

УДК 532.529

© 1990 г.

СЕРГЕЕВ Ю. А.

**СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ КОНЦЕНТРАЦИИ И ДИСПЕРСИОННЫЕ  
ЯВЛЕНИЯ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ  
ПРИ СЛАБОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ**

Модель концентрированной двухфазной среды, построенная в [1–3] с учетом обусловленного взаимодействием твердых частиц хаотического мелкомасштабного движения дисперсной фазы, использована для анализа стационарных волн концентрации частиц и дисперсионных явлений в случае пренебрежимо малых скоростей генерации и диссипации энергии мелкомасштабного движения. Исследуется распространение одномерных возмущений в направлении, параллельном или антипараллельном силе тяжести. Найдена структура фронта стационарной волны и определены условия формирования внутренних разрывов концентрации на фронте. Исследованы дисперсионные явления для слабонелинейных волн. Полученные результаты применимы для анализа волновых явлений в псевдооживленном газом слое, «падающем» слое, системах пневмотранспорта, быстрого псевдооживления и т. п.

Предложенная в [1–3] модель была развита в [4] для исследования стационарных волн и дисперсионных явлений при высоких скоростях генерации и диссипации энергии мелкомасштабного движения дисперсной фазы и в [5] для анализа распространения разрывов концентрации частиц при конечных скоростях генерации и диссипации энергии хаотического движения и линейной устойчивости при слабом взаимодействии твердых частиц.

**1. Основные уравнения.** Будем для определенности рассматривать распространение одномерных продольных волн в однородном псевдооживленном слое. Силу межфазного взаимодействия будем считать линейной по относительной скорости фаз, что справедливо для достаточно мелких частиц (невысоких чисел Рейнольдса, определенных по размеру отдельной частицы). Плотность материала твердых частиц  $d_2$  будем полагать значительно превышающей плотность газа  $d_1$ . Для описания движения фаз слоя будем использовать модель, предложенную в [1–3]. Взаимодействие частиц будем полагать слабым; в этом случае можно пренебречь скоростью генерации и диссипации энергии мелкомасштабного хаотического движения дисперсной фазы и считать взаимодействие твердых частиц ответственным лишь за установление определенного ненулевого значения энергии мелкомасштабного движения в стационарном состоянии слоя. В указанных предположениях постановка задачи о распространении волны концентрации приведена в [5].

В безразмерных переменных (в качестве масштабов длины, скоростей фаз, времени, энергии мелкомасштабного движения и эффективного давления дисперсной фазы используются соответственно величины  $L$ ,  $U$ ,  $L/U$ ,  $U^2$  и  $d_2 U^2$ , где  $L$  — характерный масштаб возмущения,  $U$  — скорость оживающего газа в невозмущенном слое в расчете на полное сечение слоя) замкнутая система уравнений для параметров дисперсной фазы имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho w)_x &= 0 \\ w_t + w w_x + \rho^{-1} p_x^* &= \beta^{-1} [-1 + \kappa \varphi(\rho) (1 - w)] \\ e_t + w e_x + \rho^{-1} p^* w_x &= 0, \quad p^* = \Lambda \rho W(\rho) e \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$W = \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\rho^0} \right)^{1/2} \right]^{-1}; \quad \beta = \frac{U^2}{Lg}, \quad \kappa = \frac{18d_1 U v}{g a^2 d_2} \quad (1.2)$$

Здесь  $t$  — время,  $x$  — вертикальная координата,  $\rho$  — объемная концентрация дисперсной фазы,  $\rho^0 \approx 0,63$  — концентрация дисперсной фазы в неподвижном зернистом слое при случайной укладке частиц,  $w$  и  $p^*$  — скорость и эффективное давление дисперсной фазы,  $e$  — кинетическая энергия мелкомасштабного хаотического движения твердых частиц (в расчете на единицу массы дисперсной фазы),  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\nu$  — кинематическая вязкость газа,  $a$  — диаметр отдельной частицы дисперсной фазы. Феноменологический параметр  $\Lambda$  определяется характером взаимодействия частиц; обычно [3]  $0 < \Lambda \leq 0(1)$ . Величина параметра  $\Lambda$  может быть установлена по экспериментальным данным [6, 7]. Для качественного анализа во многих случаях достаточно положить  $\Lambda = 1$ .

Как и в [4, 5], при линейном межфазном взаимодействии функцию  $\varphi(\rho)$  в соответствии с результатами [8] представим в виде ( $\varepsilon = 1 - \rho$  — пористость слоя)

$$\varphi = \varepsilon^{-n-2}; \quad n = 11/4 \quad (1.3)$$

**2. Распространение стационарной волны.** Для анализа распространения стационарной волны концентрации дисперсной фазы в уравнениях (1.1) перейдем, как обычно (см., например, [9]), к переменным  $X = x - Vt$ ,  $t$ , где  $V$  — скорость стационарной волны. Из уравнения неразрывности в (1.1) имеем связь между концентрацией и скоростью дисперсной фазы в виде

$$\rho(w - V) = B = \text{const} \quad (2.1)$$

Состояния двухфазной среды перед фронтом волны и за ним (при  $X \rightarrow \pm\infty$ ) будем считать однородными; значения параметров перед фронтом и за ним будем обозначать индексами 1 и 2 соответственно. Скорость дисперсной фазы  $w_1$  в невозмущенном состоянии перед фронтом волны не будем считать обязательно равной нулю, включая, таким образом, в рассмотрение поршневой режим псевдооживления, «быстрое» псевдооживление, режим падающего слоя и, вообще говоря, широкий класс концентрированных дисперсных систем.

Скорости дисперсной фазы  $w_i$  ( $i=1, 2$ ) перед фронтом и за ним на значительном удалении от фронта связаны с концентрациями дисперсной фазы в обеих областях следующим из уравнения сохранения импульсов в (1.1) соотношением

$$w_i = 1 - [\kappa \varphi(\rho_i)]^{-1} \quad (2.2)$$

Для значений  $B$  и скорости распространения волны  $V$  обычным методом (см., например, [9]) найдем совпадающие с полученными в [4] выражения

$$B = - \frac{1}{\kappa} \frac{\rho_1 \rho_2}{\varphi(\rho_1) \varphi(\rho_2)} \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \quad (2.3)$$

$$V = 1 - \frac{1}{\kappa(\rho_2 - \rho_1)} \left[ \frac{\rho_2}{\varphi(\rho_2)} - \frac{\rho_1}{\varphi(\rho_1)} \right]$$

С учетом (2.1) для стационарной волны система уравнений (1.1) принимает вид

$$Bw_x + p_x^* = \rho \Psi(\rho), \quad Be_x + p^* w_x = 0$$

$$p^* = \Lambda \rho W(\rho) e \quad (2.4)$$

$$\Psi(\rho) = \beta^{-1} [-1 + \kappa \varphi(\rho) (1 - V - B\rho^{-1})]$$

$$\Psi(\rho_1) = \Psi(\rho_2) = 0 \quad (2.5)$$

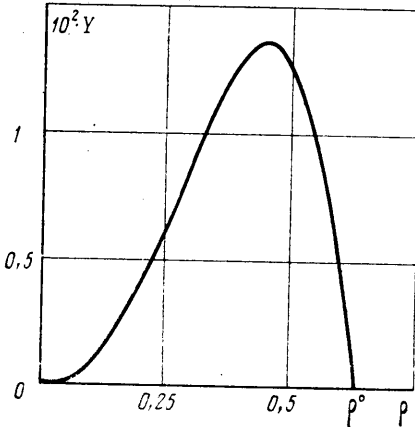
При помощи уравнения состояния дисперсной фазы (третьего уравнения в (2.4)) и следующего из (2.1) соотношения  $w_x = -B\rho^{-2}\rho_x$  система (2.4) сводится к системе уравнений в переменных  $(\rho, e)$  вида

$$(\rho^2 c_{20,30}^2 - B^2)\rho_x = \rho^3 \Psi(\rho), \quad \Lambda W \rho^{-1} e \rho_x - e_x = 0 \quad (2.6)$$

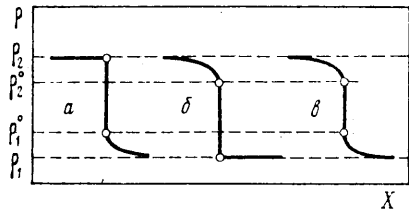
$$X \rightarrow +\infty, \rho = \rho_1, e = e_1; X \rightarrow -\infty, \rho = \rho_2, e = e_2$$

$$c_{20,30} = \pm \sqrt{\Lambda e \Gamma(\rho, \Lambda)}; \Gamma = (\rho W)' + \Lambda W^2 \quad (2.7)$$

Здесь  $c_{20}, c_{30}$  — определенные в [5] характеристические скорости системы (1.1); штрих означает производную по  $\rho$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Интегрируя второе уравнение (2.6), найдем с учетом вида функции  $W(\rho)$  (1.2) связь между кинетической энергией мелкомасштабного движения и объемной концентрацией дисперсной фазы на фронте волны в виде

$$e = e_1(\rho/\rho_1) [W(\rho_1)/W(\rho)]^3 \quad (2.8)$$

При исследовании структуры стационарных волн наибольший интерес представляет определение условий существования внутреннего разрыва на фронте волны [9]. Условие существования такого разрыва следует из первого уравнения (2.6) в виде  $\rho^2 c_{20,30}^2 = B^2$  и с учетом (2.3) и (2.7) представляется в форме

$$Y(\rho) = \lambda Z(\rho_1, \rho_2) \quad (2.9)$$

$$Y(\rho) = \rho^3 \Gamma(\rho) W^{-3}(\rho); \lambda = (\Lambda e_1 \kappa^2)^{-1}$$

$$Z(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_1^3 \rho_2^2}{W^3(\rho_1) \varphi^2(\rho_1) \varphi^2(\rho_2)} \left[ \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \right]^2 \quad (2.10)$$

Для функции  $W(\rho)$ , определенной в соотношениях (1.2), функция  $Y(\rho)$  имеет вид

$$Y(\rho) = \rho^3 [1 - (\rho/\rho^\circ)^{1/3}] [\Lambda + 1 - 2/3 (\rho/\rho^\circ)^{1/3}] \quad (2.11)$$

Функция  $Y(\rho)$  обращается в нуль в точках  $\rho = 0, \rho = \rho^\circ$  и имеет единственный максимум  $Y_0(\Lambda) = \max_{\rho} Y(\rho)$  при  $\rho = \rho_0(\Lambda)$ , где

$$\rho_0 = 1,47\rho^\circ (1 + 0,6\Lambda)^3 \{1 - \sqrt{1 - 0,95(1 + \Lambda)(1 + 0,6\Lambda)^{-2}}\}^3$$

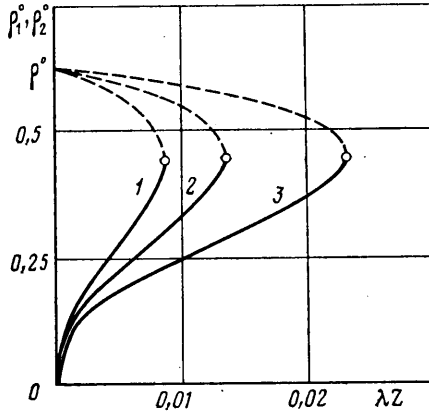
Вид функции  $Y(\rho)$  при  $\Lambda = 1$  приведен на фиг. 1. В диапазоне  $0,1 \leq \Lambda \leq 5$  (напомним, что  $0 < \Lambda \leq O(1)$ ) значение  $\rho_0$  практически не зависит от  $\Lambda$  и можно приближенно принять  $\rho_0 \approx 0,45, Y_0 \approx 0,0097(\Lambda + 0,4)$ .

Введем в рассмотрение параметры  $\lambda_1 = Y(\rho_1) Z^{-1}(\rho_1, \rho_2), \lambda_2 = Y(\rho_2) Z^{-1}(\rho_1, \rho_2)$ . Из вида функции  $Y(\rho)$  следует, что условием существования внут-

ренного разрыва на фронте волны является выполнение неравенств

$$\min(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda < Y_0 Z^{-1}(\rho_1, \rho_2) \quad (2.12)$$

Исследуем теперь в зависимости от соотношения параметров  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  структуру фронта волны, включающего внутренний разрыв (т. е. при выполнении условия (2.12)). Возможны три случая расположения внутреннего разрыва в зависимости от выполнения наряду с (2.12) следующих неравенств: 1)  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ . Фронт волны имеет форму, указанную на



Фиг. 3

фиг. 2, а. 2)  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ . Структура фронта приведена на фиг. 2, б. 3)  $\max(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda < Y_0 Z^{-1}(\rho_1, \rho_2)$ . Приведенная на фиг. 2, в структура фронта подобна в этом случае найденной в работе [4] при высоких скоростях генерации и диссипации энергии мелкомасштабного движения дисперсной фазы.

Для структур 1–3 указанные на фиг. 2 значения  $\rho_1^\circ = \rho_1^\circ(\Lambda, \lambda Z)$  и  $\rho_2^\circ = \rho_2^\circ(\Lambda, \lambda Z)$  являются решениями алгебраического уравнения (2.9). Зависимости  $\rho_1^\circ$  и  $\rho_2^\circ$  от  $\lambda Z$  приведены на фиг. 3 соответственно сплошными и штриховыми линиями 1–3 для  $\Lambda = 0,5$ ; 1; 2. Точки соответствуют значению  $\lambda Z = Y_0$ , при котором  $\rho_1^\circ$  и  $\rho_2^\circ$  совпадают.

Приближенные выражения для  $\rho_1^\circ$  и  $\rho_2^\circ$  могут быть получены при малом значении величины  $\lambda Z(\rho_1, \rho_2)$ . В этом случае

$$\rho_1^\circ \approx \sqrt[3]{\frac{Z(\rho_1, \rho_2)}{\Lambda(1+\Lambda)e_1 \kappa^2}}, \quad \rho_2^\circ \approx \rho^\circ - \frac{9Z(\rho_1, \rho_2)}{\Lambda(1+3\Lambda)e_1(\rho^\circ)^2} \quad (2.13)$$

Как следует из (2.13), малость величины  $\lambda Z$  приводит к тому, что  $\rho_1^\circ \ll 1$ ,  $\rho^\circ - \rho_2^\circ \ll \rho^\circ$ ; следовательно, в рассматриваемом случае внутренний разрыв может сформироваться лишь при  $\rho_1 \ll 1$  (поскольку  $\rho_1^\circ > \rho_1$ ). Альтернативные асимптотические выражения для  $\rho_1^\circ$  и  $\rho_2^\circ$  при  $\rho_1 \ll 1$  запишем в виде

$$\rho_1^\circ = \rho_1 \sqrt[3]{\frac{\lambda}{1+\Lambda} \left[ \frac{\varphi(\rho^\circ) - 1}{\varphi(\rho^\circ)} \right]^2} \approx \frac{0,99\rho_1}{\sqrt[3]{\Lambda(1+\Lambda)e_1 \kappa^2}}$$

$$\rho_2^\circ = \rho^\circ - \frac{9\lambda\rho_1^3}{(1+3\Lambda)(\rho^\circ)^2} \left[ \frac{\varphi(\rho^\circ) - 1}{\varphi(\rho^\circ)} \right]^2 \approx \rho^\circ - \frac{8,84\rho_1^3}{\Lambda(1+3\Lambda)(\rho^\circ)^2 e_1 \kappa^2}$$

В случаях, когда концентрация дисперсной фазы перед фронтом волны  $\rho_1$  мала или концентрация за фронтом  $\rho_2$  близка к максимальной концентрации  $\rho^\circ$ , выражения для параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и соответственно неравенства, определяющие реализацию одной из структур 1–3, также могут быть представлены в простом виде.

При  $\rho_1 \rightarrow 0$  с учетом (1.2), (1.3), (2.7), (2.10)–(2.12) для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  найдем

$$\lambda_1 = (1 + \Lambda) (1 - \varepsilon_2^{n+2})^{-2}$$

$$\lambda_2 = (\rho / \rho_1)^3 \Gamma(\rho) W^{-3}(\rho) (1 - \varepsilon_2^{n+2})^{-2}$$

При  $\rho \rightarrow \rho^\circ$  существенно упрощается лишь выражение для  $\lambda_2$ , которое запишем в виде

$$\lambda_2 = 1410(1 + 3\Lambda) (\rho^\circ - \rho_2) \xi(\rho_1)$$

$$\xi(\rho) = \rho^{-3} \varepsilon^{-2(n+1)} W^3(\rho) (\rho^\circ - \rho) / [(\varepsilon^\circ)^{-n-2} - \varepsilon^{-n-2}]$$

Особенно простыми условия существования внутреннего разрыва и неравенства, определяющие структуру фронта, становятся в случае, когда можно считать, что среда перед фронтом стационарной волны очень разрежена, а за фронтом, напротив, состояние среды близко к плотному слою (такая ситуация достаточно типична, например, для падающего слоя и для поршневого режима псевдооживления). В этом случае

$$\lambda_1 \approx 1,02(1 + \Lambda), \lambda_2 \approx 0,045(1 + 3\Lambda) (\rho^\circ - \rho_2) \rho_1^{-3}$$

При  $\Lambda = 1$ , вычисляя асимптотическое выражение функции  $Z(\rho_1, \rho_2)$  при  $\rho_1 \rightarrow 0$ ,  $\rho_2 \rightarrow \rho^\circ$  и учитывая найденное выше значение  $Y_0$ , запишем условия существования внутреннего разрыва на фронте волны в простом виде

$$\min\{2,04, 0,18\rho_1^{-3}(\rho^\circ - \rho_2)\} \leq \lambda < 0,14\rho_1^{-3}$$

Проанализируем теперь условия существования разрыва на фронте слабой стационарной волны концентрации дисперсной фазы. Искомым условием является в данном случае совпадение одной из характеристических скоростей  $c_2 = w + c_{20}$ ,  $c_3 = w + c_{30}$  со скоростью кинематической волны [9], где [12]

$$c = w + \kappa^{-1} \rho \varphi'(\rho) \varphi^{-2}(\rho) \quad (2.14)$$

Указанное условие естественно совпадает [9] с полученным в [5] условием нейтральной устойчивости слоя и определяет соответствующие нейтральной кривой значения концентрации  $\rho^1(e, \Lambda)$  и  $\rho^2(e, \Lambda)$ . При указанных значениях концентрации распространение стационарной волны малой интенсивности происходит в форме слабого скачка. Из результатов [5] следует, что разрыв на фронте слабой стационарной волны возможен лишь при невысоких значениях энергии мелкомасштабного движения дисперсной фазы  $e \leq e_*$ , где  $e_* = e_*(\Lambda)$  определено в [5]; в интервале  $0,1 \leq \Lambda \leq 5$   $e_*$  слабо зависит от  $\Lambda$  и можно принять  $e_* \approx 0,14$ .

При малых значениях энергии мелкомасштабного движения дисперсной фазы ( $e \ll 1$ ) условие нейтральной устойчивости [5] приводит к следующим приближенным выражениям для концентраций твердых частиц  $\rho^1$  и  $\rho^2$ , соответствующих распространению стационарной волны в виде слабого разрыва:

$$\rho^1 \approx \frac{\sqrt{\Lambda(\Lambda+1)}e}{n+2}, \quad \rho^2 \approx \rho^\circ - \frac{3e^\circ \sqrt{\Lambda(\Lambda+1/3)}e}{n+2}$$

Выше рассмотрены лишь внутренние разрывы на фронте волны уплотнения концентрации дисперсной фазы. Разрывы на фронтах волн разрежения не рассматриваются, поскольку для системы уравнений (1.1) скачки разрежения неэволюционны [10] (это обстоятельство для системы (1.1) отмечалось также в [5]).

**3. Дисперсионные явления.** Рассмотрим теперь распространение волн малой конечной амплитуды ( $\rho = \rho_0 + \eta$ ,  $\eta \ll 1$ ). Как и в [4], предположим, что пространственный масштаб возмущений  $L$  не слишком мал, так что параметр  $\beta \ll 1$ .

Метод получения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса в случае, когда поведение сред с дисперсией и диссипацией описывается системой уравнений достаточно общего вида, изложен в [11]. Исходная система уравнений удовлетворяет всем условиям, приведенным в [11], поэтому, не останавливаясь на деталях вывода,

приведем сразу уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса в окончательном виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c(\rho_0 + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \mu_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \beta^2 \mu_2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mu_1 = c_0^2 - [c_{20,30}(\rho_0)]^2, \quad \mu_2 = 2\mu_1 c_0 \quad (3.2)$$

Здесь в выражении (2.14) для скорости кинематической волны следует положить  $w = w(\rho) = 1 - [\chi \Phi(\rho)]^{-1}$ ;  $c_0$  – скорость кинематической волны при концентрации  $\rho = \rho_0$  в равновесном однородном состоянии слоя,  $c_{20} = -c_{30}$  – характеристическая скорость системы (1.1), определенная соотношением (2.7). Для функции межфазного взаимодействия вида (1.3)

$$c = 1 + \chi^{-1} e^{n+1} [(n+3)\rho - 1], \quad c_0 = (n+2)\rho_0 e^{-1} \quad (3.3)$$

Скорость кинематической волны  $c(\rho)$  имеет максимум при  $\rho = \rho_* = 8/23 \approx 0,348$  [12].

Уравнение (3.1) описывает волны, распространяющиеся в направлении невозмущенного потока газа, значения  $\mu_1 < 0$  отвечают линейной устойчивости системы (1.1) [5].

Ниже рассматриваются стационарные волны малой конечной амплитуды. Введем величину [13]

$$\mu_c = [2\eta_+ \mu_2 c'(\rho_0)]^{1/2} \quad (3.4)$$

где  $\eta_+$  – амплитуда волны концентрации дисперсной фазы; для волны уплотнения  $\eta_+ > 0$ , для волны разрежения –  $\eta_+ < 0$  (напомним, что  $c' > 0$  для  $\rho < \rho_*$  и  $c' < 0$  при  $\rho > \rho_*$ ). Аналогично [4, 13] найдем, что решение в виде цуга затухающих солитонов (в этом случае под  $\eta_+$  следует понимать амплитуду цуга) существует при выполнении неравенства  $\mu_1 > \mu_c$ , которое с учетом (3.2) и (3.4) запишем в виде

$$c_0^2 - [c_{20,30}(\rho_0)]^2 > 4\eta_+ c_0 c'(\rho_0)$$

Скачок разрежения возможен при  $\rho > \rho_*$ , а скачок уплотнения – при  $\rho < \rho_*$ . В случае, если выполняется условие  $0 < \mu_1 < \mu_c$ , которое с учетом (3.2) и (3.4) перепишем в следующей форме, содержащей характеристические скорости:

$$0 < c_0^2 - [c_{20,30}(\rho_0)]^2 < 4\eta_+ c_0 c'(\rho_0)$$

Естественно, что в рамках рассматриваемого приближения не слишком коротких волн, приводящего к уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса, так же как и в рамках приближения кинематических волн [12], постановка вопроса о возможности существования скачка разрежения бессмысленна. Волна уплотнения, формирующаяся при  $\rho > \rho_*$ , и волна разрежения, образующаяся при  $\rho < \rho_*$ , имеют в соответствии с результатами [4, 13] осцилляционные структуры.

Проанализируем влияние рассмотренного выше слабого межчастичного взаимодействия на структуру фронтов волн. Взаимодействие между частицами приводит к тому, что в областях концентрации  $\rho < \rho^1(e; \Lambda)$  и  $\rho > \rho^2(e; \Lambda)$  не существует решения в виде затухающих солитонов. Из результатов [5] следует, что увеличение энергии мелкомасштабного движения дисперсной фазы в невозмущенном однородном состоянии слоя приводит к сужению области концентраций дисперсной фазы, в которой возможно существование решения в виде цуга затухающих солитонов. При  $e > e_c$  решение в виде затухающих солитонов отсутствует при всех значениях концентрации дисперсной фазы.

Как следует из (3.2), взаимодействие частиц приводит к уменьшению величины  $\mu_1$  по сравнению с вычисленной в [13] для невзаимодействующих частиц и, следовательно, в диапазоне  $\rho^1 < \rho < \rho^2$  – к расширению области концентраций дисперсной фазы, при которых возможно формирование разрывов и фронтов с осциллирующей границей, и сужению области, соответствующей образованию цугов затухающих солитонов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Элементарная теория кипящего слоя // ПМТФ. 1972. № 6. С. 106–112.
2. Гольдштик М. А., Козлов Б. Н. Элементарная теория концентрированных дисперсных систем // ПМТФ. 1973. № 4. С. 67–77.
3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
4. Курдюмов В. Н., Сергеев Ю. А. О распространении нелинейных волн в псевдоожоженном слое при взаимодействии частиц дисперсной фазы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 81–89.
5. Сергеев Ю. А. О распространении волн и скачков концентрации дисперсной фазы в псевдоожоженном газом слое слабозаимодействующих твердых частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 77–85.
6. Bordet J., Borlai O., Vergnes F., Le Goff P. Direct measurement of the kinetic energy

- of particles and their frequency of collision against a wall in a liquid-solids fluidized bed // Fluidization. Proc. Symp. Tripartite Chem. Engng Conf., Montreal, Canada, 22-25 Sept. 1968. London: Inst. Chem. Engrs, Symp. Series. 1968. № 30. P. 165-173.
7. Borlai O., Hodany L., Blickle T. Investigation of mixing in fluidized beds // Proc. Intern. Symp. on Fluidization. Amsterdam: Netherlands Univ. Press. 1967. P. 433-441.
  8. Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Приближенные закономерности гидравлики взвешенного слоя и стесненного падения // Изв. вузов. Нефть и газ. 1958. № 1. С. 125-131.
  9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.
  10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
  11. Ридерман М. С. Метод получения уравнения Кортевега - де Вриза - Бюргерса // ВММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 686-694.
  12. Сергеев Ю. А. Распространение нелинейных волн в бидисперсном псевдооживленном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 49-58.
  13. Гэло В. Л., Мясников В. П. Дисперсионные явления в кипящем слое // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 747-751.
  14. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
  15. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1964. С. 20-80.

Москва

Поступила в редакцию  
20.XII.1988