

УДК 532.529.5:532.517.4  
© 1990 г.

КОНДРАТЬЕВ Л. В., ШОР В. В.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ В ТРУБЕ С УЧЕТОМ СОУДАРЕНИЯ СО СТЕНКОЙ И ВРАЩЕНИЯ ЧАСТИЦ**

При турбулентном течении газозвеси в трубе происходит интенсивное взаимодействие частиц со стенкой [1–3], которое в зависимости от условий течения может оказывать существенное влияние на структуру потока. В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал по осредненным и пульсационным характеристикам турбулентных течений типа газ – твердые частицы в трубе. Однако его теоретическое обобщение еще далеко от окончательного завершения, поскольку практически во всех работах, посвященных моделированию таких течений, взаимодействие частиц со стенкой трубы, их вращение и действие силы Магнуса не рассматриваются.

В [2] на основе анализа характера движения дисперсной фазы и интенсивности взаимодействия частиц со стенкой трубы выделены три основных режима турбулентного течения газозвеси. Первый режим, названный диффузионным, характеризуется малой инерционностью частиц, незначительным скоростным скольжением фаз, равномерным распределением концентрации дисперсной фазы по сечению трубы. Интенсивность взаимодействия частиц со стенкой мала. Третий, названный режимом скачкообразного движения, характеризуется большой инерционностью частиц, практически равномерным распределением скорости дисперсной фазы, интенсивным взаимодействием частиц со стенкой трубы, большим скоростным скольжением фаз. Максимум профиля концентрации дисперсной фазы находится на оси трубы. При этом режиме частицы, соударяясь со стенкой, приобретают значительные угловые скорости вращения и в результате действия силы Магнуса совершают постоянные скачкообразные движения от стенки к стенке. Второй режим, промежуточный, характеризуется умеренной интенсивностью взаимодействия частиц со стенкой трубы.

Большинство разработанных моделей турбулентного течения газозвеси в трубе ограничено случаем малоинерционных частиц (см., например, [4–6]), когда скоростной неравномерностью фаз и взаимодействием частиц со стенкой трубы можно пренебречь. Используемые в работах [4–6] допущения при постановке рассматриваемой задачи приемлемы для течений с малоинерционными частицами, когда число Стокса  $Stk = \tau u_{gm} / R$  не превышает величины порядка единицы. Здесь  $\tau$  – время релаксации поступательного движения частицы,  $u_{gm}$  – средняя скорость газа,  $R$  – радиус трубы.

С увеличением инерционности частиц и усилением влияния гравитации односкоростное приближение становится неприемлемым [1, 2]. В работах [7, 8] скоростное скольжение фаз учитывается. Однако его учет проводится только в ядре потока, причем в [8] граничное условие для скорости частиц у стенки трубы задано некорректно. Поэтому применимость моделей [7, 8] также ограничена случаем малоинерционных частиц. Для описания течений с тяжелыми частицами в настоящее время разработаны упрощенные модели типа [1, 3], основанные на интегральных методах. При этом профили параметров фаз задаются и задача упрощается до одномерной вдоль оси трубы, частота соударения частиц со стенкой определяется, исходя из физических соображений, вращение частиц и действие силы Магнуса не рассматриваются, что ограничивает область применимости моделей такого рода.

В настоящей работе предложена модель турбулентного течения газозвеси в трубе, в которой учитывается скоростное скольжение фаз, взаимодействие со стенкой и вращение частиц. Учет действия силы Магнуса позволил описать явление интенсивного поперечного скачкообразного движения частиц и получить хорошее совпадение результатов расчетов с опытными данными в широком диапазоне условий течения. Модель основана на использовании уравнений переноса осредненных параметров течения и корреляционных моментов, описывающих турбулентный перенос импульса и момента импульса дисперсной фазы.

**1. Математическая модель.** Рассматривается турбулентное изотермическое течение газа с монодисперсными твердыми сферическими части-

цами в трубе. Объемная доля дисперсной фазы мала, поэтому столкновения между частицами не учитываются. Актуальные уравнения переноса массы и импульса фаз [9], а также угловой скорости вращения частиц для условий рассматриваемого течения имеют вид

$$\frac{\partial \rho_n^\circ}{\partial t} + \nabla (\rho_n^\circ \mathbf{V}_n^\circ) = 0; \quad n = g, p \quad (1.1)$$

$$\rho_g^\circ \frac{\partial \mathbf{V}_g^\circ}{\partial t} + \rho_g^\circ (\mathbf{V}_g^\circ \nabla) \mathbf{V}_g^\circ = -\nabla p^\circ + \nabla \sigma^\circ - \mathbf{F}^\circ + \rho_g^\circ \mathbf{g} \quad (1.2)$$

$$\rho_p^\circ \frac{\partial \mathbf{V}_p^\circ}{\partial t} + \rho_p^\circ (\mathbf{V}_p^\circ \nabla) \mathbf{V}_p^\circ = \mathbf{F}^\circ + \rho_p^\circ \mathbf{g} \quad (1.3)$$

$$\rho_p^\circ \frac{\partial \omega^\circ}{\partial t} + \rho_p^\circ (\mathbf{V}_p^\circ \nabla) \omega^\circ = \mathbf{M}^\circ \quad (1.4)$$

Здесь  $t$  — время,  $\rho$  — распределенная плотность,  $\mathbf{V}$  — скорость,  $\omega$  — угловая скорость вращения частиц,  $p$  — давление,  $\sigma$  — тензор вязких напряжений,  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести, индекс  $g$  относится к параметрам газа,  $p$  — частиц, индекс ноль указывает актуальное значение. В условиях рассматриваемой задачи интенсивность межфазного взаимодействия  $\mathbf{F}$  определяется [2] силой аэродинамического сопротивления  $\mathbf{F}_\mu$  и силой Магнуса  $\mathbf{F}_m$ , а момент  $\mathbf{M}$  — сопротивлением вследствие вязкого трения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^\circ &= \mathbf{F}_\mu^\circ + \mathbf{F}_m^\circ, \quad \mathbf{F}_\mu^\circ = \frac{1}{\tau} \rho_p^\circ (\mathbf{V}_g^\circ - \mathbf{V}_p^\circ) \\ \mathbf{F}_m^\circ &= \lambda \rho_p^\circ (\mathbf{V}_g^\circ - \mathbf{V}_p^\circ) \times (\omega^\circ - \Omega^\circ), \quad \mathbf{M}^\circ = \beta \rho_p^\circ (\Omega^\circ - \omega^\circ) \\ \Omega^\circ &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V}_g^\circ, \quad \tau = \frac{4 \rho_p^* \delta^2}{3 \rho_g^* \nu \text{Re}_p c_\mu} \\ \beta^{-1} &= \frac{\rho_p^* \delta^2}{60 \rho_g^* \nu}, \quad \lambda = \frac{3}{8} c_m \frac{\rho_g^*}{\rho_p^*}, \quad \text{Re}_p = \frac{\delta |\mathbf{V}_g^\circ - \mathbf{V}_p^\circ|}{\nu} \end{aligned}$$

Здесь  $\rho^*$  — истинная плотность,  $\nu$  — коэффициент молекулярной кинематической вязкости газа,  $\delta$  — диаметр частиц. В расчетах коэффициент аэродинамического сопротивления  $c_\mu$  задавался по стандартной кривой сопротивления [1, 9].

В результате временного осреднения (1.1)–(1.4) получена следующая система уравнений, описывающая в приближении узкого канала осесимметричное турбулентное течение газозвеси в трубе:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_g u_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_g v_g) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_p u_p) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p v_p^*) = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho_g u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + \rho_g v_g \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \rho_g \left( \nu \frac{\partial u_g}{\partial r} - \langle u_g' v_g' \rangle \right) \right] - \frac{dp}{dx} - F_x + \rho_g g_x \quad (1.7)$$

$$\rho_p u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial u_p}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle u_p' v_p' \rangle) + F_x + \rho_p g_x \quad (1.8)$$

$$\rho_p u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial v_p}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle v_p'^2 \rangle) + \frac{\rho_p}{r} \langle w_p'^2 \rangle + F_r \quad (1.9)$$

$$\rho_p u_p \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle \omega_z' v_p' \rangle) -$$

$$-\frac{\rho_p}{r} \langle \omega_r' w_p' \rangle - \beta \rho_p \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_g}{\partial r} + \omega_\varepsilon \right) \quad (1.10)$$

$$\rho_p v_p^* = \rho_p v_p + \langle \rho_p' v_p' \rangle, \quad \langle \rho_p' v_p' \rangle = -D_p \frac{\partial \rho_p}{\partial r}, \quad \langle u_g' v_g' \rangle = -v_t \frac{\partial u_g}{\partial r}$$

$$F_x = \frac{1}{\tau} \rho_p (u_g - u_p) - \lambda \rho_p [\langle v_p' \omega_\varepsilon' \rangle - \langle w_p' \omega_r' \rangle - (v_g - v_p) \left( \omega_\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial u_g}{\partial r} \right)]$$

$$F_r = \frac{1}{\tau} \rho_p (v_g - v_p^*) - \lambda \rho_p (u_g - u_p) \left( \omega_\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial u_g}{\partial r} \right)$$

Здесь  $x, r, \varepsilon$  — оси цилиндрической системы координат;  $u, v, w$  — проекции скорости на оси  $x, r, \varepsilon$ ;  $\omega_r, \omega_\varepsilon$  — проекции угловой скорости вращения частиц на оси  $r, \varepsilon$ ;  $g_x$  — проекция вектора  $\mathbf{g}$  на ось  $x$ ;  $v_t$  — коэффициент турбулентной кинематической вязкости газа;  $D_p$  — коэффициент турбулентной диффузии частиц. Для невертикального течения газозвеси, когда  $|g_x| \neq |\mathbf{g}|$ , модель приемлема, если осевая симметрия течения не нарушается.

Для определения пульсационных характеристик несущей фазы использовалась однопараметрическая модель турбулентности [10], обобщенная на случай двухфазного течения. Уравнение переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций скорости газа  $E$  имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_g u_g \frac{\partial E}{\partial x} + \rho_g v_g \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \rho_g \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \\ + \rho_g \left[ v_t \left( \frac{\partial u_g}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon - \varepsilon_p \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$v_t = c_v f_v E^{1/2} L, \quad \varepsilon = c_\varepsilon f_\varepsilon \frac{E^{3/2}}{L} + \frac{2\nu E}{y^2}, \quad y = R - r$$

$$f_v = f_\varepsilon = 1 - \exp(-A_m E^{1/2} y / \nu), \quad L = 0,14R - 0,08r^2 - 0,06r^4$$

где  $L$  — пространственный масштаб турбулентности;  $\sigma_k, c_v, c_\varepsilon, A_m$  — эмпирические постоянные модели [10]. В (1.11) член  $\varepsilon_p = \langle F_i' V_{gi}' \rangle / \rho_g$  описывает диссипацию пульсационной энергии под действием межфазной силы. Методика его определения представлена в [7]. Учет влияния скоростного скольжения фаз на интегральной временной масштаба турбулентности  $T$  проводился аналогично [1]

$$\varepsilon_p = \frac{\rho_p}{\tau \rho_g} (2E - \langle V_{gi}' V_{pi}' \rangle), \quad \langle u_g'^2 \rangle = 2 \langle v_g'^2 \rangle = 2 \langle w_g'^2 \rangle \quad (1.12)$$

$$f_\tau = \exp\left(\frac{T^2}{\pi \tau^2}\right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{T}{\sqrt{\pi} \tau}\right) \right] \frac{T}{\tau}, \quad T = \frac{L}{(E^{1/2} + |u_g - u_p|)}$$

Граничные условия для уравнений (1.5)–(1.11) задавались на оси течения и у стенки трубы

$$\begin{aligned} r=0: \quad \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{\partial u_p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial r} = 0, \quad v_g = v_p = 0, \quad \omega_\varepsilon = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \\ r=R: \quad u_g = 0, \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial r} = 0, \quad E = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для замыкания системы уравнений (1.5)–(1.11) необходимо определить корреляционные моменты  $\langle u_p' v_p' \rangle, \langle v_p'^2 \rangle, \langle w_p'^2 \rangle, \langle \omega_\varepsilon' v_p' \rangle, \langle w_r' w_p' \rangle$ . Указанные корреляции описывают турбулентный перенос импульса и момента импульса дисперсной фазы, который в режиме интенсивного по-

перечного движения частиц вносит значительный вклад в формирование структуры течения.

В настоящее время разработано несколько способов определения корреляций типа  $\langle V_{pi}'V_{pj}' \rangle$ , например [4, 6–9, 11]. Однако в этих работах корреляционный момент  $\langle V_{pi}'V_{pj}' \rangle$  выражается в основном через корреляцию  $\langle V_{gi}'V_{gj}' \rangle$  в данной точке с учетом инерционности частиц и временного масштаба турбулентности. При этом в [4, 6–9] учитывается действие лишь силы аэродинамического сопротивления. В [11] корреляция  $\langle \omega_e'v_p' \rangle$  определена аналогичным образом. Используемый в [4, 6–9, 11] метод определения корреляционных моментов через параметры течения в данной точке не позволяет учесть влияние соударения частиц со стенкой трубы, в результате которого частицы приобретают значительные угловые скорости вращения. В связи с этим область применимости полученных в [4, 6–9, 11] выражений для моментов типа  $\langle V_{pi}'V_{pj}' \rangle$ ,  $\langle \omega_i'V_{pj}' \rangle$  ограничена случаем малоинерционных частиц, которые хорошо вовлекаются в пульсационное движение газа.

В данной работе предложен способ определения корреляций, описывающих турбулентный перенос импульса и момента импульса дисперсной фазы, который основан на построении уравнений переноса искомых корреляционных моментов и их решении. При этом учитывается вращение частиц, действие силы аэродинамического сопротивления и силы Магнуса, а также взаимодействие дисперсной фазы со стенкой трубы.

Уравнения переноса корреляций типа  $\langle V_{pi}'V_{pj}' \rangle$ ,  $\langle \omega_k'V_{pj}' \rangle$ , а также  $\langle \omega_k'^2 \rangle$  были получены путем использования процедур Фридмана – Келлера из актуальных уравнений сохранения массы, импульса и момента импульса дисперсной фазы (1.1), (1.3), (1.4). В приближении узкого канала для осесимметричного течения уравнения переноса корреляций  $\langle u_p'v_p' \rangle$ ,  $\langle v_p'^2 \rangle$ ,  $\langle w_p'^2 \rangle$ ,  $\langle \omega_e'v_p' \rangle$ ,  $\langle w_r'w_p' \rangle$ ,  $\langle \omega_e'^2 \rangle$  и  $\langle \omega_r'^2 \rangle$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_p u_p \frac{\partial \langle u_p'v_p' \rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial \langle u_p'v_p' \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle u_p'v_p'^2 \rangle) + \\ + \frac{\rho_p}{r} \langle u_p'w_p'^2 \rangle - \rho_p \langle v_p'^2 \rangle \frac{\partial u_p}{\partial r} + \frac{\rho_p}{\tau} (\langle u_p'v_g' \rangle + \langle u_g'v_p' \rangle - 2 \langle u_p'v_p' \rangle) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \rho_p u_p \frac{\partial \langle v_p'^2 \rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial \langle v_p'^2 \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle v_p'^2 \rangle) + \frac{2}{r} \rho_p \langle w_p'^2 v_p' \rangle - \\ - 2 \rho_p \langle v_p'^2 \rangle \frac{\partial v_p}{\partial r} + \frac{2}{\tau} \rho_p (\langle v_g'v_p' \rangle - \langle v_p'^2 \rangle) - 2 \lambda \rho_p (u_g - u_p) \langle \omega_e'v_p' \rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \rho_p u_p \frac{\partial \langle w_p'^2 \rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial \langle w_p'^2 \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle w_p'^2 v_p' \rangle) - \\ - \frac{2}{r} \rho_p (\langle w_p'^2 v_p' \rangle + \langle w_p'^2 v_p \rangle) + \frac{2}{\tau} \rho_p (\langle w_g'w_p' \rangle - \langle w_p'^2 \rangle) + \\ + 2 \lambda \rho_p (u_g - u_p) \langle \omega_r'w_p' \rangle \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \rho_p u_p \frac{\partial \langle \omega_e'v_p' \rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial \langle \omega_e'v_p' \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle \omega_e'v_p'^2 \rangle) + \\ + \frac{1}{r} \rho_p (\langle \omega_e'w_p'^2 \rangle - \langle \omega_r'w_p'v_p' \rangle) - \rho_p \langle v_p'^2 \rangle \frac{\partial \omega_e}{\partial r} - \\ - \left( \beta + \frac{1}{\tau} \right) \rho_p \langle \omega_e'v_p' \rangle - \lambda \rho_p (u_g - u_p) \langle \omega_e'^2 \rangle \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \rho_p u_p \frac{\partial \langle \omega_r'w_p' \rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial \langle \omega_r'w_p' \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_p \langle \omega_r'w_p'v_p' \rangle) + \\ + \frac{1}{r} \rho_p (\langle \omega_e'w_p'^2 \rangle - \langle \omega_r'w_p'v_p' \rangle + \langle w_p'^2 \omega_e \rangle) - \end{aligned}$$

$$-\left(\beta + \frac{1}{\tau}\right)\rho_p\langle\omega_r'w_p'\rangle + \lambda\rho_p(u_g - u_p)\langle\omega_r''\rangle \quad (1.18)$$

$$\rho_p u_p \frac{\partial\langle\omega_e''\rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial\langle\omega_e''\rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho_p\langle\omega_e''v_p'\rangle) - \frac{2}{r} \rho_p\langle\omega_e'w_r'w_p'\rangle - 2\rho_p\langle\omega_e'v_p'\rangle \frac{\partial\omega_e}{\partial r} - 2\beta\rho_p\langle\omega_e''\rangle \quad (1.19)$$

$$\rho_p u_p \frac{\partial\langle\omega_r''\rangle}{\partial x} + \rho_p v_p^* \frac{\partial\langle\omega_r''\rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho_p\langle\omega_r''v_p'\rangle) + \frac{2}{r} \rho_p(\langle\omega_e'w_r'w_p'\rangle + \langle\omega_r'w_p'\rangle\omega_e) - 2\beta\rho_p\langle\omega_r''\rangle \quad (1.20)$$

Рассмотрим физический смысл членов уравнений (1.14)–(1.20) на примере уравнения переноса корреляции  $\langle v_p'' \rangle$  (1.15). Первый член правой части описывает турбулентный перенос корреляции  $\langle v_p'' \rangle$  за счет пульсации радиальной скорости частиц, второй — обмен энергией турбулентного движения частиц между компонентами  $\langle v_p'' \rangle$  и  $\langle w_p'' \rangle$  под действием пульсации тангенциальной скорости дисперсной фазы, третий — взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движений, четвертый — генерацию  $\langle v_p'' \rangle$  пульсациями скорости газа, пятый — диссипацию  $\langle v_p'' \rangle$  за счет силы аэродинамического сопротивления, шестой — генерацию (при  $u_g - u_p > 0$ , так как в этом случае момент  $\langle \omega_e' v_p' \rangle$  отрицателен) или диссипацию корреляции  $\langle v_p'' \rangle$  под действием силы Магнуса. Физический смысл членов уравнений (1.14), (1.16)–(1.20) аналогичен. Корреляции типа  $\langle V_{gi}' V_{pk}' \rangle$  в (1.14)–(1.16) задавались по соотношениям (1.12).

Дифференциальное уравнение (1.14) может быть упрощено. В бездиффузионном приближении на стабилизированном участке трубы корреляция  $\langle u_p' v_p' \rangle$  может быть выражена из (1.14) в явном виде. С учетом выражения (1.12) для моментов  $\langle u_g' v_p' \rangle$  и  $\langle u_p' v_g' \rangle$  из (1.14) получено

$$\langle u_p' v_p' \rangle = -v_p \frac{\partial u_p}{\partial r}, \quad v_p = f v_i + \frac{1}{2} \tau \langle v_p'' \rangle \quad (1.21)$$

где  $v_p$  — коэффициент турбулентного переноса импульса дисперсной фазы в радиальном направлении. Вид выражения (1.21) для корреляции  $\langle u_p' v_p' \rangle$  аналогичен полученным ранее в рамках теории пути смешения Прандтля. Использование выражения (1.21) вместо уравнения (1.14) дает хотя и незначительное упрощение всей системы уравнений, однако приводит к заметному повышению устойчивости при численном решении задачи, так как уравнение (1.8) становится параболическим. Получаемое при этом изменение результатов расчетов незначительно.

Аналогичное упрощение уравнений (1.15)–(1.20) недопустимо, поскольку в бездиффузионном приближении невозможно у оси симметрии течения, т. е. при  $r=0$ , удовлетворить следующим очевидным условиям:  $\langle v_p'' \rangle = \langle w_p'' \rangle$ ,  $\langle \omega_e' v_p' \rangle = -\langle \omega_r' w_p' \rangle$ ,  $\langle \omega_e'' \rangle = \langle \omega_r'' \rangle$ .

При определении моментов третьего порядка в (1.15)–(1.20) использовался сформулированный Буссинеском градиентный подход к описанию процессов турбулентного переноса

$$\begin{aligned} \langle V_{pi}' V_{pj}' V_{pk}' \rangle &= -1/3 (v_k \langle V_{pi}' V_{pj}' \rangle_{,k} + v_j \langle V_{pk}' V_{pi}' \rangle_{,j} + v_i \langle V_{pj}' V_{pk}' \rangle_{,i}) \\ \langle \omega_k' V_{pi}' V_{pj}' \rangle &= -1/2 (v_i \langle \omega_k' V_{pj}' \rangle_{,i} + v_j \langle \omega_k' V_{pi}' \rangle_{,j}) \\ \langle \omega_k' \omega_i' V_{pj}' \rangle &= -v_j \langle \omega_k' \omega_i' \rangle_{,j}, \quad a_{ij,\alpha} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $v_i$  — коэффициент турбулентного переноса корреляционных моментов второго порядка в направлении  $i$ -й оси. При определении корреляций (1.22) использовалось приближение узкого канала. Коэффициенты  $v_r$ ,  $v_e$ , коэффициент турбулентной диффузии частиц  $D_p$  определялись по следующим соотношениям:

$$D_p = \frac{v_p}{Sc}, \quad v_r = v_p, \quad v_e = f_\tau v_i + \frac{1}{2} \tau \langle w_p'^2 \rangle$$

где  $Sc$  — число Шмидта.

Граничные условия для уравнений (1.15)–(1.20) на оси трубы задавались исходя из условий симметрии

$$r=0: \quad \frac{\partial}{\partial r} \langle v_p'^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial r} \langle w_p'^2 \rangle = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \langle \omega_e'^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial r} \langle \omega_r'^2 \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \langle \omega_e' v_p' \rangle = \frac{\partial}{\partial r} \langle \omega_r' w_p' \rangle = 0 \quad (1.23)$$

Для определения пристеночных значений искомых корреляционных моментов необходимо описать динамику соударения частиц с поверхностью трубы и задать для частиц, взаимодействующих со стенкой, функцию распределения. В большинстве случаев течения газозвеси в трубе справедливо допущение  $u_{p1} \gg |w_{p1}|$ , где  $u_{p1}$ ,  $w_{p1}$  — аксиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы при ударе о стенку. Тогда соотношения [1], описывающие удар твердой сферической частицы о шероховатую поверхность, имеют вид

$$u_{p2} = {}^{1/7}(5+2k_\tau) u_{p1} + {}^{1/7}(1-k_\tau) \omega_{e1} \delta$$

$$\omega_{e2} = {}^{1/7}(5k_\tau+2) \omega_{e1} + {}^{10/7}(1-k_\tau) u_{p1} / \delta, \quad v_{p2} = -k_n v_{p1},$$

где  $k_n$ ,  $k_\tau$  — коэффициенты восстановления нормальной и тангенциальной скорости частиц при ударе [1] (при идеально упругом ударе об абсолютно гладкую поверхность  $k_n=1$ ,  $k_\tau=1$ ), индекс 1 соответствует значению параметра частицы до удара, 2 — после удара. Поскольку вид функции плотности распределения частиц по параметрам  $u_{p1}$ ,  $v_{p1}$ ,  $\omega_{e1}$  не оказывает существенного влияния на результат, представим ее в виде  $\delta$ -функции Дирака. Проводя осреднение по ансамблю падающих и отраженных частиц [12], получим

$$r=R: \quad \langle u_p' v_p' \rangle = (1-k_\tau) G \sqrt{k_n \langle v_p'^2 \rangle} u_p$$

$$\langle \omega_e'^2 \rangle = k_n \left[ 5G(1-k_\tau) \frac{u_p}{\delta} \right]^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \langle v_p'^2 \rangle = - \frac{(1-k_n)}{v_r \sqrt{k_n}} \langle v_p'^2 \rangle^{3/2}$$

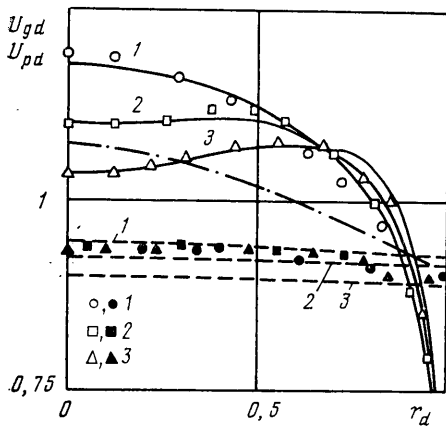
$$\langle \omega_e' v_p' \rangle = - (\langle \omega_e'^2 \rangle \langle v_p'^2 \rangle)^{1/2}, \quad \langle w_p'^2 \rangle = \frac{\langle v_p'^2 \rangle}{c_w}$$

$$\langle \omega_r'^2 \rangle = \frac{\langle \omega_e'^2 \rangle}{c_w}, \quad \langle \omega_r' w_p' \rangle = (\langle \omega_r'^2 \rangle \langle w_p'^2 \rangle)^{1/2} \quad (1.24)$$

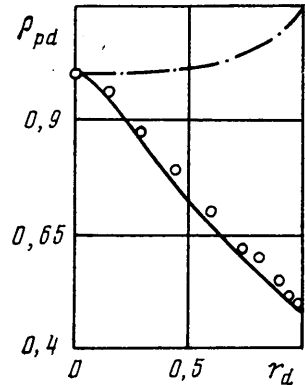
$$G = \frac{2(1+\xi)}{7(k_n+k_\tau\xi)+5(1+k_n k_\tau\xi)+2(k_\tau+k_n\xi)}, \quad \xi = - \frac{\omega_{e1}}{\omega_{e2}}$$

где  $c_w$  — эмпирическая постоянная.

Из расчетов получено: для сферических частиц  $c_w=4$ , для частиц неправильной формы  $c_w=2-3$ . Из исследований движения вращающихся частиц в трубе, например [1], известно, что  $0 < \xi < 1$ , причем для мало-



Фиг. 1



Фиг. 2

инерционных частиц  $\xi=0$ , для частиц большой инерционности  $\xi \approx 1$ . В работе использовалась следующая аппроксимация отношения  $\omega_{e1}/\omega_{e2}$ , полученная на основе анализа результатов расчета движения одиночной частицы в трубе:  $\xi=1-\exp[-(\text{Stk}/100)^2]$ .

**2. Результаты численного исследования.** Система уравнений (1.5) — (1.11), (1.15) — (1.20), дополненная уравнением состояния и условием сохранения расхода газа, с граничными условиями (1.13), (1.23), (1.24) решалась численно на ЭВМ конечно-разностным методом [13].

Неравномерная сетка задавалась таким образом, чтобы в области вязкого подслоя находилось не менее пяти точек. Представленные результаты расчетов получены на сетке, содержащей 51 узел по координате  $r$ . Увеличение числа узлов в несколько раз не приводило к заметному изменению результатов расчета, что указывает на достаточную точность вычислений.

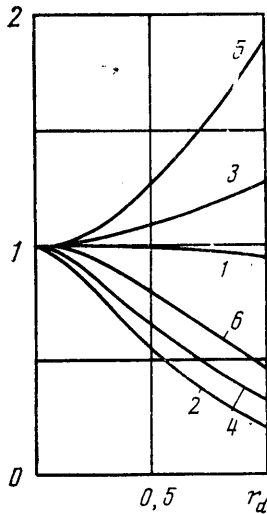
Использовался следующий набор эмпирических постоянных модели [10]:  $c_v=0,55$ ,  $c_\varepsilon=0,166$ ,  $\sigma_k=1$ ,  $A_m=0,012$ . Число Шмидта  $Sc=1$ , коэффициент  $c_m=2$ .

На фиг. 1, 2 представлено сравнение результатов расчета турбулентного течения газовой смеси в горизонтальной трубе на стабилизированном участке с экспериментальными данными [14]:  $\delta=67 \cdot 10^{-6}$  м,  $u_{gm}=30,5$  м/с,  $\rho_p^*=8500$  кг/м<sup>3</sup>,  $R=0,008$  м. В эксперименте [14] использовалась стальная труба и бронзовые частицы, для которых коэффициенты  $k_n$  и  $k_t$  задавались равными 0,92 и 0,85 соответственно. На фиг. 1 профили скорости газа  $u_{gd}=u_g/u_{gm}$  обозначены сплошными линиями, скорости частиц  $u_{pd}=u_p/u_{gm}$  — штриховыми; кривым 1—3 соответствуют отношения массового расхода частиц к расходу газа  $\kappa=1,92$ ; 6,1; 14,4. На фиг. 2 сплошной линией показан профиль распределенной плотности дисперсной фазы  $\rho_{pd}=\rho_p/\rho_p^*$  для варианта 1 (фиг. 1). Здесь и далее индекс  $z$  соответствует значению параметров на оси трубы,  $r_d=r/R$ . Для сравнения на фиг. 1, 2 штрихпунктирной линией обозначены распределения  $u_p$  и  $\rho_p$  для варианта 1 при  $k_t=1$ , т. е. без учета вращения частиц.

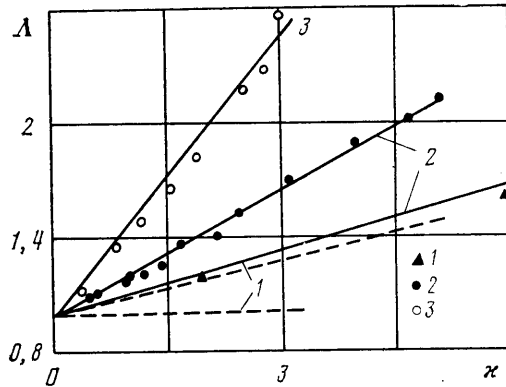
Как видно из фигур, без учета соударения частиц со стенкой их вращения и действия силы Магнуса невозможно не только количественно, но и качественно верно описать распределение параметров фаз в трубе.

С увеличением расходной концентрации частиц  $\kappa$  характер распределения скорости газа изменяется (фиг. 1). Это объясняется следующим. Поскольку максимум распределенной плотности дисперсной фазы (фиг. 2) находится на оси трубы, составляющая силы межфазного взаимодействия  $F_{\mu\kappa} \sim \rho_p(u_g - u_p)$  в приосевой области больше, чем в периферийной. С увеличением  $\kappa$  под действием этой силы скорость газа у оси уменьшается, а в пристеночной области, где  $u_p > u_g$ , увеличивается. В результате перестройки профиля скорости газа его максимум смещается от оси в периферийную область.

На фиг. 3 изображены профили корреляционных моментов параметров дисперсной фазы для условий течения, соответствующих варианту 1 на фиг. 1: 1 —  $\langle v_p'^2 \rangle / \langle v_p'^2 \rangle_z$ , 2 —  $\langle w_p'^2 \rangle / \langle v_p'^2 \rangle_z$ , 3 —  $\langle \omega_e' v_p' \rangle / \langle \omega_e' v_p' \rangle_z$ , 4 —  $\langle \omega_r' w_p' \rangle / \langle \omega_e' v_p' \rangle_z$ , 5 —  $\langle \omega_e'^2 \rangle / \langle \omega_e'^2 \rangle_z$ , 6 —  $\langle \omega_r'^2 \rangle / \langle \omega_e'^2 \rangle_z$ . При расчете данного варианта корреляции при  $r=0$  при-



Фиг. 3



Фиг. 4

нимали следующие значения:  $\langle v_p'^2 \rangle_z = 5,1 \cdot 10^{-4} u_{gm}^2$ ,  $\langle \omega_e' v_p' \rangle_z = -0,21 u_{gm}^2 / R$ ,  $\langle \omega_e'^2 \rangle_z = 89 u_{gm}^2 / R^2$ . Максимум корреляций  $\langle \omega_e' v_p' \rangle$  и  $\langle \omega_e'^2 \rangle$  находится у стенки трубы. Это объясняется тем, что при соударении частиц с шероховатой поверхностью имеет место генерация этих корреляций, описываемая в модели через соответствующие граничные условия (1.24). Корреляционный момент  $\langle v_p'^2 \rangle$  с приближением к стенке, наоборот, убывает, так как при неабсолютно упругом ударе происходит потеря кинетической энергии движения частиц в радиальном направлении.

Как показали расчеты, в случае течения газа с примесью частиц большой инерционности ( $Stk > 200$ ) в уравнении (1.9) вклад силы межфазного взаимодействия мал и им можно пренебречь. Тогда из (1.9) можно получить

$$\frac{\rho_p}{\rho_{pz}} = \frac{\langle v_p'^2 \rangle v}{\langle v_p'^2 \rangle} \exp\left(-\int_0^r \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\langle w_p'^2 \rangle}{\langle v_p'^2 \rangle}\right) dr\right) \quad (2.1)$$

Профиль концентрации дисперсной фазы определяется корреляциями  $\langle v_p'^2 \rangle$  и  $\langle w_p'^2 \rangle$ , характеризующими интенсивность движения частиц в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно. В режиме скачкообразного движения частиц корреляция  $\langle v_p'^2 \rangle$  изменяется слабо, а  $\langle w_p'^2 \rangle$  с приближением к стенке значительно убывает (фиг. 3). При этом в соответствии с (1.9) имеет место колоколообразный профиль концентрации дисперсной фазы (сплошная кривая на фиг. 2). Когда вращение частиц не учитывается, корреляции  $\langle v_p'^2 \rangle$  и  $\langle w_p'^2 \rangle$  уменьшаются на несколько порядков, причем в основной области потока  $\langle w_p'^2 \rangle \approx \langle v_p'^2 \rangle$ . В связи с этим подынтегральное выражение в (2.1) близко к нулю, а распределение концентрации частиц определяется отношением  $\langle v_p'^2 \rangle_z / \langle v_p'^2 \rangle$ . Поскольку в этом случае корреляция  $\langle v_p'^2 \rangle$  с приближением к стенке существенно уменьшается, в соответствии с (2.1) имеет место возрастание распределенной плотности дисперсной фазы у стенки трубы — штрихпунктирная кривая на фиг. 2.

На фиг. 4 показано сравнение результатов расчета коэффициента гидравлического сопротивления  $\Lambda = \lambda / \lambda_0$  с экспериментальными данными [14] (кривые 1) и [15] (кривые 2, 3). Здесь  $\lambda_0$  — коэффициент гидравлического сопротивления в однофазном случае. Условия опыта [14] описаны выше. В эксперименте [15] исследовалось вертикальное восходящее течение воздуха с примесью медных частиц:  $\delta = 103 \cdot 10^{-6}$  м,  $\rho_p^* = 8900$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 0,014$  м,  $k_n = 0,4$ ,  $k_\tau = 0,82$ ;  $2 - u_{gm} = 15,8$  м/с,  $3 - 8,37$  м/с. Для сравнения штриховыми линиями обозначены результаты расчета при  $k_\tau = 1$ , т. е. без учета вращения частиц и потери импульса при взаимодействии дисперсной фазы со стенкой трубы. Как видно из фиг. 4, для точного определения потерь давления при тении газозвеси в трубе необходимо учитывать соударения частиц со стенкой, их вращение и действие силы Магнуса.



Таким образом, предложенный метод построения математической модели течения газозвеси в трубе благодаря учету соударения со стенкой и вращения частиц позволяет получить хорошее совпадение результатов расчета с экспериментальными данными и дает возможность описать структуру потока в широком диапазоне условий течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка, 1980. 251 с.
2. Лаатс М. К. Трактат о движении частиц и дискретной фазы мелкодисперсного трубного течения (МДТТ): представления экспериментаторов // Турбулентные двухфазные течения. Таллинн, 1979. С. 60–71.
3. Михаелидис. Движение частиц в газах: средняя скорость и потери давления // Теоретические основы инженерных расчетов. 1987. Т. 109, № 2.
4. Цой Ен Дон, Чун Мён Кун. Исследование турбулентного течения в трубе газа со взвешенными твердыми частицами // Теоретические основы инженерных расчетов. 1983. Т. 105. № 3. С. 166–172.
5. Genchev ZH. D., Karpuzov D. S. Effects of the motion of dust particles on turbulence transport equations // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. Pt 4. P. 833–842.
6. Деревич И. В., Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Течение и теплообмен мелкодисперсных турбулентных потоков в каналах // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 53. № 5. С. 740–751.
7. Кондратьев Л. В. Моделирование турбулентного установившегося течения газозвеси в трубе // Теплофизические и физико-химические процессы в энергетических установках. Минск, 1986. С. 74–78.
8. Chen C. P. Calculation of confined gas-particle two-phase turbulent flows // AIAA Pap. 1986. № 219. 9p.
9. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
10. Хассид, Порех. Применение уравнения баланса турбулентной энергии к исследованию течений полимерных растворов // Теоретические основы инженерных расчетов. 1975. Т. 97. № 2. С. 196–203.
11. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газозвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.
12. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 343 с.
13. Нехажкина О. А., Рогинян М. А. Расчет теплопередачи при турбулентном течении по трубам многоатомных газов // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 33. № 4. С. 678–686.
14. Мульги А. С. Экспериментальное исследование течения газа с однородными сферическими частицами в трубе // Турбулентные двухфазные течения. Таллинн, 1979. С. 47–59.
15. Shimizu A., Echigo R., Hasegawa S., Hishida M. Experimental study on the pressure drop and the entry length of the gas-solid suspension flow in a circular tube // Int. J. Multiphase Flow. 1978. V. 4. № 1. P. 53–64.

Калининград

Поступила в редакцию  
23.XI.1988