

УДК 532.529.5

© 1990 г.

БЕТЯЕВ С. К.

СКИН-ЭФФЕКТ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ КРЫЛА ДИСПЕРСНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Предлагается математическая модель скин-эффекта — течения в тонкой пленке, образующейся на поверхности крыла, обтекаемого дисперсной жидкостью, и состоящей из вещества примеси [1–6]. Дана классификация возможных режимов, обсуждается влияние скин-эффекта на суммарные аэродинамические характеристики крыла, движущегося в условиях сильного дождя.

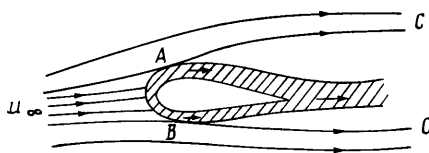
1. Предположим, что несущая фаза несжимаемая и маловязкая; число $Re_1 = u_\infty l / \nu_1 \gg 1$, где u_∞ — скорость невозмущенного потока, l — характерный размер тела, ν_1 — коэффициент кинематической вязкости несущей фазы. Скорость частиц примеси по порядку величины равна скорости основного потока, их удельный объем равен ϵl , где объемная доля дискретных частиц в невозмущенном потоке ϵ — малый параметр. Плотность частиц примеси больше плотности несущей фазы, поэтому они могут достигать поверхности крыла. При очень малых значениях $\epsilon < \epsilon^\circ$ частицы примеси попадают в пограничный слой, где совершают хаотическое движение. Если $\epsilon > \epsilon^\circ$ и взаимодействие диспергированных частиц с твердой границей неупругое, то они заполняют прилегающий к поверхности крыла слой толщиной $O(\epsilon)$. Примем, что этот слой является пленкой — сплошной несжимаемой средой, состоящей из вещества примеси. Такое допущение оправданно, когда, например, диспергированная фаза представляет собой капли жидкости.

В зависимости от порядкового соотношения между двумя малыми параметрами ϵ и $Re_1^{-1/2}$ применимы различные математические модели течения, изучение которых начнем с общего случая $\epsilon = O(Re_1^{-1/2})$. Используем метод сращения асимптотических разложений по малому параметру ϵ . Внутреннее разложение определяет мелкомасштабное течение в пограничном слое и в пленке (скин-эффект).

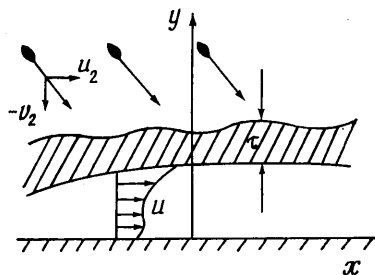
Внешняя задача, справедливая в масштабе обтекаемого тела — хорды профиля l , распадается на две. Первая задача — определение характеристик невязкого обтекания профиля. Поскольку сила, действующая со стороны частиц на несущую фазу, мала, в главном приближении эта задача описывает течение однородной жидкости. Вторая задача — нахождение плотности и вектора скорости невзаимодействующих частиц, на которые действуют заданные из решения первой задачи межфазные силы. Ее решение можно получить с помощью известных методов [7, 8]. Поэтому решения обеих внешних задач будем считать известными.

Величины, относящиеся к несущей фазе, снабдим нижним индексом 1, к дискретной фазе — индексом 2. Величины, относящиеся к пленке, оставим без индекса. Течение будем считать плоским, стационарным.

Решение внешней задачи определяет на границе пленки тангенциальную компоненту скорости $u_2(x)$, направленную вдоль тела по оси x , компоненту скорости $v_2(x)$, направленную по внешней нормали к телу y , объемную концентрацию частиц $\epsilon l(x)$ и давление $p_1(x)$. Из решения внешней задачи определяется также активный участок поверхности



Фиг. 1



Фиг. 2

пленки $0 \leq x \leq x_1$, с которым соударяются частицы примеси ($n \neq 0$), и пассивный участок поверхности пленки, на который частицы примеси не попадают ($n = 0$).

На фиг. 1 показаны траектории диспергированных частиц; пленка заштрихована, AC и BC — границы области, свободной от примеси.

Физическая модель скин-эффекта должна включать неоднородный переходный слой, расположенный над активным участком пленки AB . В этом слое (заштрихован на фиг. 2) происходит разбрызгивание, резкое торможение капель и в конечном итоге образование пленки. На частицу, входящую в плотную сплошную среду, действуют различные силы торможения, включая ударные. Асимптотическую оценку для толщины переходного слоя τ можно получить, если принять, что она равна глубине проникания единичной твердой частицы, имеющей характерный размер r , в среду со стоксовым законом сопротивления

$$\frac{\tau}{l} = O\left(\frac{r}{l} \text{Re}^\circ\right) = O\left(\frac{r^2}{l^2} \text{Re}\right), \quad \text{Re}^\circ = \frac{u_\infty r}{\nu}, \quad \text{Re} = \frac{u_\infty l}{\nu}$$

С другой стороны, пленка толщиной $O(\epsilon)$ может образоваться лишь при условии, что коэффициент захвата частиц профилем крыла порядка единицы. Из этого условия следует минимальная оценка для характерного размера частиц

$$\frac{r^2}{l^2} = O\left(\frac{\alpha}{\text{Re}_1}\right), \quad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho}$$

где ρ — плотность.

Исключив из обеих оценок r , получим $\tau/l = O(\alpha \nu_1/\nu)$. Следовательно, характерная толщина переходного слоя пропорциональна отношению коэффициента динамической вязкости несущей фазы к коэффициенту динамической вязкости вещества пленки и пренебрежимо мала, если $\epsilon \gg \alpha \nu_1/\nu$ (в случае водяной пленки в воздухе $\alpha \nu_1/\nu \approx 0,02$). Не используя в дальнейшем это неравенство с целью достижения большей общности, примем толщину переходного слоя τ равной нулю. Аналогичное предположение вводится в гидродинамике невязкой жидкости при идеализации ударного перехода и слоя смешения.

Сформулируем граничные условия на поверхности контактного разрыва $y = \epsilon \eta_0(x)$, отделяющего вещество пленки от дисперсной среды. Нормальная составляющая скорости, как и при переходе через ударную волну, определяется из уравнения расхода

$$v = \epsilon u_\infty v_0(x), \quad u_\infty v_0 = \nu v_2 \quad (1.1)$$

Нормальная компонента импульса, которую передают пленке частицы примеси, мгновенно изменяющие свою скорость от v_2 до v , мала; влияние сил поверхностного натяжения на контактом разрыве также мало. Поэтому скачок давления на контактом разрыве равен нулю.

Компонента импульса по оси x хотя и мала, но является главным

членом в законе сохранения тангенциальной составляющей количества движения. Взаимодействуя с пленкой, частицы теряют тангенциальную компоненту импульса, равную $-\varepsilon n \rho v_2 (u_2 - u_1)$. Ввиду этого на поверхности пленки должно действовать напряжение трения, тормозящее или ускоряющее частицы примеси, скорости которых при фазовом превращении мгновенно изменяются до скорости жидкости. Таким образом, на активном участке контактного разрыва выполняется условие

$$\varepsilon n \rho v_2 (u_2 - u) = \rho_1 v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

На поверхности пленки, где проскальзывание частиц отсутствует, справедливо условие прилипания

$$u_1 = u, v_{1n} = 0 \quad (1.3)$$

где v_{1n} — нормальная составляющая вектора скорости к поверхности пленки.

На поверхности тела также ставится условие прилипания

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (1.4)$$

2. Условия (1.1)–(1.4) и условие непрерывности давления на поверхности пленки, отражающие сущность физической модели скин-эффекта, необходимы и достаточны для построения математической модели. Внутреннее разложение, пригодное в масштабе толщин $O(\varepsilon)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x, y; \varepsilon) &= \varepsilon \psi(x, \eta) + O(\varepsilon^2), \quad p(x, y) = p(x) + O(\varepsilon) \\ u &= \psi_\eta(x, \eta), \quad v = -\psi_x(x, \eta), \quad y = \varepsilon \eta \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ψ — функция тока.

Скорость отнесем к скорости невозмущенного потока u_∞ , координаты — к характерному размеру тела l , давление — к $\rho_1 u_\infty^2$, функцию тока — к $u_\infty l$. Поскольку пленка тонкая, давление в ней определено из внешнего разложения и не зависит от поперечной координаты η .

Уравнения для функции тока внутри пленки $\psi(x, \eta)$ и функции тока вне ее $\psi_1(x, \eta)$ получаются после подстановки разложения (2.1) в уравнения Навье — Стокса для продольной компоненты скорости

$$\psi_\eta \psi_{x\eta} - \psi_x \psi_{\eta\eta} = -\alpha \frac{dp(x)}{dx} + \beta^2 \psi_{\eta\eta\eta} \quad (2.2)$$

$$\psi_{1\eta} \psi_{1x\eta} - \psi_{1x} \psi_{1\eta\eta} = -\frac{dp(x)}{dx} + \beta_1^2 \psi_{1\eta\eta\eta}$$

$$\varepsilon \beta = \text{Re}^{-1/2}, \quad \varepsilon \beta_1 = \text{Re}^{-1/2}$$

Граничные условия (1.1)–(1.4) на контактом разрыве $\eta = \eta_0(x)$ и на теле примут вид

$$\begin{aligned} \psi(x, \eta_0) &= \psi_0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_\eta(x, 0) = 0 \\ \psi_\eta(x, \eta_0) &= \psi_{1\eta}(x, \eta_0), \quad \psi_1(x, \eta_0) = 0 \\ v_0 [u_2 - \psi_\eta(x, \eta_0)] &= \alpha \beta_1^2 \psi_{1\eta\eta}(x, \eta_0) - \beta^2 \psi_{\eta\eta}(x, \eta_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

На пассивном участке $v_0 = 0$, функция тока ψ_0 постоянна, граница пленки — обычный контактный разрыв. В окрестности точки A (фиг. 1) реализуется режим свободного вязко-невязкого взаимодействия.

Кроме четырех заданных функций $p(x)$, $v_0(x)$, $u_2(x)$, $\psi_0(x) = -\int v_0(x) dx$ краевая задача (2.2)–(2.3) определяется тремя параметрами α , β , β_1 . При $\alpha = 0$ плотность жидкости в пленке равна бесконечности, течение в пленке безградиентное.

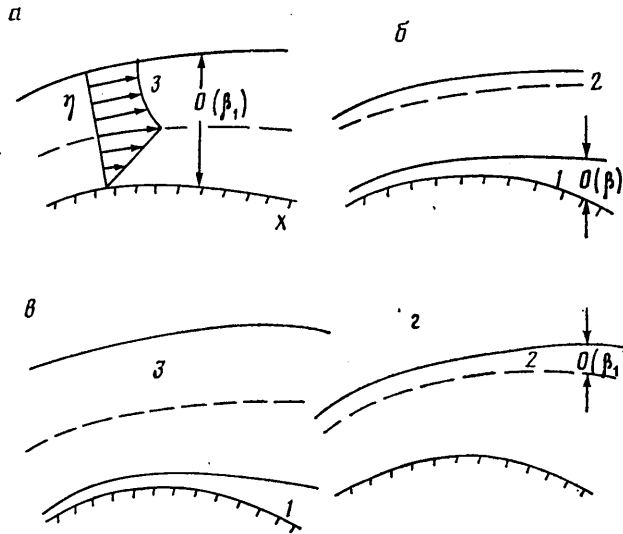
Поскольку распределение давления на поверхности тела при $\epsilon \neq 0$ и $\epsilon = 0$ в первом приближении одинаково, подъемная сила при наличии в потоке диспергированных частиц не изменяется.

Приближенную оценку в общем случае $\beta = O(\beta_1) = O(1)$ можно получить, воспользовавшись интегральным уравнением импульсов

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta_0} u^2(x, \eta) d\eta = \psi_0' u(x, \eta_0) - \alpha p' \eta_0 + \beta^2 [u_\eta(x, \eta_0) - u_\eta(x, 0)]$$

$$\psi_0' = \eta_0' u(x, \eta_0) - v(x, \eta_0) = -v_0(x) \quad (2.4)$$

Физический смысл уравнения (2.4) состоит в том, что изменение количества движения жидкости вызвано импульсом сил на активном участ-



Фиг. 3

ке границы, градиентом давления, а также действием сил трения на поверхности крыла и на контактном разрыве.

Ограничимся для простоты случаем $\alpha = 0$, когда задача об определении течения в пленке и задача об определении течения несущей фазы в пограничном слое делимы.

Представим функцию тока в виде полинома пятой степени

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 a_1(x) + \frac{1}{5} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^5 a_2(x)$$

Члены, пропорциональные η^3 и η^4 , отсутствуют ввиду того что в соответствии с уравнением (2.2) и условием прилипания $\psi_{\eta\eta\eta}(x, 0) = \psi_{\eta\eta\eta\eta}(x, 0) = 0$. Определив a_1 и a_2 из (2.3), получим

$$3(\mu+6)a_1 = 10(\mu+4) - 2\mu t$$

$$\frac{a_2}{5} = 1 - \frac{a_1}{2}, \quad \mu = -v_0 \eta_0 \beta^{-2}, \quad \psi_0 t = u_2 \eta_0$$

Безразмерный параметр μ пропорционален толщине слоя и удельному расходу ударяющихся о контактный разрыв диспергированных частиц. Параметр t связан с углом падения частиц на поверхность пленки. Отрыв потока происходит при $t = 5(4+\mu)/\mu$. Функция $\eta_0(x)$ находит-

ся из уравнения (2.4). На пассивном участке ($\mu=0, \psi_0=\text{const}$) профиль скорости безотрывный

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta_0} = 10 \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^5, \quad 185\eta_0' = 324 \frac{\beta^2}{\psi_0}$$

В этом случае поток тормозится, толщина пленки увеличивается; при $\eta_0=O(\alpha^{-1/2})$ необходим учет градиента давления.

В общем случае, когда $\alpha=O(1)$, различные схемы скин-эффекта, которые получаются в зависимости от порядкового соотношения между двумя ограниченными параметрами β и β_1 , представлены на фиг. 3. Контактный разрыв $\eta=\eta_0(x)$ показан штриховой линией.

Если $\beta=O(\beta_1)=O(1)$, то пленка расположена в основном пограничном слое 3 (фиг. 3, а), и краевая задача (2.2)–(2.3) не допускает дальнейших упрощений. Если течение в пленке невязкое ($\beta \ll 1$), то на поверхности тела имеется пограничный слой 1 (фиг. 3, б, $\beta_1 \ll 1$; фиг. 3, в, $\beta_1=O(1)$); снизу от контактного разрыва вязкий подслои не образуется, так как здесь расход не является малой величиной: $\psi_0=O(1)$. В случае $\beta_1 \ll 1$ над контактным разрывом существует вязкий подслой несущей фазы 2 (фиг. 3, б, $\beta \ll 1$; фиг. 3, з, $\beta=O(1)$).

3. Рассмотрим другие модели. Во второй из них (фиг. 3, б, $\beta \ll 1, \beta_1 \ll 1$) течение в пленке невязкое, условием прилипания при $\eta=0$ следует пренебречь. Тогда краевая задача (2.2)–(2.3) примет вид

$$\begin{aligned} \psi_\eta \psi_{x\eta} - \psi_x \psi_{\eta\eta} &= -\alpha p' \\ \psi(x, 0) &= 0, \quad \psi(x, \eta_0) = \psi_0(x), \quad \psi_\eta(x, \eta_0) = u_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение находится с помощью справедливого в данном случае интеграла Бернулли и имеет вид

$$\int_0^\psi [f(\psi) - \alpha p]^{-1/2} d\psi = \sqrt{2} \eta \quad (3.2)$$

Зависимость $f(\psi)$ определяется из граничных условий при $\eta=\eta_0$

$$f(\psi_0) = \alpha p(x_0) - \frac{1}{2} u_2^2(x_0)$$

где функция $x_0(\psi_0)$ является обратной по отношению к функции $\psi_0 = \psi_0(x_0)$. На пассивном участке $f(x, \eta_0) = \text{const}$.

Течение безотрывно, если знаменатель в интеграле (3.2) является действительной величиной, т. е. если для всех x_2 выполняется неравенство

$$f_{\min} > \alpha p_{\max} \quad (3.3)$$

где f_{\min} — минимальное значение функции $f(x, \eta_0)$ на участке $(0, x_2)$, p_{\max} — максимальное давление на участке (x_2, x_{\max}) . Причина отрыва такова: струйке тока не хватает приобретенной в начальный момент ее существования ($\eta=\eta_0$) инерции, чтобы войти в область достаточно больших значений p . В аэродинамике неравенство (3.3) всегда выполняется, так как скоростной напор воды намного превышает скоростной напор воздуха ($\alpha=1,2 \cdot 10^{-3}$). Таким образом, анализ в рамках стационарной математической модели приводит к следующему выводу: кормовой отрыв на профиле при $\epsilon \neq 0$ может быть ликвидирован, а условия обтекания улучшены по сравнению со случаем $\epsilon=0$.

Заметим, что численный расчет можно проводить маршевым методом — от слоя $x=\text{const}$ к слою $x+\Delta x$ — с учетом образования новых линий тока на активном участке поверхности пленки. Основная трудность в этом случае — определение начальных данных. В окрестности нулевой линии тока $x=x_0(\eta)$, приходящей в точку торможения частиц на теле,

справедливо разложение $\psi = (x - x_0)A(\eta) + O[(x - x_0)^2]$, $f(\psi) = \alpha p_0 + k\psi + O(\psi^2)$. В симметричном случае $k = x_0 = 0$. Параметр асимметрии k зависит от угла атаки и характеризует интенсивность возвратного течения.

Скорость на поверхности тела равна $u^\varepsilon(x) = \alpha^{1/2} u_1^\varepsilon(x)$, где $u_1^\varepsilon(x) = (2p_0 - 2p)^{1/2}$ — скорость на поверхности тела при $\varepsilon = 0$, $p_0 = p(0)$. Напряжение трения равно $\tau = (v/v_1)^{1/2} \alpha^{-1/4} \tau_1$, где τ_1 — напряжение трения при $\varepsilon = 0$. Отношение τ/τ_1 не зависит от толщины пленки.

В случае обтекания тела потоком воздуха, содержащим дождевые капли, $(v/v_1)^{1/2} \alpha^{-1/4} \approx 1,5$, т. е. сила трения из-за наличия капель увеличивается в 1,5 раза. Поэтому «всепогодный» самолет должен обладать по крайней мере 50%-ным запасом тяги по сравнению с тягой обычного самолета. Укажем, что для движения тела с той же скоростью в сплошном потоке воды необходима $(v/v_1)^{1/2} \alpha^{-1} \approx 230$ -кратная мощность двигателей.

Третья математическая модель справедлива при $\beta \ll \beta_1 = O(1)$ (фиг. 3, в).

Несмотря на то что существует интеграл (3.2), задачи о течении в пленке и о течении вне ее неразделимы — скорость по границе контактного разрыва неизвестна. Поэтому рассмотрим частные случаи.

При $\alpha = 0$ скорость на границе известна: $\psi_\eta(x, \eta_0) = u_2$; решение отличается от приведенного выше только отсутствием градиента давления.

На пассивном участке контактного разрыва ($v_0 = 0$, $\alpha \neq 0$) граничное условие для продольного импульса принимает вид $\psi_{1\eta\eta}(x, \eta_0) = 0$. Основной пограничный слой вырождается, скорость жидкости в нем стремится к постоянной. Проявление скин-эффекта в этом случае благоприятно с точки зрения ликвидации отрыва пограничного слоя. Скорость на границе пленки определяется из решения внешней невязкой задачи.

Четвертая модель справедлива, если $\beta_1 \ll \beta = O(1)$ (фиг. 3, г). Задача о течении в пленке отделяется и принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_\eta \psi_{\eta\eta} - \psi_x \psi_{\eta\eta} &= -\alpha p' + \beta^2 \psi_{\eta\eta\eta}, \quad \psi(x, \eta_0) = \psi_0(x) \\ \beta^2 \psi_{\eta\eta}(x, \eta_0) &= v_0 [\psi_\eta(x, \eta_0) - u_2], \quad \psi(x, 0) = \psi_\eta(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

До сих пор предполагалось, что параметры β и β_1 ограничены. Рассмотрим схемы течения, когда один из них или оба велики. Если $\beta \gg 1$, то течение в пленке медленное, профиль скорости параболический

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{3} \alpha p' (\eta \beta^{-2/3}) + \left(\frac{3}{2} \psi_0 \right)^{1/2} (\alpha p')^{2/3} (\eta \beta^{-2/3})^2 \\ \eta_0 &= \left(-\frac{3}{2} \frac{\psi_0 \beta^2}{\alpha p'} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение (3.4) справедливо, когда градиент давления p' отрицателен. В противном случае происходит отрыв пленки от тела.

Если $\beta_1 \gg 1$, то пленка расположена на дне основного пограничного слоя, имеющего толщину $O(Re_1^{-1/2})$. Этот слой снова оказывается вырожденным, так как наклон профиля скорости на его дне в силу последнего условия (2.3) равен нулю.

Если сразу $\beta \gg 1$ и $\beta_1 \gg 1$, то профиль скорости в пленке линейный — функция тока имеет вид $\psi = \psi_0 (\eta/\eta_0)^2$. Переходя к переменным пограничного слоя, получим

$$\psi_1 = \beta_1 \Psi(x, Y), \quad \eta = \beta_1 Y, \quad \Psi_Y(x, 0) = \frac{2\psi_0}{\eta_0}$$

Вместо условия прилипания для функции Ψ справедливо нелинейное условие

$$2\psi_0 \omega \Psi_{YY}(x, 0) = \Psi_Y^2(x, 0), \quad \omega = \alpha \beta_1 \beta^{-2} \quad (3.5)$$

Трение пропорционально квадрату скорости проскальзывания. Если $\omega \gg 1$, то пограничный слой вырождается в указанном выше смысле. Если

$\omega \ll 1$, то течение в пленке замедляется, толщина пленки стремится к бесконечности, т. е. становится внепорядковой. В этом случае пленка расположена на дне основного пограничного слоя, для которого вместо условия (3.5) выполняется условие прилипания $\Psi_Y(x, 0) = 0$. Решение имеет вид

$$\psi(x, \sigma) = \psi_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2, \quad \sigma = \omega^{1/2} \eta, \quad \sigma^2 \Psi_{YY}(x, 0) = 2\psi_0$$

Автор благодарен А. Н. Крайко за обсуждение темы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Сулайманова С. М. Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с «пеленами» и «шнурами», возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // ПИММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 619–630.
2. Hains P., Luers J. Aerodynamic penalties of heavy rain on landing airplanes // J. Aircraft. 1983. V. 20. № 2. P. 111–119.
3. Bilanin A. J. Scaling laws for testing airfoils under heavy rainfall // J. Aircraft. 1987. V. 24. № 1. P. 31–37.
4. Marchman J. F. III, Robertson E. A., Emsley H. T. Rain effects at low Reynolds Number // J. Aircraft. 1987. V. 24. № 9.
5. Гродзовский Г. Л. О движении мелких частиц в газовом потоке // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 80–89.
6. Болджиев Х., Беликов В. Массоперенос в движущихся пленках жидкости // Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 137 с.
7. Marble F. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. Calif.: Palo Alto, V. 2. 1970. P. 397–446.
8. Нигмагулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1987