

УДК 532.546

© 1990 г.

БЕДРИКОВЕЦКИЙ П. Г., КАНЕВСКАЯ Р. Д., ЛУРЬЕ М. В.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ ОДНОЙ ИЗ ФАЗ

Процессы заводнения нефтяных пластов описываются решениями задач взаимного вытеснения несмешивающихся жидкостей. Аналогичное описание имеют процессы вытеснения нефти газов и процессы закачки газа в водоносные пласты. Известны решения таких задач в предположении несжимаемости обеих фаз [1–5]. Однако при вытеснении нефти и воды газом существенную роль играет сжимаемость газовой фазы [6, 7].

В данной работе решены автомодельные задачи взаимного вытеснения с учетом сжимаемости одной из фаз. Обнаружено, что при вытеснении несжимаемой жидкости газом полнота вытеснения увеличивается. При взаимном вытеснении газожидкостных смесей образуется не один, а несколько скачков насыщенности, т. е. структура зоны вытеснения значительно усложняется.

1. Постановка задачи. Процесс плоскопараллельной двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкости и газа в пористой среде описывается уравнениями

$$m \frac{\partial (s_i \rho_i')}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho_i' w_i')}{\partial x'} = 0; \quad i=1, 2 \quad (1.1)$$

$$s_1 = s, \quad s_2 = 1 - s, \quad \rho_1' = \text{const}, \quad \rho_2' = \rho'(p_2')$$

$$w_i' = - \frac{k f_i(s_i)}{\mu_i} \frac{\partial p_i'}{\partial x'} \quad (1.2)$$

$$p_2' - p_1' = p_c'(s) = \varepsilon' J(s) \quad (1.3)$$

Здесь x' — объем пласта, отсчитываемый от нагнетательной галереи, t' — время, s_i — насыщенность порового пространства i -й фазой, m — пористость, k — проницаемость, f_i — относительная фазовая проницаемость, μ_i — вязкость i -й фазы, w_i' , ρ_i' , p_i' — соответственно скорость, плотность и давление i -й фазы, p_c' — капиллярный скачок давления, ε' — его характерная величина, $J(s)$ — безразмерная функция насыщенности; индекс $i=1$ относится к жидкости, $i=2$ — к газу.

В крупномасштабном приближении при больших x' и t' капиллярным скачком давления можно пренебречь и положить $p_1' = p_2' = p'$.

Задачи взаимного вытеснения газожидкостных смесей отвечают следующим начальным и граничным условиям:

$$s(0, t') = s^0, \quad p'(0, t') = p^0, \quad s(x', 0) = s_0, \quad p'(x', 0) = p_0' \quad (1.4)$$

Пусть $F = (1 + f_2 \mu_1 / f_1 \mu_2)^{-1}$ — функция Баклея — Лаверетта (фиг. 1), $u' = w_1' + w_2'$ — суммарная скорость фильтрации, тогда $w_1' = F u'$, $w_2' = (1 - F) u'$. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{m x'}{\Omega}, \quad t = \frac{k m p_0' t'}{\mu_1 \Omega^2}, \quad p_i = \frac{p_i'}{p_0'}, \quad u = \frac{\mu_1 \Omega u'}{k m p_0'},$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'(p_0')}, \quad p_c = \frac{p_c'}{p_0'}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{p_0'}$$

Здесь Ω — характерная величина объема, сравнимая с объемом пласта. Система уравнений (1.1), (1.2), условия (1.4) приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial uF}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho(1-s)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u(1-F)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

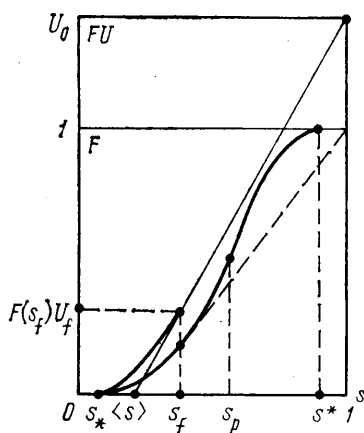
$$u = -(f_1 + \mu f_2) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$s(0, t) = s^0, \quad p(0, t) = p^0 > 1, \quad s(x, 0) = s_0, \quad p(x, 0) = 1 \quad (1.7)$$

2. Условия на разрывах. Система уравнений (1.5), (1.6) допускает разрывные решения. Условия Гюгонио на разрыве имеют вид [8]

$$[s]D = [uF]; \quad [\rho(1-s)]D = [\rho u(1-F)]; \quad [p] = 0$$

Здесь $D = dx/dt$ — скорость разрыва, $[A]$ — символ скачка величины A . Отсюда следует, что $[u] = [p] = 0$, т. е. функции u и p непрерывны; допускаются лишь s -скачки: $D = u[F]/[s]$.



Фиг. 1

Для выбора единственного обобщенного решения задачи (1.7) для системы (1.5), (1.6) потребуем, чтобы разрыв удовлетворял условиям допустимости [9]. Разрыв допустим, если он является пределом непрерывных решений полной системы (1.1)–(1.3) при стремлении к нулю капиллярного скачка давления ε .

Будем искать решение полной системы уравнений в окрестности разрыва укороченной системы в виде бегущей волны $s = s(\omega)$, $u = u(\omega)$, $p = p(\omega)$, $\omega = (x - Dt)\varepsilon^{-1}$, удовлетворяющее граничным условиям срачивания

$$u(\pm\infty) = u^\pm, \quad p_2(\pm\infty) = p^\pm, \quad s(\pm\infty) = s^\pm \quad (2.1)$$

Здесь u^\pm , p^\pm , s^\pm — значения соответствующих функций на разрыве. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -D \frac{ds}{d\omega} + \frac{d}{d\omega} \left[uF + f_1(1-F) \frac{dJ}{ds} \frac{ds}{d\omega} \right] &= 0 \\ -D \frac{d\rho(1-s)}{d\omega} + \frac{d}{d\omega} \left[\rho u(1-F) - \rho f_1(1-F) \frac{dJ}{ds} \frac{ds}{d\omega} \right] &= 0 \\ (f_1 + \mu f_2) \frac{dp_2}{d\omega} &= -\varepsilon \left[u - f_1 \frac{dJ}{ds} \frac{ds}{d\omega} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условием допустимости разрыва является существование непрерывного решения задачи (2.1), (2.2). Поскольку из условия на разрыве следует, что $u^+ = u^- = u_*$, $p^+ = p^- = p_*$, то в решении задачи (2.1), (2.2) $u(\omega) = u_*$, $p_2(\omega) = p_*$. Поэтому полная система уравнений (2.1), (2.2) сводится только к одному уравнению для насыщенности и задача о структуре разрыва имеет такой же вид, как и в случае, когда рассматриваемые жидкости несжимаемы [10]. Можно показать, что она имеет непрерывное решение тогда и только тогда, когда для любого значения s из интервала (s^-, s^+) выполняются неравенства О. А. Олейник [11]

$$\frac{F(s) - F(s^+)}{s - s^+} \leq \frac{D}{u_*} = \frac{[F]}{[s]} \leq \frac{F(s) - F(s^-)}{s - s^-}$$

Функция $F(s)$ имеет одну точку перегиба (фиг. 1), поэтому полученные условия можно упростить

$$F_s(s^+) \leq \frac{D}{u_*} = \frac{[F]}{[s]} \leq F_s(s^-), \quad F_s = \frac{dF}{ds} \quad (2.3)$$

3. Автомоделные решения. Задача (1.5) — (1.7) допускает автомоделные решения

$$s = s(\xi), \quad p = p(\xi), \quad u = U(\xi)/\sqrt{2t}, \quad \xi = x/\sqrt{2t}$$

После подстановки этих выражений в уравнения (1.5), (1.6) задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi \frac{ds}{d\xi} = \frac{dUF}{d\xi}; \quad \xi \frac{d\rho(1-s)}{d\xi} = \frac{d\rho U(1-F)}{d\xi} \quad (3.1)$$

$$U = -(f_1 + \mu f_2) \frac{dp}{d\xi} \quad (3.2)$$

$$s(0) = s^0, \quad p(0) = p^0 > 1, \quad s(\infty) = s_0, \quad p(\infty) = 1 \quad (3.3)$$

Условие на разрыве принимает вид $D = U[F]/[s]$, где D — значение автомоделной переменной, при котором насыщенность s терпит разрыв.

Автомоделному решению задачи на плоскостях (s, FU) , (ξ, s) соответствует путь, соединяющий точки $s(0)$ и $s(\infty)$, который может состоять из следующих элементов: непрерывных участков, описывающих решение обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1), (3.2), в дальнейшем обозначаемых буквой S ; скачков насыщенности, на которых выполняются условие Гюгонио и условие допустимости (2.3), обозначаемых буквой J ; областей покоя, обозначаемых буквой P .

Условие Гюгонио геометрически означает, что наклон отрезка прямой, соединяющей точки за разрывом и перед ним на плоскости (s, FU) , равен D . Из уравнения (3.1), записанного в виде $\xi = dFU/ds$, следует, что наклон касательной к непрерывному участку пути на плоскости (s, FU) равен автомоделной переменной ξ .

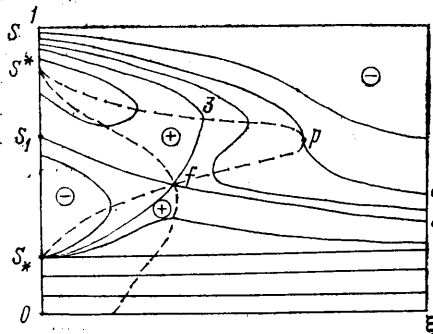
Каждое решение задачи будет представлено дальше структурной формулой, состоящей из последовательности элементов S, J и P .

Запишем систему уравнений (3.1), (3.2) в следующем виде:

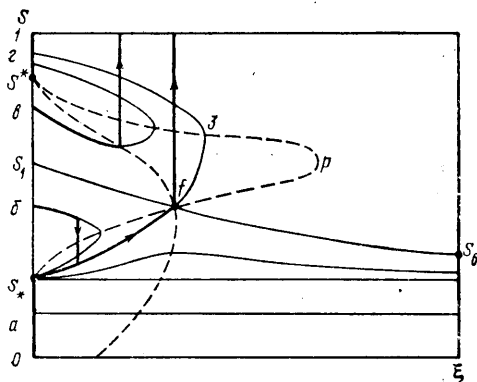
$$\frac{ds}{d\xi} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{U(1-F)/(1-s) - \xi}{UF_s - \xi} - \frac{UF(1-s)}{f_1 + \mu f_2} \quad (3.4)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \left(U \frac{1-F}{1-s} - \xi \right) \frac{U(1-s)}{f_1 + \mu f_2} \quad (3.5)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = -\frac{U}{f_1 + \mu f_2} \quad (3.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Так как в процессе вытеснения $U \geq 0$, то из (3.6) следует, что p монотонно убывает от значения p^0 при $\xi=0$ до единицы при $\xi=\infty$. При $dp/dp > 0$ знак правой части уравнения (3.5) совпадает со знаком выражения, стоящего в круглых скобках. Поэтому $U(\xi)$ возрастает при $0 \leq \xi/U < (1-F)/(1-s)$ и убывает при $\xi/U > (1-F)/(1-s)$.

Рассмотрим уравнение (3.4) как автономную систему на плоскости (ξ, s) , полагая, что функции $U(\xi)$ и $p(\xi)$ заранее известны из решения задачи и меняются указанным выше образом. Изоклины, вдоль которых $ds/d\xi=0$ и $ds/d\xi=\infty$, задаются уравнениями

$$\xi/U = (1-F)/(1-s); \quad \xi/U = F. \quad (3.7)$$

Если функция ξ/U монотонна, то изоклины (3.7) имеют характерный вид, представленный на фиг. 2 пунктиром. Они делят фазовую плоскость на четыре области, в каждой из которых знак $ds/d\xi$ постоянен.

Изоклины (3.7) пересекаются вдоль двух отрезков $\{\xi=0, s \in [0, s_*]\}$ и $\{\xi=0, s \in [s^*, 1]\}$, а также в точке (ξ_f, s_f) . Точки пересечения кривых (3.7) являются особыми точками автономной системы: точка (ξ_f, s_f) — седло, точка $(0, s^*)$ — вырожденный фокус, точка $(0, s_*)$ — вырожденный узел. При $s \in [0, s_*]$ имеем $ds/d\xi=0$, и интегральные кривые являются прямыми линиями. При $s \in [s^*, 1]$ уравнение (3.4) может быть проинтегрировано с учетом (3.6) и граничных условий (3.3)

$$s = 1 - (1-s^0) \rho^0 / \rho \quad (3.8)$$

Устремим вдоль произвольной траектории ξ к бесконечности и рассмотрим асимптотическое поведение решения. Во всех случаях, кроме $s_0=1$, давление p стремится к $p_0=1$. Тогда из уравнения (3.6) следует, что $U \rightarrow 0$. Начиная с некоторого ξ выполняется неравенство $ds/d\xi < 0$, поэтому функция $s(\xi)$ как монотонная и ограниченная имеет при $\xi \rightarrow \infty$ предел, равный s_0 .

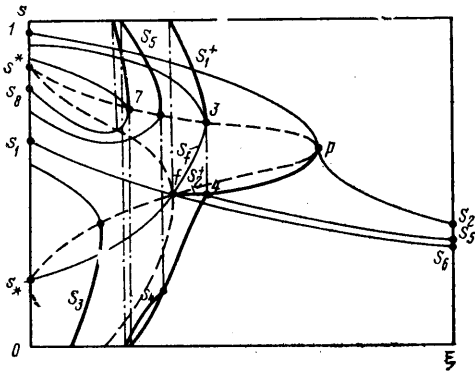
Поэтому из (3.5) и (3.6) при $\xi \rightarrow \infty$ имеем

$$p - p_0 \sim \text{Erfc}(\nu \xi), \quad U \sim \frac{2\nu}{\sqrt{\pi}} (f_1(s_0) + \mu f_2(s_0)) \exp(-\nu^2 \xi^2)$$

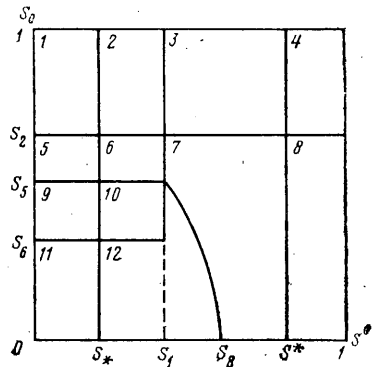
$$\nu = \left(\frac{1-s_0}{2(f_1(s_0) + \mu f_2(s_0))} \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Важными характеристиками являются средние по пласту насыщенность $\langle s \rangle$ и плотность газовой фазы $\langle \rho(1-s) \rangle$. Формулы для их определения могут быть получены в результате интегрирования уравнений (1.5), выражающих баланс объема жидкой фазы и баланс массы газовой фазы, по области плоскости (x, t) , ограниченной контуром $(0, 0) \rightarrow (0, t) \rightarrow (L, t) \rightarrow (0, 0)$, где $(L, t) \rightarrow (0, 0)$ — участок кривой $x = \xi \sqrt{2t}$, $\xi = L/\sqrt{2t}$ [13]

$$\langle s \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L s(x, t) dx = s \left(\frac{L}{2t} \right) + \frac{\sqrt{2t}}{L} (F(s^0) U^0 - F(s) U)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\langle \rho(1-s) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(1-s) dx = \rho(1-s) + \frac{\sqrt{2t}}{L} [\rho^0(1-F(s^0))U^0 - \rho(1-F(s))U]$$

4. Решения задач о вытеснении жидкости газом и газожидкостной смесью. Если в пласте до начала вытеснения находилась только несжимаемая фаза, то $s_0=1$.

Пусть насыщенность вытесняющей фазы s^0 удовлетворяет условию $0 \leq s^0 \leq s_*$. Область, в которой $ds/d\xi > 0$, покрыта интегральными кривыми, выходящими из вырожденного узла $(0, s_*)$. Рассмотрим траекторию, проходящую через особую точку $(s_f, U_f F_s(s_f))$. Соответствующий непрерывный участок решения обозначим S_f . Рассмотрим скачок из точки s^- области $ds/d\xi > 0$ в точку $s=1$. Из условия допустимости (2.3) следует, что $s^- \geq s_f$. Из условия Гюгоню имеем $s^- = s_f$. В соответствии с (2.3) скачки с траекторий, на которых $0 \leq s^0 \leq s_*$, на траекторию S_f допустимы только при $\xi=0$. Таким образом, решение задачи состоит из неподвижного скачка из точки $(0, s^0)$ в точку $(0, s_*)$, непрерывного участка S_f , на котором насыщенность возрастает от s_* при $\xi=0$ до s_f при $\xi_f = U F_s(s_f)$, скачка в точку $s=1$, $\xi = \xi_f$ и области покоя $s=1$ при $\xi \in (\xi_f, \infty)$. Соответствующий путь показан на плоскости (ξ, FU) (фиг. 1). Структурная формула, описывающая это решение, имеет вид

$$s^0 - J \rightarrow s_* - S_f - s_f - J \rightarrow 1 - P \quad (4.1)$$

Этот путь на плоскости (ξ, s) изображен на фиг. 3 утолщенной линией a . Путь, соответствующий решению этой же задачи в случае, когда обе фазы считаются несжимаемыми, отличается только непрерывным участком: вместо линии S_f он содержит отрезок кривой $\xi = U F_s$, показанной на фиг. 3 штриховой линией.

Таким образом, неучет сжимаемости вытесняющей фазы приводит к заниженным значениям насыщенности, т. е. полноты вытеснения. Сопоставление результатов расчетов показало, что неучтенный объем закачанного газа возрастает с ростом давления нагнетания: при $p^0/p_f=2$ он составляет 22%, а при $p^0/p_f=5$ —39%. Сжимаемость газовой фазы приводит к увеличению скорости продвижения фронта вытеснения, причем отношение U_f/U возрастает с ростом давления нагнетания: при $p^0/p_f=2$ имеем $U_f/U^0=1,2$; при $p^0/p_f=5$ $U_f/U^0=1,38$. Однако фронтовое значение насыщенности остается таким же, как и в случае несжимаемости обеих фаз.

Пусть теперь насыщенность вытесняющей фазы удовлетворяет условию $s_* < s^0 < s_1$. Значение s_1 определяется при $\xi=0$ по интегральной кривой, проходящей через особую точку (ξ_f, s_f) , (фиг. 2). Из точки $(0, s^0)$

можно выйти по единственной интегральной кривой. Вдоль нее $ds/d\xi < 0$. Считая, что s^- изменяется вдоль этой кривой, построим зависимость $s^+ = s(\xi, s^-)$, выражающую условие Гюгонио на разрыве. Эта зависимость изображена на фиг. 4 утолщенной линией S_3 . При любых ξ имеем $s^+ \neq 1$, поэтому решение содержит по крайней мере два скачка. Согласно условию допустимости (2.3), промежуточные интегральные кривые должны переходить из области $\xi \geq UF_s$ в область $\xi \leq UF_s$ при увеличении ξ . Кроме того, последняя из них должна пересекаться ударной адиабатой $\xi = U(1-F)/(1-s)$. Поэтому скачок может произойти только на траектории S_j . Покажем, что кривые $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ и S_j пересекаются в единственной точке.

Пусть $s^- = s^-(\xi)$ и $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ — предельные значения насыщенности в точках разрыва, связанные условием Гюгонио, и $ds/d\xi$ определяется вдоль интегральной кривой, пересекаемой кривой $s^+ = s^+(\xi, s^-)$. Введем новую независимую переменную p . Из соотношения $\xi = U[F]/[s]$, справедливого на разрыве, вычислим ds^+/dp

$$\frac{ds^+}{dp} = \frac{1}{U} \frac{d\xi}{dp} \frac{s^+ - s^-}{F_s^+ - (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-)} - \frac{1}{U} \frac{dU}{dp} \frac{F^+ - F^-}{F_s^+ - (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-)} + \frac{ds^-}{dp} \frac{F_s^- - (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-)}{F_s^+ - (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-)}$$

Положим, что s^- изменяется вдоль траектории уравнения (3.4). Тогда значения ds^-/dp и dU/dp определяются из системы (3.4) — (3.6). Учтивая, что ξ удовлетворяет соотношению на разрыве, получим

$$\frac{ds^+}{dp} = \frac{1}{U} \frac{d\xi}{dp} \frac{s^+ - s^-}{F_s^+ - (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-)} + \frac{ds}{dp}$$

Перейдем к независимой переменной ξ . Из условий допустимости разрыва (2.3) следует, что $F_s^+ - (F^+ - F^-)/(s^+ - s^-) \leq 0$. Так как $U > 0$, то знак разности $ds^+/d\xi - ds/d\xi$ противоположен знаку выражения $s^+ - s^-$, т. е. имеет место неравенство

$$\left(\frac{ds^+}{d\xi} - \frac{ds}{d\xi} \right) (s^+ - s^-) \leq 0 \quad (4.2)$$

Согласно (4.2), при $s^+ < s^-$ имеем $ds^+/d\xi > ds/d\xi$. В рассматриваемом случае $ds/d\xi > 0$, поэтому все интегральные кривые, пересекаемые линией $s^+ = s^+(\xi, s^-)$, имеют с ней единственную общую точку. Обозначим значение s^+ в точке пересечения кривых $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ и S_j через $s^{\circ+}$, соответствующее значение s^- — через $s^{\circ-}$. Решение задачи показано на фиг. 3 утолщенной линией b . Оно описывается структурной формулой

$$s^{\circ-} - S - s^{\circ-} - J \rightarrow s^{\circ+} - S_j - s_j - J \rightarrow 1 - P \quad (4.3)$$

Учет сжимаемости одной из фаз привел к появлению второго скачка насыщенности, возникновению перед фронтом вытеснения области с повышенным содержанием газа, опережающего жидкость.

Пусть теперь $s_1 < s^{\circ-} < s^*$. Из точки $(0, s^{\circ-})$ выходит только одна интегральная траектория. Она пересекается с ударной адиабатой, построенной для значения $s^+ = 1$, в некоторой точке (ξ, s_0^-) . Решение состоит из непрерывного участка, скачка и области постоянства $s = 1$. Оно показано на фиг. 3 утолщенной линией v . Ему соответствует следующая структурная формула:

$$s^{\circ-} - S - s^{\circ-} - J \rightarrow 1 - P \quad (4.4)$$

Если в нагнетаемой смеси подвижность газа равна нулю, т. е. $s^* \leq s^{\circ-} \leq 1$, то решение состоит из скачка при $\xi = 0$ и зоны постоянной насы-

ценности $s=1$. Ему соответствует путь, показанный на фиг. 3 утолщенной линией 2.

5. Распад произвольного разрыва. При произвольном соотношении насыщенностей s_0 газожидкостной смеси, первоначально находившейся в пласте, и s° смеси, нагнетаемой в пласт, возникает задача о распаде произвольного разрыва для исходной системы уравнений.

Каждой задаче о распаде разрыва ставим в соответствие точку на плоскости (s°, s_0) . Решения принадлежат одному и тому же типу, если они описываются одинаковыми структурными формулами. Классификация решений по типам приведена на фиг. 5. Существование и единственность решения задачи о распаде произвольного разрыва соответствует тому, что указанные области покрывают квадрат $(s^\circ, s_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и не пересекаются.

На фиг. 4 и 5 использованы следующие обозначения: s_p — предельное значение насыщенности при $\xi \rightarrow \infty$ вдоль интегральной кривой, проходящей через точку $(UF_s(s_p), s_p)$; s_p — абсцисса точки перегиба кривой $F(s)$; 3 — точка пересечения траектории S_f и петли $\xi = UF_s$, $s_3 > s_p$, s_4 — корень уравнения $(F(s_4) - F(s_3)) / (s_4 - s_3) = F_s(s_3)$, при этом $\xi_4 = \xi_3$; s_5 и s_6 — предельные значения насыщенностей при $\xi \rightarrow \infty$ вдоль интегральных кривых, проходящих через точки 4 и (ξ_f, s_f) соответственно; s_7 — корень уравнения $F_s(s_7) = F(s_7) / s_7$, при этом $\xi_7 = UF_s(s_7)$; s_8 — значение насыщенности при $\xi = 0$ на интегральной кривой, проходящей через точку 7, $s_8 < s^*$, $\xi_8 = 0$.

Покажем, что краевая задача (3.3) для системы (3.4)–(3.6) при выполнении условий допустимости (2.3) имеет единственное автомодельное решение для любых значений s° и s_0 .

Пусть $s_2 \leq s_0 < 1$. На интегральные кривые, вдоль которых $s \rightarrow s_0 \geq s_2$, при $\xi \rightarrow \infty$ можно попасть скачком либо со значений $s^* \leq s \leq 1$ при $\xi = 0$, либо с траекторий, на которых $s_1 \leq s(0) < s^*$, либо с траектории S_f . Скачки с интегральных кривых, выходящих из точек $(0, s^\circ)$, $s < s^\circ < s_1$, на рассматриваемые траектории невозможны согласно соотношению Гюгонио, а с траекторий, на которых $0 \leq s(\infty) < s_6$, — в силу условий (2.3). Поэтому выделяются четыре различных типа решений в зависимости от значения s° (области 1–4 на фиг. 5).

Начальная часть пути, соответствующего решениям 1-го и 2-го типов, описывается структурными формулами (4.1) и (4.3) соответственно, но последний скачок происходит с траектории S_f при $s^- > s_f$. Значение s^- определяется однозначно. Действительно, пусть s^- изменяется вдоль S_f от значения s_f до s_3 . Соотношение $\xi = U[F] / [s]$, выполняющееся на скачке, определяет зависимость $s^+ = s^+(\xi, s^-)$. Она неоднозначная, на фиг. 4 она представлена двумя непересекающимися утолщенными линиями $s_1^+(\xi, s^-) \geq s^-$ и $s_2^+(\xi, s^-) \leq s^-$. Значения $s^+ = s_1^+(\xi, s^-)$ убывают от $s_1^+ = 1$ при $\xi = \xi_f$ до $s_1^+ = s_3$ при $\xi = \xi_3$. Из (4.2) следует, что $ds_1^+ / d\xi < ds^- / d\xi < 0$. Поэтому линия $s^+ = s_1^+(\xi, s^-)$ имеет единственную общую точку с каждой из пересекаемых ею интегральных кривых $s = s(\xi)$. Обозначим значение s_1^+ в точке пересечения с интегральной кривой, вдоль которой $s \rightarrow s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$, через s_0^+ , а соответствующее значение s^- — через s_0^- . Тогда структурные формулы решений 1-го и 2-го типов соответственно примут следующий вид:

$$s^\circ - J \rightarrow s_- - S_f - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \quad (5.1)$$

$$s^\circ - S - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S_f - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \quad (5.2)$$

Рассмотрим решения 3-го типа. Положим, что s^- изменяется вдоль интегральной кривой, выходящей из точки $(0, s^\circ)$. Построим зависимость $s^+ = s^+(\xi, s^-)$, соответствующую условию на скачке. Рассмотрим ту ее часть, в которой $s^+ \geq s^-$. Она показана на фиг. 4 утолщенной линией S_5 . Обозначим значение s^+ в точке пересечения линии $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ с интегральной траекторией, вдоль которой $s \rightarrow s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$, через s_0^+ , а соот-

ветствующее значение s^- — через s_0^- . Тогда путь, соответствующий решениям третьего типа, задается структурной формулой

$$s^\circ - S - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \quad (5.3)$$

Решения 4-го типа состоят из скачка со значения s° на значение s_0^+ при $\xi=0$ и непрерывного участка, на котором насыщенность изменяется от s_0^+ при $\xi=0$ до s_0 при $\xi \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $0 \leq s_0 < s_2$. Рассмотрим всевозможные скачки на интегральные кривые, вдоль которых $s \rightarrow s_0 < s_2$ при $\xi \rightarrow \infty$. Для траекторий, выходящих из точек $(0, s^\circ)$, $s^* < s^\circ < 1$, допустимыми при $\xi > 0$ являются только скачки из точек петли $\xi = UF_s$. Скачки на рассматриваемые кривые с траекторий, выходящих из точек $(0, s^\circ)$, $s_8 < s^\circ < s^*$, невозможны в силу условий Гюгонио. Не все рассматриваемые кривые достижимы скачком с траекторий, выходящих из точек $(0, s^\circ)$, $s_1 \leq s^\circ \leq s_8$. Для каждой из интегральных кривых, выходящих из точек $(0, s^\circ)$ при $s_1 \leq s^\circ \leq s_8$, определим значение насыщенности $s^-(s^\circ)$ в точке пересечения с петлей $\xi = UF_s$ и координату точки пересечения $\xi(s^\circ) = UF_s(s^-(s^\circ))$. Из условий Гюгонио найдем значение $s^+(\xi(s^\circ), s^-(s^\circ)) = s^+(s^\circ) < s^-(s^\circ)$.

Определим предельное значение насыщенности $s_0'(s^\circ)$ при $\xi \rightarrow \infty$ вдоль интегральной кривой, проходящей через точку $(\xi(s^\circ), s^+(s^\circ))$. На фиг. 5 кривая $s_0 = s_0'(s^\circ)$ соединяет точки $(s_8, 0)$ и (s_1, s_5) . С траекторий, выходящей из точки $(0, s^\circ)$, где $s_1 < s^\circ < s_8$, возможны скачки на каждую из интегральных кривых, вдоль которых $s \rightarrow s_0 \leq s_0'(s^\circ)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Интегральные кривые, вдоль которых $s \rightarrow s_0 > s_0'(s^\circ)$ при $\xi \rightarrow \infty$, недостижимы скачком с этой траектории. С траекторий, выходящих из точек $(0, s^\circ)$, где $0 < s^\circ < s_1$, возможны скачки только на те кривые, на которых $0 \leq s(\infty) \leq s_8$, причем при $0 \leq s(0) \leq s_*$ они имеют место при $\xi = 0$. В соответствии со сказанным выделяются еще восемь типов решений задачи о распаде произвольного разрыва (области 5–12 на фиг. 5).

Для описания решений 5–8-го типов построим зависимость $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ полагая, что s^- изменяется вдоль участка петли $\xi = UF_s$, на котором $s_p < s \leq s_7$ (фиг. 4). Значения $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ возрастают от 0 при $\xi = \xi_7$ до s_p при $\xi = UF_s(s_p)$. Вдоль интегральных кривых, пересекаемых линией $s^+ = s^+(\xi, s^-)$, значения насыщенности не возрастают. Поэтому с каждой интегральной кривой линия $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ имеет единственную общую точку. Обозначим через s_0^+ значение $s^+ = s^+(\xi, s^-)$ в точке пересечения этой линии с интегральной кривой, вдоль которой $s \rightarrow s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$, а через s_0^- — соответствующее значение s^- . Поскольку на траектории, вдоль которых $s \rightarrow s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$, можно попасть только скачком с траекторий, выходящих из точек $(0, s^\circ)$, где $s^* < s^\circ < 1$, то начальная часть путей, отвечающих решениям 5–8-го типов соответственно, такая же, как в решениях 1–4-го типов. Поэтому структурные формулы, описывающие решения 5–8-го типов, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & s^\circ - J - s_* - S_j - s^- - J \rightarrow s^+ - S - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \\ & s^\circ - S - s^\circ - J \rightarrow s_0^+ - S_j - s^- - J \rightarrow s^+ - S - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \\ & s^\circ - S - s^- - J \rightarrow s^+ - S - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \\ & s^\circ - J \rightarrow s^+ - S - s_0^- - J \rightarrow s_0^+ - S - s_0 \end{aligned}$$

Здесь точка $(U[F]/[s], s^+)$ принадлежит траектории, проходящей через точку $(UF_s(s_0^-), s_0^-)$; точка $(U[F]/[s], s^-)$ лежит на интегральной кривой, выходящей из точки $(0, s)$ для решений 5-го и 6-го типов и из точки $(0, s^\circ)$ для решений 7-го типа. Для нахождения насыщенностей s^+ и s^- и координаты скачка используются описанные выше построения.

Рассмотрим решения 9-го и 10-го типов. Эти решения содержат более одного скачка. Согласно (2.3), промежуточные интегральные траектории должны из области $\xi \geq UF_s$ с ростом ξ переходить в область $\xi < UF_s$. Поэтому решения обязательно содержат участок S_f . Для каждого значения s^- на траектории S_f имеются два значения $s_1^+ > s^-$ и $s_2^+ < s^-$, на которые возможны скачки, (фиг. 4). С пересекаемых линией S_1^+ интегральных кривых скачком можно попасть только на траектории, вдоль которых $s_s \leq s(\infty) < s_2$. Поэтому решения 9-го и 10-го типов содержат скачок с траектории S_f на значения $s_2^+ < s^-$ линии S_2^+ . Вдоль кривой S_2^+ насыщенность убывает от s_f при $\xi = \xi_f$ до s_4 при $\xi = \xi_4$. Из (4.2) имеем $ds/d\xi < ds_2^+/d\xi < 0$. Поэтому линия S_2^+ расположена выше траектории, вдоль которой $s \rightarrow s_4$ при $\xi \rightarrow \infty$. Линия S_2^+ имеет с каждой из пересекаемых ею интегральных кривых единственную общую точку. Структурная формула для решений 9-го типа имеет вид (5.1), а для решений 10-го типа — вид (5.2).

Решения 11-го типа состоят из скачка при $\xi = 0$ и непрерывного участка, на котором $s \rightarrow s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Если $s_0 \leq s_*$, то $s = s_0$ при $\xi > 0$.

Для построения решений 12-го типа положим, что s^- изменяется вдоль траектории, выходящей из точки $(0, s^0)$. Построим зависимость $s^+ = s^+(\xi, s^-)$, соответствующую условию Гюгонио. При $s_* < s^0 < s_1$ эта зависимость однозначна, $s^+ \leq s^-$, ее график имеет характерный вид S_3 на фиг. 4. При $s_1 \leq s^0 \leq s_3$ для каждого значения s^- существует два значения s^+ . Вдоль линии $s^+ = s^+(\xi, s^-) > s^-$ насыщенность убывает от 1 при $\xi = U(1-F)/(1-s)$ до s^- при $\xi = UF_s(s^+)$. С пересекаемых этой линией траекторий скачком можно попасть только на интегральные кривые, вдоль которых $s \rightarrow s' > s_0$ при $\xi \rightarrow \infty$. График зависимости $s^+ = s^+(\xi, s^-) < s^-$ имеет характерный вид S_4 , (фиг. 4). Он пересекает все траектории, на которых $s(\infty) < s_0(s^0)$. Поэтому решения 12-го типа содержат скачок на значение $s^+ < s^-$. Из (4.2) следует, что линии S_3 и S_4 имеют одну общую точку с каждой из пересекаемых ими интегральных кривых. Обозначим соответствующее значение s^+ через s_0^+ , а значение s^- — через s_0^- . Тогда решения описываются структурной формулой (5.3).

Задача о распаде произвольного разрыва для случая несжимаемых фаз исследована в [12].

При учете сжимаемости одной из фаз структура зоны вытеснения значительно усложняется: в решениях 1, 2, 7–10-го типов присутствуют два скачка насыщенности, а в решениях 5–6-го типов — три скачка. Невозможная зона перед фронтом вытеснения, характерная для случая несжимаемых фаз, имеет место только при $s_0 = 1$ и $0 < s_0 < s_*$. В остальных случаях насыщенность перед фронтом вытеснения убывает.

Авторы благодарят В. И. Марона за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muskat M., Meres M. W. Flow of heterogeneous fluids through porous media // Physics. 1936. V. 7. № 9. P. 346–363.
2. Buckley S. E., Leverett M. C. Mechanism of Fluid displacement in sands // Trans. AIME. 1942. V. 146. P. 107–116.
3. Muskat M. Physical Principles of Oil Production // N. Y.: McGraw-Hill, Inc. 1949. 922 p. (Рус. перев.: Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М.: Гостоптехиздат, 1953. 608 с.).
4. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. 545 с.
5. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М. Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
6. Осипова Г. А., Рассохин Г. В., Цыбульский Г. П. Одномерная задача о непоршневом вытеснении газа водой с учетом капиллярных сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 1. С. 68–73.
7. Филинов М. В., Марон В. И., Розлин И. М. Об учете сжимаемости при фильтрации многофазной жидкости // Тр. Моск. ин-та нефтехим. и газ. пром-сти. 1969. Вып. 79. С. 37–45.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука. 1973. Т. 1. 536 с.

9. Бармин А. А., Куликовский А. Г. О разрывных решениях в механике сплошной среды // Некогор. вопр. мех. сплош. среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 70–88.
10. Рыжик В. М., Чарный И. А., Чэнь Чжунсян. О некоторых точных решениях уравнений нестационарной фильтрации двухфазной жидкости // Изв. АН СССР. Мех. и маш. 1961. № 1. С. 121–126.
11. Олейник О. А. Об одном классе разрывных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Науч. докл. высш. школы. физ.-мат. науки. 1958. № 3. С. 91–98.
12. Лурье М. В., Максимов В. М., Филинов М. В. Исследование различных случаев взаимного вытеснения несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Инж.-физ. журн. 1981. Т. 41. № 4. С. 656–662.
13. Бедриковецкий П. Г. Двухфазная трехкомпонентная фильтрация при вытеснении нефти раствором активной примеси // ПМТФ. 1983. № 5. С. 121–130.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1989