

УДК 532.54:532.516.5

© 1990 г.

ШРАГЕР Г. Р., ЩЕРБАКОВА И. В.

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПРОЦЕССЕ ЗАПОЛНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЕМКОСТЕЙ

Исследуется осесимметричное течение высоковязкой несжимаемой жидкости, осуществляемое в процессе заполнения пространства между полубесконечными вертикальными коаксиальными цилиндрами. Жидкость при этом стекает в емкость по поверхности внутреннего цилиндра с постоянным расходом. Рассматриваемое течение характеризуется наличием свободной поверхности.

Задача формулируется в приближении ползущего движения и решается численным методом. В результате численного решения проведено исследование гидродинамики процесса заполнения, включающего этап растекания жидкости по горизонтальной плоскости и этап заполнения после касания стенки внешнего цилиндра фронтом свободной поверхности. Выявлены основные особенности процесса заполнения.

1. Постановка задачи. В приближении ползущего движения рассматриваемое течение описывается уравнениями

$$\mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0, \quad \mu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \Delta p = 0, \quad (1.1)$$

Третье уравнение (1.1) — следствие первых двух и условия несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Здесь z, r — координаты цилиндрической системы координат, u, v — составляющие вектора скорости в направлении z, r соответственно, μ — динамический коэффициент вязкости, p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, \mathbf{V} — вектор скорости.

На свободной поверхности граничные условия без учета капиллярных сил записываются в виде

$$\mathbf{s} \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) = -p_0, \quad \mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{\Pi}$ — тензор напряжений; \mathbf{I} — единичный тензор; \mathbf{E} — тензор скоростей деформаций; $p_0 = \text{const}$ — внешнее давление.

На стенках и дне емкости используются условия прилипания

$$u = v = 0, \quad 0 \leq z < \infty, \quad r = R_1; \quad 0 \leq z < \infty, \quad r = R_2 \quad (1.3)$$

$$z = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

где R_1, R_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно. Вдали от дна емкости жидкость поступает с постоянным расходом Q , профиль скорости при этом совпадает с решением задачи об установившемся течении в слое жидкости постоянной толщины, стекающем по вертикальной цилиндрической поверхности [1]. Таким образом, граничные условия на бесконечности имеют вид

$$u = a \left(r^2 - R_1^2 - 2 \ln \frac{r}{R_1} \right), \quad v = 0, \quad Q = \text{const}, \quad a > 0 \quad (1.4)$$

$$z \rightarrow \infty, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

где R_0 — радиус поверхности, задающий толщину слоя жидкости на поверхности внутреннего цилиндра при $z \rightarrow \infty$.

Свободная поверхность изменяется со временем в соответствии с кинематическим условием

$$\frac{dz}{dt} = u, \quad \frac{dr}{dt} = v \quad (1.5)$$

где t — время.

В начальный момент времени слой жидкости находится на поверхности внутреннего цилиндра, свободная поверхность — цилиндрическая поверхность радиуса R_0 . При выборе R_0 необходимо учитывать, что толщина слоя жидкости в случае стабилизированного течения определяется отношением вязких и гравитационных сил и радиусом внутреннего цилиндра.

Для эквивалентности решения задачи (1.1)–(1.4) решению задачи с использованием уравнения неразрывности вместо третьего уравнения (1.1) требуется выполнение уравнения неразрывности на границах [2].

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.6)$$

Выполнение уравнения (1.6) на границах гарантирует консервативность поля скорости внутри области.

Рассматриваемое течение характеризуется наличием движущейся линии трехфазного контакта, на которой условия на свободной поверхности оказываются несовместимыми с условиями прилипания на твердой стенке при углах смачивания $\theta \neq 0, \pi$ [3]. Для устранения возникающего при этом противоречия в [4, 5] предлагается использовать условие проскальзывания на твердой стенке вблизи линии контакта, в [6] получено асимптотическое решение задачи о движении жидкости вдоль твердой стенки, содержащее в качестве параметра угол наклона свободной границы на расстоянии h от стенки, где h выбирается предельно малым с точки зрения применимости гидродинамического описания.

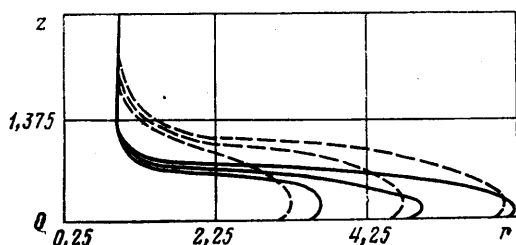
В работе [3] при угле смачивания $\theta = \pi$ дано асимптотическое решение, при этом касательное напряжение на стенке имеет интегрируемую особенность, а скорость диссипации энергии вблизи точки контакта конечна. В данной работе рассматривается течение высоковязкой жидкости без учета капиллярных сил, в этом случае динамический угол смачивания близок к π [7]. Предполагается, что свободная поверхность накатывается на твердую стенку, приликая к ней. Вычислительный эксперимент и тестирование получаемого численного решения подтверждают правомерность такого подхода.

2. Метод расчета. Решение поставленной задачи находится разностным методом в конечной области, при этом граница, на которой заданы условия (1.4), должна быть достаточно удалена от уровня заполнения. Разностные аналоги уравнений (1.1) записываются на сетке, которая содержит нерегулярные узлы в окрестности свободной поверхности. Для их решения используется итерационный метод Гаусса — Зейделя. Первое из условий (1.2) совместно с условием несжимаемости (1.5) на свободной поверхности записывается в локальной ортогональной системе координат в виде, предложенном в [8], что позволяет использовать схемы бегущего счета для расчета составляющих вектора скорости. Для точного выполнения разностного аналога условия несжимаемости внутри расчетной области на каждой итерации используется корректирующая процедура [9], заключающаяся во введении потенциала поправочной скорости. Использование этой процедуры для перерасчета скоростей, полученных из разностных аналогов первых двух уравнений из (1.1), обеспечивает соленоидальность поля вектора скорости на все время течения без накопления ошибки. Граничные значения давления на поверхности внутреннего и внешнего цилиндров находятся из разностного аналога второго из уравнений (1.1), а на горизонтальной плоскости — из разностного аналога первого из уравнений (1.1) с учетом условия (1.6). На свободной поверхности давление находится из разностного аналога второго условия (1.2). Численным интегрированием условий (1.5) определяются положение и форма свободной поверхности с течением времени.

3. Растекание слоя жидкости по горизонтальной плоскости. Процесс заполнения емкости можно разделить на два этапа. Первый этап — растекание жидкости по дну емкости до момента натекания жидкости на

внешнюю границу емкости, второй этап — последующее заполнение емкости. На первом этапе жидкость растекается по горизонтальной плоскости с формированием слоя жидкости определенной толщины, на втором этапе фронт свободной поверхности движется в направлении оси z .

Рассмотрим вначале процесс растекания с формированием слоя жидкости на горизонтальной плоскости. Течение вязкой жидкости с малой относительной толщиной слоя рассматривается в ряде работ [10—14]. Имеются попытки численного решения задачи о растекании столба жидкости под действием силы тяжести [15—17]. При обсуждении результатов



Фиг. 1

воспользуемся безразмерным комплексом $W = \rho g R_0^2 / \mu u_0$, характеризующим отношение вязких и гравитационных сил. Здесь $u_0 = Q / \pi (R_0^2 - R_1^2)$ — средняя скорость поступления жидкости при $z \rightarrow \infty$. Рассматриваемое течение кроме W определяется безразмерным радиусом цилиндрического стержня $R_1' = R_1 / R_0$ (штрих в обозначениях безразмерных величин в дальнейшем будем опускать). Эволюция свободной поверхности в процессе растекания для различных значений W при $R_1 = 0,25$ изображена на фиг. 1, сплошные линии соответствуют $W = 24,7$, штриховые — $W = 2,5$. Формируемый на горизонтальной плоскости слой имеет клиновидную форму и толщина слоя, при прочих равных условиях, растет с уменьшением W .

В работе [13] представлено приближенное уравнение для толщины слоя, формирующегося при растекании вязкой жидкости по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести, имеющее вид

$$h_t = \frac{g\rho}{3\mu} \nabla (h^3 \nabla h) \quad (3.1)$$

Автомодельное решение уравнения (3.1) для случая растекания осесимметричного пятна, в центре которого осуществляется постоянный приток жидкости интенсивностью Q , дает выражение для радиуса пятна в виде [18, 13]

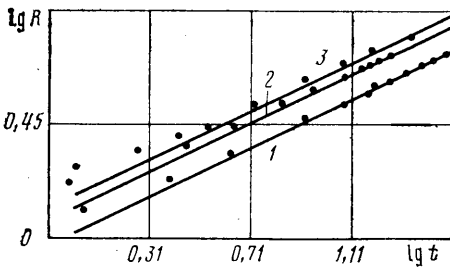
$$R = A Q^{1/3} \left(\frac{g\rho}{\mu} \right)^{1/3} t^{1/3} \quad (3.2)$$

где A — безразмерная универсальная константа (по экспериментальным данным работы [12], $A = 0,65$).

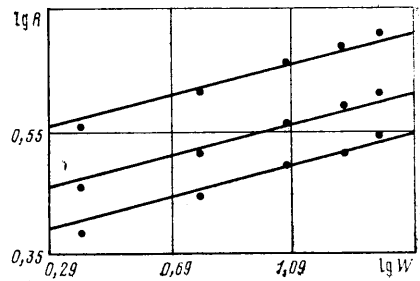
На стадии растекания, когда диаметр слоя жидкости превосходит его толщину, влияние течения в зоне перехода и наличия боковой твердой стенки на движение переднего фронта слоя перестает быть существенным, и задача описания процесса растекания может быть сформулирована с использованием уравнения (3.1) аналогично работе [18]. Таким образом, предполагая выполнение зависимости (3.2) в рассматриваемом случае при малой относительной толщине слоя, можно записать безразмерный аналог (3.2) в виде

$$R = B W^{1/3} t^{1/3}, \quad B = A (1 - R_1^2)^{1/3} \pi^{1/3} \quad (3.3)$$

Зависимости, характеризующие изменение радиуса слоя со временем при различных W , представлены на фиг. 2: 1 — $W = 2,5$, 2 — $W = 12,3$, 3 —



Фиг. 2



Фиг. 3

$W=24,7$ ($R_1=0,25$). Точками на фиг. 2 изображены результаты расчетов, сплошные линии — прямые с наклоном 0,5. Результаты расчетов подтверждают закон $R \sim t^{1/2}$ и дают возможность определить момент времени, с которого закон начинает действовать. Отклонение точек в начальный момент времени вызвано существенной неоднородностью течения в зоне перехода от вертикального течения к горизонтальному, влиянием боковой стенки, невыполнением условия малости относительной толщины слоя, т. е. невыполнением основных предположений, при которых получено выражение (3.2). Для того чтобы подтвердить справедливость решения (3.3) при достаточно больших временах, необходимо исследовать зависимость R от W .

На фиг. 3 точками показаны результаты расчетов, характеризующие зависимость радиуса слоя от W при $R_1=0,25$: сплошные линии — прямые с наклоном 0,125 ($1-t=13,4$; $2-t=8,1$; $3-t=5,7$). Результаты расчетов удовлетворительно подтверждают закон $R \sim W^{1/5}$. Расчеты, выполненные при $R_1=0,625$ и $2,5 \leq W \leq 25$, также подтверждают справедливость решения (3.3) при достаточно больших временах. Разница между значениями R , полученными в результате расчетов и из выражения (3.3), не превышает 10%.

4. Гидродинамика заполнения. При рассмотрении процесса заполнения на втором этапе, т. е. с момента натекания жидкости на внешнюю границу емкости, течение будет определяться также безразмерным радиусом внешнего цилиндра R_2 . На фиг. 4 изображена эволюция свободной поверхности при заполнении емкости с $R_1=0,25$, $R_2=2,5$ при $W=12,3$ (кривые 1–5 соответствуют значениям времени $t=3,2$; 7,3; 14,7; 21,9; 29,1). На данном этапе заполнения можно выделить две стадии течения. На первой стадии форма свободной поверхности устанавливается до вида, характерного для процесса заполнения при заданных определяющих параметрах. На второй стадии течения форма свободной поверхности не изменяется.

Для исследования кинематической картины течения в процессе заполнения в алгоритме расчета используются частицы-маркеры.

Совокупность частиц вводится в поток в любой момент времени и в любом сечении, определяя в потоке некоторую реперную поверхность.

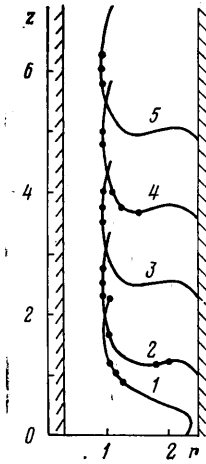
Уравнения движения частиц имеют вид

$$\frac{dz_p^a}{dt} = u_p^a, \quad \frac{dr_p^a}{dt} = v_p^a$$

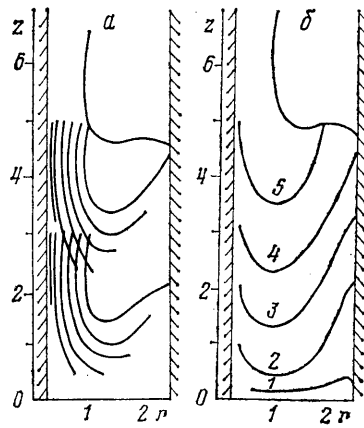
$$p=1, \dots, N, \quad q=1, \dots, N_1$$

где N — число частиц в одном репере, N_1 — число реперов.

Координаты частиц в потоке определяются численным интегрированием системы уравнений (4.1), скорости в правых частях (4.1) при этом находятся линейной интерполяцией значений скорости жидкости из ближайших к частице узлов расчетной сетки.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5, а изображены траектории частиц в потоке при заполнении емкости с $R_1=0,25$, $R_2=2,5$ при $W=12,3$ в момент времени $t=27,3$. Нижний репер введен в поток на входной границе при $z=3$ в момент времени $t=6,1$, верхний репер — при $z=5,1$, $t=18,3$. Пристенная струя жидкости, попадая в заполненное жидкостью пространство, довольно быстро затухает, и жидкость по мере приближения к внешней стенке начинает двигаться в направлении оси z . Глубина проникновения струи в заполненное пространство носит ограниченный характер, а на дне емкости образуется практически застойная зона, увеличивающаяся по мере заполнения. Совокупность частиц образует в потоке некоторую поверхность. Поверхности разделяют в потоке порции жидкости, поступающие в емкость в определенные промежутки времени.

На фиг. 5, б изображены поверхности, образуемые совокупностями частиц, введенными в поток на входной границе в определенные моменты времени (кривые 1—5 соответствуют положению входной границы при $z=2,25$; 3; 4,13; 5,1; 6,25 в моменты времени $t=0$; 6,1; 12,2; 18,3; 24,4). Пространственное распределение порций жидкости, изображенное на фиг. 5, б, соответствует времени $t=29,1$. Картина распределения порций имеет упорядоченный вид, что соответствует установившемуся характеру заполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З. П., Байков В. И. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника, 1979. 295 с.
2. Васенин И. М., Нефедов А. П., Шрагер Г. Р. Метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Числ. методы мех. сплош. среды. Новосибирск. 1985. Т. 16. № 6. С. 28—43.
3. Пухначев В. В., Солонников В. А. К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 961—971.
4. Dussan V. E. The moving contact line: the slip boundary condition // J. Fluid Mech. 1976. V. 77. P. 665—684.
5. Hocking L. M. A moving fluid interface. Pt 2. The removal of the singularity by a slip flow // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. P. 209—229.
6. Волнов О. В. Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 76—84.
7. Hoffman R. A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid-gas systems // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 50. № 2. P. 228—241.
8. Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 2. С. 295—298.
9. Прахт У. Неявный метод расчета ползущего движения с приложением к задаче

- о континентальном дрейфе // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 174–182.
10. *Марон В. И.* Растекание вязкой жидкости по горизонтальной плоскости в поле тяжести // Изв. вузов. Нефть и газ. 1967. № 3. С. 81–84.
 11. *Воинов О. В.* Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
 12. *Зацепин А. Г., Костяной А. Г., Шапиро Г. И.* Медленное растекание вязкой жидкости по горизонтальной поверхности // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 1. С. 193–195.
 13. *Шапиро Г. И.* О растекании вязкой жидкости по горизонтальной поверхности // ПМТФ. 1983. № 3. С. 45–48.
 14. *Хусид Б. М.* Растекание неньютоновской жидкости по горизонтальной плоскости с интенсивными процессами тепло- и массообмена на поверхности слоя // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 44. № 1. С. 51–60.
 15. *Pracht W. E.* A numerical method for calculating transient creep flows // J. Comput. Phys. 1971. № 7. P. 46–60.
 16. *Березин И. К.* Численное решение задачи о ползущем движении жидкости со свободной поверхностью // Исследования по механике полимеров и систем. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1978. С. 3–8.
 17. *Ищенко В. П., Масленников В. Н., Терентьева И. А., Шрагер Г. Р.* Растекание вязкой жидкости под действием силы тяжести // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. № 6. С. 1013.
 18. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. № 1. С. 67–78.

Томск

Поступила в редакцию
23.X.1988