

УДК 532.592:537.84

© 1990 г.

МОЛОТОВЩИКОВ А. Л.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛН В МАГНИТНОЙ ТРУБКЕ

Данные наблюдений показывают, что магнитные поля в атмосфере Солнца имеют ярко выраженную структуру и концентрируются в основном в образованиях типа протяженных магнитных трубок. В [1] исследовано в линейном приближении распространение волн в цилиндрических магнитных трубках, получены дисперсионные соотношения для таких волн и введена классификация основных типов волн, соответствующая различиям в условиях их существования, геометрии возмущенного течения, а также в значении характерной скорости распространения возмущений. Возможность сопоставления свойств отдельных видов волновых движений в магнитной трубке с имеющимися результатами наблюдений рассмотрена в [2]. Волны, фигурирующие в [1] как медленные симметричные захваченные волны, характеризуются дозвуковой доальфвеновской скоростью распространения σ , малыми деформациями поверхности магнитной трубки и неоднородным осесимметричным распределением параметров жидкости в поперечном сечении трубки. В [3, 4] для случая цилиндрической магнитной трубки выведено нелинейное уравнение, описывающее в длинноволновом приближении распространение медленных симметричных захваченных волн малой амплитуды. В [5] получено аналогичное нелинейное уравнение для медленных захваченных волн в плоском магнитном слое, доказано отсутствие у этого уравнения решений в виде уединенных волн и продемонстрировано опрокидывание возмущений, имеющих в начальный момент вид синусоидальной волны. Последнее привлекает внимание к гипотезе о возможной причастности медленных захваченных волн к разогреву солнечной короны.

В настоящей работе на основе полученного в [3, 4] нелинейного уравнения исследуется распространение медленных симметричных захваченных волн малой амплитуды в цилиндрической магнитной трубке. Численно показано опрокидывание периодических возмущений определенного вида за конечное время. Отмечено отсутствие у цитируемого уравнения из [3, 4] решений в виде уединенных волн.

1. Основные уравнения. Рассматривается идеальная жидкость с бесконечной проводимостью, описываемая уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

Здесь t — время, ρ — плотность, p — давление, \mathbf{v} — скорость, \mathbf{B} — магнитная индукция, γ — показатель адиабаты. Индекс ноль относится к невозмущенному состоянию. Движение рассматривается в цилиндрической системе координат r, θ, z и считается осесимметричным, т. е. не зависящим от угла θ , с $\mathbf{v} = (u, 0, w)$, $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$. Предполагается, что в невозмущенном состоянии жидкость покоится, $B_r = 0$, а плотность, давление и z -компонента вектора магнитной индукции не зависят от координат и времени внутри и вне цилиндрической магнитной трубки радиуса R , на границе $r=R$ которой испытывают разрыв. На возмущенной поверхности трубки, задаваемой уравнением $r=R+\eta(t, z)$, должны выполняться граничные условия

$$\left[u - w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] = 0; \quad \left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right] = 0; \quad u = \frac{\partial \eta}{\partial t} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (1.2)$$

где квадратные скобки означают скачок величины.

Анализ линеаризованных уравнений (1.1), (1.2) показал, что при выполнении одного из условий

$$c_T^2 < c_{Te}^2; \quad \min(c_e^2, v_{Ae}^2) < c_T^2 < \max(c_e^2, v_{Ae}^2)$$

$$c_T^2 \equiv \frac{c_0^2 v_A^2}{c_0^2 + v_A^2}; \quad c_{Te}^2 \equiv \frac{c_e^2 v_{Ae}^2}{c_e^2 + v_{Ae}^2}$$

где c_0, v_A — скорость звука и альфвеновская скорость внутри невозмущенной трубки, c_e, v_{Ae} — аналогичные параметры вне трубки, в цилиндрической магнитной трубке возможно распространение медленных симметричных захваченных волн, подчиняющихся в длинноволновом приближении дисперсионному соотношению [3, 4]

$$\omega = \omega_l \equiv c_T k + \frac{c_T^3 R^2 k^3}{2(c_0^2 + v_A^2) j_l^2}; \quad l=1, 2, \dots$$

Здесь ω — частота, k — волновое число, j_l — l -й корень (в порядке возрастания) функции Бесселя первого порядка $J_1(x)$. Эволюция медленных симметричных захваченных волн малой амплитуды описывается полученным в [3, 4] двумерным нестационарным нелинейным уравнением с граничными условиями при $r=R$ и $r=0$ для функции U , связанной с вектором скорости.

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \xi} \right) + \delta \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.3)$$

$$\xi = z - c_T t; \quad \delta = \frac{c_T^5}{2c_0^2 v_A^2}$$

$$U=0 \quad (r=R); \quad U=O(r^2) \quad (r \rightarrow 0)$$

$$u = -\frac{c_T^2}{b v_A^2 r} \frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad w = \frac{1}{br} \frac{\partial U}{\partial r}; \quad b = \frac{V_A^2 (3c_0^2 + (\gamma+1) V_A^2)}{2(c_0^2 + V_A^2)^2}$$

Уравнение (1.3) выведено в предположении, что возмущения убывают при $|z| \rightarrow \infty$ либо являются периодическими с нулевым средним значением. Методом, предложенным в [5] для случая плоского магнитного слоя, можно показать отсутствие решений уравнения (1.3) в виде уединенных волн. При этом должны быть исправлены имеющиеся в [5] опечатки, т. е. знаменатель в формуле (38) для μ должен быть заменен на $3\mu^2 + \xi^2$, а последний член в первом уравнении (41) необходимо брать со знаком плюс.

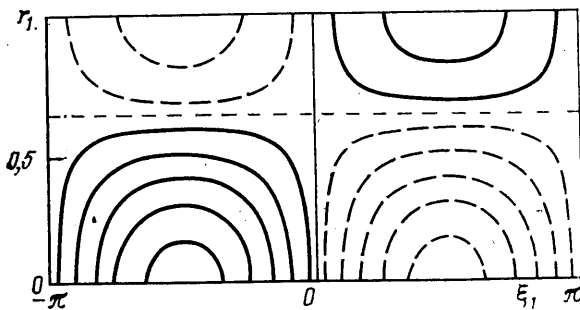
Рассмотрим эволюцию периодических возмущений. Переходя в (1.3) к безразмерным величинам

$$r_1 = \frac{r}{R}; \quad \xi_1 = \frac{2\pi\xi}{L}; \quad t_1 = \frac{t}{T_0}; \quad U_1 = \frac{U}{U_0};$$

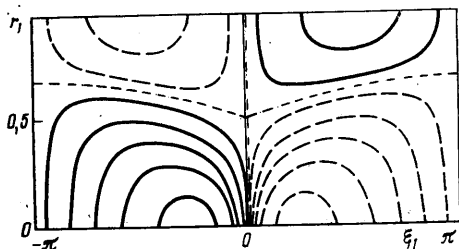
$$\delta_1 = \frac{R^2}{L^2 \epsilon} \left(T_0 = \frac{R^2 L}{2\pi U_0}; \quad U_0 = 4\pi^2 R^2 \delta \epsilon \right)$$

где L — период ($L \gg R$), ϵ — характерное значение отношения амплитуды продольной скорости w к c_T ($\epsilon \ll 1$), получим для U_1 в точности равенства (1.3), в которых всем переменным приписан индекс 1, а первое граничное условие имеет место при $r_1=1$. Будем искать решение поставленной задачи в виде

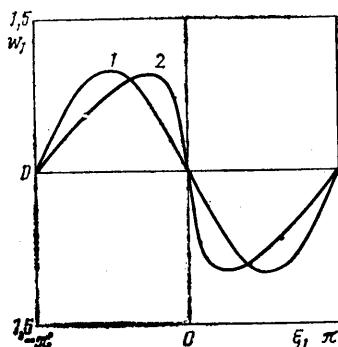
$$U_1 = \sum_{m=1}^{\infty} r_1 J_1(j_m r_1) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_{nm}(t_1) \cos n \xi_1 + b_{nm}(t_1) \sin n \xi_1) \right\} \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

После ряда громоздких преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_{ns}}{dt_1} = j_s^{-2} \left(\frac{n}{2} g_{ns} - \delta_1 n^3 b_{ns} \right); \quad \frac{db_{ns}}{dt_1} = j_s^{-2} \left(-\frac{n}{2} f_{ns} + \delta_1 n^3 a_{ns} \right) \quad (1.5)$$

$$f_{ns} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \alpha_{kms} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (a_{n+l,k} a_{lm} + b_{n+l,k} b_{lm}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} (a_{lk} a_{n-l,m} - b_{lk} b_{n-l,m}) \right\}$$

$$g_{ns} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \alpha_{kms} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (a_{lk} b_{n+l,m} - a_{n+l,k} b_{lm}) + \sum_{l=1}^{n-1} a_{lk} b_{n-l,m} \right\}$$

$$\alpha_{kms} = -\frac{2j_k j_m j_s}{[J_0(j_s)]^2} \int_0^1 J_0(j_k r_1) J_0(j_m r_1) J_0(j_s r_1) r_1 dr_1$$

описывающую развитие медленных симметричных захваченных волн во времени. J_0 в (1.5) — функция Бесселя нулевого порядка.

2. Результаты. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5) была решена методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности. В качестве начального условия задавались значения $a_{nm}=0$, $b_{nm}=0$, $b_{11}=-j_1^{-1}$, соответствующие полю безразмерной продольной скорости

$$w_1 = \frac{1}{r_1} \frac{\partial U_1}{\partial r_1} = -J_0(j_1 r_1) \sin \xi_1$$

При этом система уравнений (1.5) была обрезана, т. е. полагалось $a_{nm}=b_{nm}=0$ при $n>N$ или $m>M$. В расчетах брались $N=M=10$ и $N=M=$

=15. Дальнейшее увеличение числа учитываемых в разложении (1.4) членов требует резкого увеличения затрат машинного времени. Значение δ_1 принималось равным 0,1; 0,5; 1, шаг интегрирования составлял 0,0125.

Ниже представлены результаты расчетов для $\delta_1=0,1$, $N=M=15$, которые вплоть до момента $t_1=0,9$ хорошо совпадают с результатами расчетов для $N=M=10$. На фиг. 1, 2 изображены линии уровня функции $w_1(r_1, \xi_1, t_1)$ при $t_1=0$ и 0,9 соответственно. Сплошные (кроме $\xi_1=0$ и границ фигур), штриховые и пунктирная (на фиг. 1 также $\xi_1=0, \pm\pi$) кривые являются изолиниями, соответствующими $w_1>0$, $w_1<0$ и $w_1=0$. На изолиниях ближайших к линии нулевого уровня $|w_1|=0,1$. При удалении от линии нулевого уровня на каждой последующей изолинии $|w_1|$ увеличивается на 0,2. Сравнение фиг. 1 и 2 показывает укрупнение фронта волны вблизи начала координат.

Опрокидывание волны иллюстрируется также фиг. 3, на которой представлены графики функций $w_1(0, \xi_1, t_1)$ при $t_1=0$ (кривая 1) и $t_1=0,9$ (кривая 2). Изменение t_1 от 0 до 0,9 сопровождается увеличением максимального абсолютного значения производной $\partial w_1/\partial \xi_1(r_1=0)$ от 1 до 4,2. Оценка времени опрокидывания $t_c=1,17$ может быть получена экстраполяцией максимальных по ξ_1 (при $r_1=0$) значений функции $\arctg|\partial w_1/\partial \xi_1|$ в область $t_1>0,9$.

Результаты расчетов для $\delta_1=0,1; 0,5; 1$ аналогичны друг другу. Время опрокидывания волны при этом оказывается равным 1,17; 1,25; 1,37 соответственно. Увеличение δ_1 на порядок не привело к существенному изменению t_c . Подтверждается сделанный в [5] вывод о слабой зависимости времени опрокидывания медленных симметричных захваченных волн от их периода.

Автор благодарит М. С. Рудермана за постановку задачи и В. Б. Баранова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Edwin P. M., Roberts B. Wave propagation in a magnetic cylinder // Solar Phys. 1983. V. 88. № 1-2. P. 179-191.
2. Roberts B., Edwin P. M., Benz A. O. On coronal oscillations // Astrophys. J. 1984. V. 279. № 2. Pt 1. P. 857-865.
3. Мологовщиков А. Л., Рудерман М. С. Нелинейные медленные симметричные волны в магнитной трубке: Препринт № 1147. М.: ИКИ АН СССР, 1986. 26 с.
4. Molotovshchikov A. L., Ruderman M. S. Long nonlinear-waves in a compressible magnetically structured atmosphere. IV. Slow sausage waves in a magnetic tube // Solar Phys. 1987. V. 109. № 2. P. 247-263.
5. Merzljakov E. G., Ruderman M. S. Long nonlinear-waves in a compressible magnetically structured atmosphere. II. Slow body waves in a magnetic slab // Solar Phys. 1986. V. 103. № 2. P. 259-276.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1988