorname{div} \varphi = 0; \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.2)$$

Для плоскопараллельных течений $v_0(x) = (U_0(y), 0, 0)$, $x = (x, y, z)$. Функцию тока возмущений можно представить в виде $\varphi(x, y, t) =$

$=f(y)e^{i\alpha(x-ct)}$, и система (1.2) сводится к известному уравнению Орра – Зоммерфельда

$$i\alpha \left[(U_0 - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) - U_0'' \right] f - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 f = 0 \quad (1.3)$$

$$f(y) = f'(y) = 0, \quad y = y_1, \quad y = y_2; \quad -i\alpha c = \omega$$

В задаче появляется дополнительный параметр α – волновое число возмущения. В плоскости (R, α) области устойчивости и неустойчивости течения разделяются нейтральной кривой $\text{Im } c(R, \alpha) = \text{Re } \sigma(R, \alpha) = 0$. Нейтральная кривая играет важную роль в нелинейной теории, так как область применимости методов этой теории определяется значением величины $|\text{Re } \sigma|$.

Возмущение скорости в задаче о линейной устойчивости можно представить в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A(t) \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = e^{i\theta(t)} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) + e^{-i\theta(t)} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega; \quad \gamma = \text{Re } \sigma, \quad \omega = \text{Im } \sigma \quad (1.5)$$

Естественно предположить, что учет нелинейных эффектов приведет к появлению нелинейных по амплитуде членов в формулах (1.4), (1.5). Действительно, решения, получаемые различными методами нелинейной теории, можно представить в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A(t) \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) + \sum_{n=2}^{\infty} A^n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, \theta(t)) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, \theta + 2\pi) = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\frac{dA}{dt} = A \left(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} b_n A^n \right), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} c_n A^n \quad (1.7)$$

В некоторых работах рассматриваются более общие выражения.

Например, амплитуда и фаза могут слабо зависеть от пространственных координат, как это имеет место в задаче о нелинейном развитии волнового пакета [2], или же рассматриваются возмущения, зависящие от нескольких амплитуд и фаз (задача о резонансном взаимодействии волн [3]). Однако для анализа точности методов (относительно учета нелинейных эффектов) эти обобщения несущественны.

Полный учет влияния нелинейных членов в амплитудном уравнении был проведен в [4]. В результате была получена в явном виде зависимость амплитуды возмущения от времени. Исследование области применимости этого решения [5] показало, что нормы коэффициентов разложения \mathbf{u}_n в формуле (1.6) имеют оценку $\|\mathbf{u}_n\| \sim 1/(n-1)\gamma^{n-1}$.

Из этой оценки следует, что метод работы [4] применим при числах Рейнольдса, лежащих вне некоторой окрестности нейтральной кривой. Развитие возмущений при близких к нейтральным значениях числа Рейнольдса рассматривалось в [6, 7]. Были найдены первые отличные от нуля нелинейные коэффициенты b_2 и c_2 в формулах (1.7). Коэффициенты b_2, c_2 определялись лишь с точностью до величины порядка γ , а последующие коэффициенты b_n, c_n оставались неопределенными. В дальнейшем этот подход получил название слабонелинейной теории. Как показано в работе [8], указанный метод дает асимптотическое приближение решений уравнений Навье-Стокса с точностью до величины $O(\gamma)$. В [9] был предложен асимптотический метод, позволяющий однозначно определять коэффициенты b_n и c_n при любом n . При построении решений вида (1.6), (1.7) использовалось дополнительное разложение искомых величин по малому параметру $\delta = 1/R_0 - 1/R \sim \gamma$, где R_0 – линейное нейтральное значение R . Метод работы [9] дает асимптотические приближения решений уравнений Навье-Стокса любого порядка по амплитуде A и параметру δ .

Основное различие между нелинейной теорией устойчивости и теорией бифуркаций содержится в постановке задачи. В теории бифуркаций ищутся новые стационарные или периодические режимы, отличные от ис-

ходного ламинарного течения. Тем самым для возмущений ставится краевая задача в отличие от начально-краевой в теории устойчивости. Возмущение скорости имеет вид (1.6), где $A \equiv \varepsilon = \text{const}$, $\theta(t) = \omega_H t$ [10]. Роль дифференциальных уравнений (1.7) играют алгебраические уравнения, определяющие нелинейную частоту ω_H и амплитуду ε :

$$\omega_H = \omega + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \omega_n, \quad \delta = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \delta_n \quad (1.8)$$

Ряды в формулах (1.6), (1.8) имеют ненулевой радиус сходимости. Закритическая бифуркация ($\delta_1 > 0$) соответствует закритической устойчивости ($b_2 < 0$) в нелинейной теории устойчивости. При этом нарастающие возмущения стремятся к устойчивому решению теории бифуркаций. В случае докритической бифуркации ($\delta_1 < 0$) имеет место докритическая неустойчивость ($b_2 > 0$). Но теперь амплитуда неустойчивого решения теории бифуркаций определяет пороговое значение для начальной амплитуды в нелинейной теории устойчивости.

2. Метод инвариантной проекции. В нелинейной теории устойчивости рассматриваются решения специального вида. Вопрос о поведении возмущений произвольной формы исследовался в [11]. Там же был предложен новый метод изучения нелинейного развития возмущений, основанный на теории инвариантных многообразий. Понятие притягивающего инвариантного многообразия (точнее, локально притягивающего и локально инвариантного) широко используется в теории бифуркаций [12]. Поскольку строгое изложение результатов работы [11] требует привлечения сложного математического аппарата, ниже приводится упрощенное описание основных выводов.

Уравнения для возмущений (1.1) вместе с граничными условиями можно записать в виде эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве H :

$$\frac{du}{dt} = -Lu + B(u), \quad u \in H \quad (2.1)$$

где L — оператор линейной теории устойчивости, а $B(u)$ — нелинейный оператор. В типичной для гидродинамических задач ситуации спектр σ оператора $(-L)$ можно разбить на две части: $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(1)}$ состоит из n пар комплексно-сопряженных собственных значений ($\sigma_i, \bar{\sigma}_i$), а $\sigma^{(2)}$ содержит лишь затухающую часть σ ($\text{Re } \zeta < 0, \zeta \in \sigma^{(2)}$). Кроме того, существует ненулевой «зазор» между $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$, т. е.

$$\max_{\zeta \in \sigma^{(2)}} \text{Re } \zeta < \min_{\zeta \in \sigma^{(1)}} \text{Re } \zeta$$

Уравнение (2.1) эквивалентно системе двух уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{du_{2n}}{dt} &= -P_{2n} L u_{2n} + P_{2n} B(u_{2n} + u_{\perp}) \\ \frac{du_{\perp}}{dt} &= -P_{\perp} L u_{\perp} + P_{\perp} B(u_{2n} + u_{\perp}), \quad u = u_{2n} + u_{\perp} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь u_{2n} — линейная комбинация $2n$ собственных функций оператора $(-L)$, отвечающих спектру $\sigma^{(1)}$, а u_{\perp} — ортогональное дополнение к u_{2n} . P_{2n} и P_{\perp} — соответствующие проекторы в гильбертовом пространстве H . В отличие от метода Галеркина, u_{\perp} не полагается равной нулю, а ищется в виде функции от u_{2n} : $u_{\perp} = z(u_{2n})$. Функция $z(u_{2n})$ определяет инвариантное многообразие m_{2n} уравнения (2.1). Инвариантность означает, что решения с начальными условиями из m_{2n} с течением времени не покидают m_{2n} . Многообразие m_{2n} является локально притягивающим, т. е. реше-

ния с произвольными начальными данными из некоторой окрестности m_{2n} при $t \rightarrow \infty$ стремятся к решениям, лежащим на инвариантном многообразии m_{2n} . Поэтому все существенные особенности решений уравнения (2.1) описываются решениями, принадлежащими m_{2n} .

Решение уравнения (2.1) на m_{2n} представляется в виде

$$u = \sum_{i=1}^n 2 \operatorname{Re} [(r_i e^{i\theta_i} + p_i(r_1, \dots, r_n, \theta_1, \dots, \theta_n)) \varphi_i] + z(r_1, \dots, r_n, \theta_1, \dots, \theta_n) \quad (2.3)$$

Зависимость координат r_i, θ_i от времени определяется проекцией уравнения (2.1) на m_{2n} :

$$\frac{dr_i}{dt} = (\gamma_i + b^{(i)}(r, \theta)) r_i, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + c^{(i)}(r, \theta), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Для нахождения функций $b^{(i)}, c^{(i)}$ вводится вспомогательное многообразие m_{2n}^* :

$$u = \sum_{i=1}^n 2 \operatorname{Re} (r_i e^{i\theta_i} \varphi_i) + g^*(r, \theta), \quad u \in m_{2n}^*$$

Функции $g^*, b^{(i)}, c^{(i)}$ являются 2π -периодическими по координатам θ_i и аналитическими по r_i . Поэтому

$$g^* = \sum_{|S|=2}^{\infty} g_S r^S, \quad r^S = r_1^{s_1} r_2^{s_2} \dots r_n^{s_n}, \quad |S| = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

$$b^{(i)} = \sum_{|S|=1}^{\infty} b_S^{(i)} r^S, \quad c^{(i)} = \sum_{|S|=1}^{\infty} c_S^{(i)} r^S$$

Функции g_S удовлетворяют рекуррентной системе линейных уравнений и условиям ортогональности

$$\omega_i \frac{\partial g_S}{\partial \theta_i} + L g_S = - \sum_{i=1}^n 2 \operatorname{Re} [(b_{S_i}^{(i)} + i c_{S_i}^{(i)}) e^{i\theta_i} \varphi_i] - \sum_{K+P=S} c_K^{(i)} \frac{\partial g_P}{\partial \theta_i} + B_S \quad (2.5)$$

$$B = \sum_{|S|=2}^{\infty} B_S r^S, \quad S_i = (s_1, \dots, s_{i-1}, \dots, s_n); \quad \omega_i > 0$$

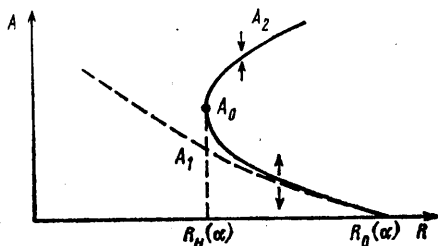
$$\int_0^{2\pi} e^{-i\theta_i} (g_S, \varphi_i^*)_{\mathbb{H}} d\theta_i = 0$$

которые однозначно определяют функции

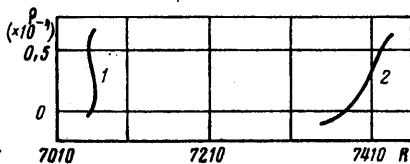
$$b_{S_i}^{(i)}(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n),$$

$$c_{S_i}(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$$

$$b_{S_i}^{(i)} + i c_{S_i}^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta_i} \left(B_S - \sum_{K+P=S} c_K^{(i)} \frac{\partial g_P}{\partial \theta_i}, \varphi_i^* \right)_{\mathbb{H}} d\theta_i$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь φ_i^* — собственные функции сопряженного к $(-L)$ оператора. Многообразие m_{2n}^* содержит предельные траектории уравнения (2.1). В частности, периодические решения принадлежат m_{2n}^* .

В методах нелинейной теории устойчивости [6, 7, 9], рассмотренных в п. 1, фактически, находилась проекция уравнения Навье-Стокса на двумерное инвариантное многообразие. Причем для построения проекции (уравнений для амплитуды и фазы) использовалось уравнение для инвариантного многообразия m_2 . Поэтому удалось получить лишь асимптотическую проекцию. Существенное отличие данного метода состоит в том, что благодаря введению предельного многообразия m_{2n}^* удается получить аналитическую проекцию: правые части уравнений (2.4) имеют вид сходящихся рядов по степеням r_i .

3. Результаты исследования плоского течения Пуазейля. Течение в плоском канале — удобный объект для сравнения различных методов ввиду простоты теоретического анализа. Численные расчеты по методу Стюарта — Ватсона [13] показали, что в окрестности носика нейтральной кривой ($\alpha=1$) имеет место докритическая неустойчивость. Качественный график пороговой амплитуды A_1 приведен на фиг. 1 (штриховая линия). Эти результаты получили подтверждение в расчетах по методу теории бифуркаций [14]. При этом выяснилось, что при меньших значениях α ($\alpha < 0,9$) докритическая бифуркация сменяется закритической. В работах [13, 14] рассматривался лишь первый нелинейный член амплитудных уравнений. Численное исследование сильно нелинейных эффектов проводилось в [5, 15]. В уравнениях (1.7) учитывались члены четвертого порядка по амплитуде. Оказалось, что в области докритической неустойчивости нарастающие возмущения стабилизируются, образуя устойчивый периодический режим с амплитудой A_2 . Докритическая неустойчивость исчезает при нелинейном критическом значении числа Рейнольдса R_H (фиг. 1). При меньших значениях R нелинейные возмущения затухают, что подтверждают выводы работы [4].

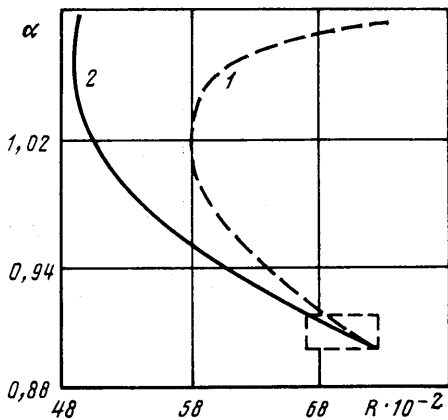
Рассмотрим двумерную инвариантную проекцию для плоского течения Пуазейля. В качестве $\sigma^{(1)}$ возьмем первое собственное значение задачи Орра — Зоммерфельда вместе с его комплексным сопряжением: $\sigma^{(1)} = (\gamma + i\omega, \gamma - i\omega)$. Инвариантная проекция имеет вид системы двух уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = (\gamma + b(r))r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega + c(r) \quad (3.1)$$

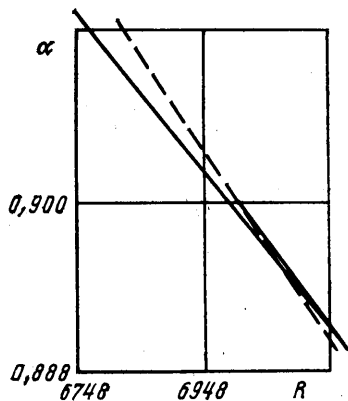
В данном случае

$$b(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^n, \quad c(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n, \quad \rho = r^2 \quad (3.2)$$

Коэффициенты b_n, c_n определяются рекуррентной системой вида (2.5), полученной из уравнения для функции тока возмущения. (Коэффициенты b_n, c_n в формуле (3.2) соответствуют коэффициентам b_{2n}, c_{2n} формулы



Фиг. 3



Фиг. 4

(2.5.) Амплитуды периодических решений (предельных циклов) определяются условием

$$\gamma + b(r) = 0 \quad (3.3)$$

Роль амплитуды играет координата r . В данной работе проводилось численное решение приближенных уравнений

$$\gamma(R, \alpha) + \sum_{n=1}^N b_n(R, \alpha) \rho^n = 0, \quad N \leq 5 \quad (3.4)$$

Оказалось, что в соответствии с поведением решений уравнений (3.4) можно выделить четыре области значений α : $I_1 = (\alpha; \alpha \geq 0,98)$, $I_2 = (\alpha; 0,92 < \alpha < 0,98)$, $I_3 = (\alpha; 0,9 < \alpha \leq 0,92)$, $I_4 = (\alpha; \alpha \leq 0,9)$. В области I_1 нечетные приближения (3.4) имеют одно решение (пунктирная линия на фиг. 1), а четные — два (сплошная линия на фиг. 1). В области I_3 нечетные и четные приближения меняются местами, а область I_2 — переходная: два решения могут иметь как четные, так и нечетные приближения. Для выяснения правильной картины поведения решений уравнения (3.3) в области I_1 рассмотрим окрестность точки слияния двух решений (окрестность точки A_0 на фиг. 1). Левая часть уравнения (3.3) является двухпараметрическим семейством функций $F(\rho; R, \alpha)$, которое можно представить в виде $F = \gamma + y_1(\rho) - y_2(\rho)$, где гладкие функции y_1, y_2 в области сходимости ряда (3.2) имеют вид

$$y_1 = \sum_{k=1}^{K_1} b_{1k}^+ \rho^{ik}, \quad y_2 = \sum_{k=1}^{K_2} |b_{2k}^-| \rho^{jk}$$

Здесь b_{ik}^+ — положительные коэффициенты, а b_{jk}^- — отрицательные (численные расчеты показали, что b_1, b_3, b_5 — положительны, а γ, b_2, b_4 — отрицательны). Применяя методы теории катастроф [16], можно показать, что $F(\rho; R, \alpha)$ является версальной 2-деформацией 2-определенной функции $y_2(\rho)$. Поэтому многообразие нулей семейства $F(\rho; R, \alpha)$ имеет особенность типа складки и правильное описание дают четные приближения (3.4) ($N=2,4$). Аналогичный анализ показывает, что и в областях I_2, I_3 уравнение (3.3) имеет два решения, соответствующих неустойчивому и устойчивому периодическим режимам течения. Переход из области I_3 в I_4 сопровождается сменой знака у коэффициента b_1 . Это приводит к смене докритической бифуркации на закритическую. Оказалось, что в точке $\gamma(R, \alpha) = b_1(R, \alpha) = 0$ вторая складка амплитудной поверхности выходит в область положительных значений ρ и у уравнения (3.3) появляется

третье решение (кривая 1 на фиг. 2: $\alpha=0,895$). Поэтому в I_4 существуют три периодических режима: устойчивый, неустойчивый, устойчивый (в порядке возрастания амплитуды). С уменьшением α складки сближаются и сливаются в точке сборки при $\alpha=0,89$. При меньших α существует один устойчивый периодический режим течения (кривая 2 на фиг. 2: $\alpha=0,88$).

График кривой складок, которая играет роль нелинейной нейтральной кривой, приведен на фиг. 3 (кривая 2). Выделенная область в увеличенном масштабе представлена на фиг. 4. Результаты расчетов, проведенных при разных N , достаточно хорошо совпадают. Например, для $\alpha=1,04$ и $N=2$ $R_H=4980$, а при $N=4$ $R_H=4900$.

Автор благодарит А. Жарилкасинова за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davey A. On Iton's finite amplitude stability theory for pipe flow // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. № 4. P. 695-703.
2. Stewartson K., Stuart J. T. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1971. V. 8. № 3. P. 529-545.
3. Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary layers // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. № 2. P. 393-413.
4. Струминский В. В. К нелинейной теории развития аэродинамических возмущений // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 3. С. 547-550.
5. Струминский В. В., Скобелев Б. Ю. Нелинейная нейтральная кривая для течения Пуазейля // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. С. 566-570.
6. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Pt 1 // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. № 3. P. 353-370.
7. Watson J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. № 3. P. 371-383.
8. Iooss G. Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements visqueux incompressibles // Rech. Aérospat. 1970. № 134. P. 7-14.
9. Скобелев Б. Ю., Струминский В. В. Нелинейное развитие возмущений в двумерных ламинарных потоках // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 802-806.
10. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ. 1971. Т. 35. № 4. С. 638-655.
11. Скобелев Б. Ю. Аналитическая проекция нелинейных эволюционных уравнений на конечномерные инвариантные многообразия: Препринт № 22-86. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. 31 с.
12. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
13. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows // J. Fluid. Mech. 1967. V. 27. № 3. P. 465-492.
14. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 4. С. 791-794.
15. Scobeev B. Yu., Molorodov Yu. I. Subcritical autooscillations and nonlinear neutral curve for Poiseuille flow // Comput. and Maths. with Appl. 1980. V. 6. № 1. P. 123-133.
16. Постгон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 607 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
6.X.1987