

УДК 532.527.013.4

© 1990 г.

ТИМОШИН С. Н.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО- НЕУСТОЙЧИВОГО СПЕКТРА ВИХРЕЙ ГЕРТЛЕРА

Типичным проявлением центробежной неустойчивости ламинарного пограничного слоя в плоскопараллельном потоке жидкости около вогнутой поверхности служит образование системы прилегающих к поверхности стационарных вихрей, оси которых направлены вдоль невозмущенного потока. Первая попытка построения линейной теории этого явления была предпринята в [1] с использованием приближения параллельного невозмущенного течения. После уточнения численного решения задачи [2] выяснилось, что модель Гертлера неправильно описывает устойчивость пограничного слоя по отношению к длинноволновым возмущениям (имеющим большой размер в направлении, перпендикулярном плоскости параллельности основного потока). Дальнейшие модификации теории Гертлера производились путем включения в уравнения возмущенного движения дополнительных слагаемых, с сохранением при этом основного свойства параллельного приближения — перехода от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (см. обзор в работах [3, 4]). Оказывается, что модели подобного типа правильно предсказывают порядки величин, характеризующих центробежную неустойчивость, и дают весьма близкие результаты для коротковолновых нейтральных вихрей, однако в описании длинноволновой ветви кривой нейтральной устойчивости имеются существенные расхождения.

В последние годы в исследовании вихрей Гертлера получили распространение строгие асимптотические подходы. Так, в [5, 6] построены соответственно линейная и нелинейная теории вихрей в окрестности коротковолновой нейтральной ветви при больших значениях чисел Рейнольдса Re и Гертлера G (безразмерное число Гертлера связано с кривизной обтекаемой поверхности κ , числом Re и характерной длиной L соотношением $G = \kappa L Re^{3/2}$). В [7] изучается линейная структура вихрей при $Re \gg 1$ и $G \sim 1$. Рассмотрены эффекты центробежной неустойчивости в течениях со взаимодействием пограничного слоя с внешним потоком [8]. В [9] обсуждаются вопросы неустойчивости пространственного пограничного слоя по отношению к вихрям Гертлера.

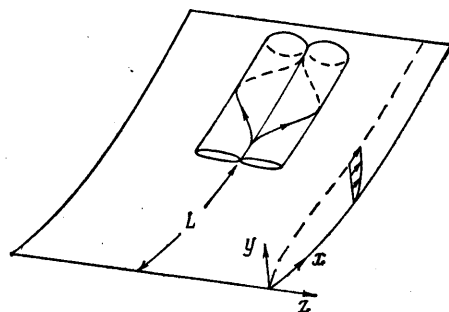
Целью настоящей работы ставится описание стационарных пространственно-неустойчивых (т. е. усиливающихся вниз по потоку) вихрей при больших характерных числах Рейнольдса и Гертлера. Подобный анализ позволяет на рациональной основе изучить влияние вязкости и непараллельности пограничного слоя на развитие центробежной неустойчивости течения. Полное исследование неустойчивого спектра вихрей Гертлера устанавливает связь рассматриваемой задачи с теорией коротковолновой нейтральной ветви [5, 6], а также с теорией продольно-поперечного взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком около искривленной поверхности [10, 11]. Последняя в случае вогнутой поверхности описывает один из характерных режимов неустойчивых вихрей Гертлера.

1. Постановка задачи. В качестве невозмущенного примем ламинарное плоскопараллельное течение несжимаемой жидкости, направленное вдоль слабоискривленной пластины по нормали к ее передней кромке (фиг. 1). Если на вогнутой поверхности пластины на расстоянии L от кромки имеется пространственная неровность, то под влиянием центробежных сил в пограничном слое вниз по потоку от неровности могут развиваться вихри Гертлера. Отвлекаясь от конкретной причины вихреобразования, будем характеризовать устойчивость течения на расстоянии L от кромки посредством собственных функций краевой задачи для уравнений возмущенного движения. Сформулируем прежде всего основную для дальнейшего систему уравнений, справедливую при больших характерных числах Рейнольдса и конечных значениях числа Гертлера [5,

7]. Пусть U_∞ — скорость потока вдали от пластины, ρ и ν — соответственно плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости, $Re = U_\infty L \nu^{-1} \gg 1$. Введем безразмерную криволинейную ортогональную систему координат x, y, z , полагая, что y отсчитывается по нормали к поверхности пластины, оси x и z располагаются на пластине и направлены соответственно перпендикулярно и параллельно передней кромке (фиг. 1). В качестве характерной длины в направлении x выберем величину L , а в двух других направлениях — $Re^{-1/2}L$. Тем самым предполагается, что поперечные размеры вихрей сравнимы с толщиной пограничного слоя. Положим, что пластина имеет постоянную кривизну L^{-1} . $\cdot Re^{-1/2}G$, где $G \sim 1$. Пусть u^*, v^*, w^* — отнесенные к U_∞ составляющие вектора скорости вдоль осей x, y, z соответственно, $\rho U_\infty^2 p^*$ — давление жидкости за вычетом давления в невозмущенном потоке. Представим функции течения при $Re \gg 1$ и $G \sim 1$ в виде

$$\{u^*, v^*, w^*, p^*\} = \{u(x, y, z), (1.1)$$

$$Re^{-1/2}v(x, y, z), Re^{-1/2}w(x, y, z), Re^{-1/2}p_0^*(x_0) + Re^{-1}p(x, y, z)\} + \dots$$



Фиг. 1

Первый член в выражении для давления связан с вытесняющим действием пограничного слоя, а второй — с наличием пространственных возмущений. Подстановка разложений (1.1) в уравнения Навье — Стокса, записанные в криволинейной системе координат, дает в главном приближении искомую систему уравнений

$$(\nabla \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{j} \left(Gu^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} = \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

$$\mathbf{V} = i\mathbf{u} + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w, \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Решения уравнений (1.2) должны удовлетворять условию прилипания ($\mathbf{V} = 0$ при $y = 0, x > 0$) и условиям срачивания с потенциальным потоком вне пограничного слоя

$$y \rightarrow +\infty: u \rightarrow 1, w \rightarrow 0, p - (G + u \partial v / \partial x) y - p_1^*(x) \rightarrow 0$$

где функция $p_1^*(x)$ определяется внешним течением с учетом эффекта вытеснения пограничного слоя.

Поле скоростей в невозмущенном пограничном слое представляется решением Блазиуса

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = 0, \quad \psi = x^{1/2} f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \quad (1.3)$$

$$f'''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1$$

Здесь и в дальнейшем штрихом отмечена производная от функции по своему аргументу.

Исследование собственных функций системы уравнений (1.2) в силу непараллельности невозмущенного течения (1.3) представляет серьезные трудности. Поэтому, предполагая возмущенное решение периодиче-

ским по z с периодом $\Delta z = 2\pi/l$ (l — волновое число), рассмотрим предельные формы уравнений (1.2) при $G \rightarrow \infty$ и различных соотношениях между l и G . Коротковолновая нейтральная ветвь имеет асимптотическую форму $l = O(G^{1/4})$ при $G \gg 1$ [5], в то время как для длинноволновой ветви справедлива оценка $l = O(G^{-1/2})$ [7]. Волновые числа изучаемых ниже неустойчивых вихрей заполняют интервал между указанными нейтральными значениями.

2. Наиболее неустойчивый участок спектра. Ограничимся исследованием структуры решений уравнений (1.2) вблизи линии расположения предполагаемого генератора вихрей $x=1$. Как показано ниже, вихри с максимальными инкрементами роста занимают тонкую пристеночную часть пограничного слоя и имеют соизмеримые поперечные размеры. Для построения соответствующей асимптотической теории положим

$$\begin{aligned} x &= 1 + G^{-1/3} a^{-1/3} x_1, \quad y = G^{-1/3} a^{-2/3} y_1, \quad z = G^{-1/3} a^{-2/3} z_1 \\ \{u, v, w, p\} &= \{G^{-1/3} a^{2/3} u_1, G^{1/3} a^{2/3} v_1, G^{1/3} a^{2/3} w_1, \\ &\quad GP_{00} + G^{2/3} (a^{1/3} p_1 + x_1 P_{01})\} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

где P_{00} и P_{01} — несущественные постоянные, $a = f''(0) = 0,332$ — пристеночное трение в невозмущенном пограничном слое (1.3).

После подстановки разложений (2.1) в уравнения (1.2) получим в совокупности с условиями затухания возмущений вверх по потоку и на большом удалении от стенки, а также с учетом условий прилипания на твердой поверхности следующую нелинейную краевую задачу:

$$(\nabla_1 \nabla_1) \mathbf{V}_1 + \mathbf{j} \left(u_1^2 + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} = \Delta_1 \mathbf{V}_1, \quad \nabla_1 \mathbf{V}_1 = 0 \quad (2.2)$$

$$x_1 \rightarrow -\infty: \quad u_1 \rightarrow y_1, \quad w_1 \rightarrow 0; \quad y_1 = 0: \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

$$y_1 \rightarrow +\infty: \quad u_1 - y_1 \rightarrow 0, \quad p_1 + \frac{1}{3} y_1^3 \rightarrow 0$$

$$\mathbf{V}_1 = i u_1 + j v_1 + k w_1, \quad \nabla_1 = i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial y_1} + k \frac{\partial}{\partial z_1}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$$

Сформулированная задача допускает линейризацию в случае возмущений с малой амплитудой ε . Будем искать периодическое по переменной z_1 решение задачи (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \{u_1, v_1, w_1, p_1\} &= \{y_1, 0, 0, -\frac{1}{3} y_1^3\} + \varepsilon \exp(\sigma_1 x_1 + i l_1 z_1) \{u_{11}(y_1), \\ &\quad v_{11}(y_1), w_{11}(y_1), p_{11}(y_1)\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

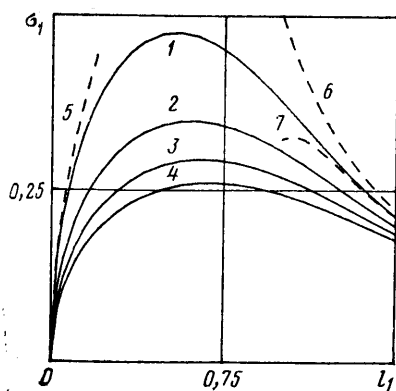
Систему линейризованных уравнений (2.2) относительно функций u_{11} , v_{11} , w_{11} и p_{11} можно свести к одному уравнению шестого порядка относительно u_{11} , для которого условия прилипания и затухания возмущений при $y_1 \rightarrow +\infty$ определяют набор однородных краевых условий. В итоге получаем следующую задачу на собственные значения:

$$D_2 D_1 D_2 u_{11} + 2 l_1^2 y_1 u_{11} = 0 \quad (2.3)$$

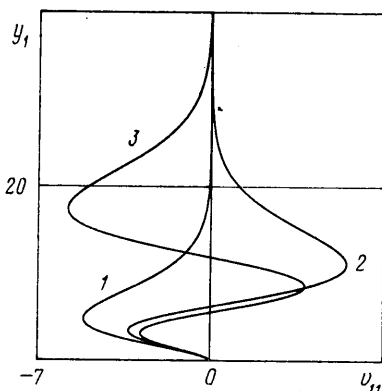
$$D_1 = d^2/dy_1^2 - l_1^2, \quad D_2 = D_1 - \sigma_1 y_1$$

$$u_{11}(0) = u_{11}(+\infty) = 0, \quad u_{11}''(0) = l_1^2 u_{11}(0), \quad u_{11}'''(0) = l_1^2 u_{11}'(0)$$

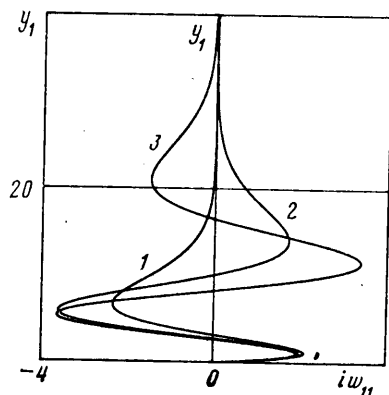
В данном случае достаточно поставить четыре краевых условия, поскольку оказывается, что равенство $u_{11}(+\infty) = 0$ включает из общего решения уравнения (2.3) сразу три линейно независимых решения. Отсюда следует, что краевая задача (2.3) разрешима лишь при определенном соотношении между параметрами σ_1 и l_1 .



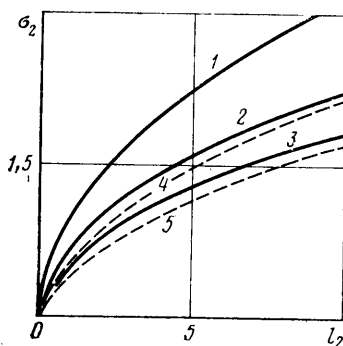
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для численного решения задачи (2.3) условие $u_{11}(0)=0$ было заменено на $u_{11}'(0)=1$, а условие на бесконечности — тремя соотношениями $u_{11}(y_m)=u_{11}'(y_m)=u_{11}''(y_m)=0$ при достаточно большом y_m . Полученная неоднородная задача решалась методом прогонки. С помощью метода Ньютона при заданном l_1 подбиралось такое значение σ_1 , при котором выполняется условие $u_{11}(0)=0$. Типичная величина $y_m=40$, число точек разбиения отрезка интегрирования изменялось в пределах 200–800. Координата y_m должна быть увеличена при малых l_1 . Отметим, что параметры σ_1 и l_1 предполагались действительными.

Оказалось, что при любом фиксированном волновом числе l_1 задача (2.3) имеет счетный набор решений, которые можно пронумеровать в порядке убывания соответствующих значений инкремента σ_1 . Графики собственных чисел $\sigma_1(l_1)$ для четырех первых решений показаны на фиг. 2 (кривые 1–4). Кривая 1 соответствует наиболее неустойчивой моде вихрей Гертлера, а точка максимума на каждой кривой определяет параметры наиболее неустойчивых вихрей для данной моды. У наиболее быстрорастущих вихрей первой моды имеем $l_1=0,541$, $\sigma_1=0,476$.

Профили поперечной $v_{11}(y_1)$ и боковой скорости $i w_{11}(y_1)$ возмущенного движения для первых трех мод показаны на фиг. 3 и 4 соответственно (волновое число $l_1=0,54$). Отметим, что число нулей собственной функции увеличивается вместе с ее номером (для собственных функций с большими номерами это можно показать с помощью метода ВКБ). Следовательно, при переходе от низшей моды к высшей характер вихревого движения становится все более сложным. У первой моды (представляющей наибольший практический интерес) возмущенное течение состоит

из прилегающего к твердой поверхности одинарного слоя вихрей; каждая пара соседних вихрей имеет противоположное направление вращения. Сопоставление нулей и максимумов функций $v_{11}(y_1)$ и $iw_{11}(y_1)$ показывает, что возмущенное течение второй моды представляет собой двойной слой вихрей, причем вихри из разных слоев располагаются на одной вертикали и имеют противоположное направление вращения. В случае третьей моды вихри располагаются в три слоя и т. д. У многослойных возмущенных течений высших мод направление вращения устанавливается в шахматном порядке.

Укажем предельные свойства вихрей с большими и малыми волновыми числами l_1 . Если $l_1 \ll 1$, то поперечные размеры вихря увеличиваются пропорционально l_1^{-1} , при этом возмущенное движение становится большей частью невязким (вязкость проявляется лишь на границе вихря, контактирующей с твердой поверхностью). Для инкрементов роста длинноволновых вихрей можно получить асимптотическую формулу

$$\sigma_1 = (l_1/n)^{1/2} + \dots, \quad l_1 \rightarrow 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Асимптота первой моды показана на фиг. 2 (кривая 5). Соотношения (2.4) можно вывести непосредственно из уравнения (2.3), однако ниже оно будет получено при описании другого характерного режима неустойчивых вихрей.

Расчет показал, что в коротковолновом пределе ($l_1 \gg 1$) вихревое течение сосредоточено в слое жидкости, отделенном от стенки областью с малыми возмущенными скоростями — вихри как бы всплывают внутрь пограничного слоя. Для описания этого процесса представим решение задачи (2.3) в виде

$$y_1 = 2l_1^4 + l_1^{3/2}\xi, \quad \sigma_1 = 1/2 l_1^{-2} + \sigma_{11} l_1^{-7} + \dots \quad (2.5)$$

$$u_{11} = u^\circ(\xi) + \dots, \quad l_1 \rightarrow \infty, \quad (\sigma_{11}, \xi) = O(1)$$

Выполняя в соответствии с (2.5) предельный переход $l_1 \rightarrow \infty$ в (2.3), получим в главном приближении задачу вида

$$u^{\circ\prime\prime} - (\sigma_{11} + 1/32 \xi^2) u^\circ = 0, \quad u^\circ(\pm\infty) = 0$$

которая, как это можно показать, используя известные свойства функций параболического цилиндра [12], имеет решение, если $\sigma_{11} = -2^{-3/2}(2n-1)$, $n=1, 2, \dots$ Таким образом, асимптотическое представление инкрементов нарастания коротковолновых вихрей описывается формулой

$$\sigma_1 = 1/2 l_1^{-2} - (1/2)^{3/2} l_1^{-7} (2n-1) + \dots, \quad l_1 \rightarrow \infty, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Кривые 6 и 7 на фиг. 2 соответствуют одно- и двучленному представлению (2.6) для первой моды $n=1$.

Соотношение (2.6) теряет пригодность, если расстояние от твердой поверхности до вихревого слоя оказывается сравнимым с толщиной пограничного слоя. В этом случае период вихрей оценивается как $\Delta z \sim G^{-1/4}$ и возникает новый режим течения, которому будет посвящена отдельная работа. Здесь укажем лишь окончательный результат: по мере увеличения волнового числа вихревой слой продолжает удаляться от стенки, что сопровождается монотонным уменьшением инкремента. В соответствии с результатами работы [5] вихри оказываются нейтральными, если расстояние от вихревого слоя до твердой поверхности $y=y_0$ удовлетворяет условию $(U_0(y_0)U_0'(y_0))' = 0$, где $U_0(y)$ — профиль скорости в невозмущенном пограничном слое. Вихри с меньшим периодом затухают вниз по потоку.

3. Невязкие неустойчивые вихри. В предыдущем пункте отмечалось, что возмущенное движение с волновым числом $l_1 \ll 1$ имеет преимущественно невязкий характер. В полном объеме это свойство проявляется при $l_1 \sim G^{-1/4}$, когда поперечные размеры вихря становятся соизмеримыми с толщиной пограничного слоя. В таком случае область возмущенно-

го течения разделяется на две подобласти. В пристеночном вязком слое решение представляется в виде

$$\begin{aligned} x &= 1 + G^{-1/2}x_2, \quad y = G^{-1/2}y_2, \quad (x_2, y_2, z) = O(1) \\ \{u, v, w, p\} &= \{G^{-1/2}u_{21}, G^{1/2}v_{21}, G^{1/2}w_{21}, GP_0 + G^{3/2}p_{21}\} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Совершая в соответствии с (3.1) предельный переход $G \rightarrow \infty$ в уравнениях (1.2), приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} u_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial y_2} + w_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial y_2^2} \\ u_{21} \frac{\partial w_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{\partial w_{21}}{\partial y_2} + w_{21} \frac{\partial w_{21}}{\partial z} + \frac{\partial p_{21}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial y_2^2} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial y_2} &= 0, \quad \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial w_{21}}{\partial z} = 0 \\ y_2 = 0: \quad u_{21} &= v_{21} = w_{21} = 0 \\ x_2 \rightarrow -\infty: \quad u_{21} &\rightarrow ay_2, \quad w_{21} \rightarrow 0, \quad a = f''(0) \\ y_2 \rightarrow +\infty: \quad w_{21} &\rightarrow 0, \quad u_{21} - ay_2 \rightarrow A(x_2, z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что благодаря специальному подбору амплитуды возмущения давления задача оказывается нелинейной. Помимо встречавшихся ранее краевых условий в (3.2) фигурирует нетривиальное условие при $y_2 \rightarrow +\infty$, содержащее неизвестную пока функцию A ; неизвестно также распределение давления в подслое p_{21} . Для замыкания задачи необходимо рассмотреть движение в основной части пограничного слоя, где решение представляется в виде

$$\begin{aligned} x &= 1 + G^{-1/2}x_2, \quad (x_2, y, z) = O(1) \\ \{u, v, w, p\} &= \{U_0(y) + G^{-1/2}u_2, G^{1/2}v_2, G^{1/2}w_2, GP_0(y) + G^{3/2}p_2\} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функция $U_0(y)$ характеризует профиль скорости, а $P_0(y)$ — распределение давления в невозмущенном пограничном слое. Согласно (1.3), $U_0 = f'(y)$. Поскольку функции u_2, v_2, w_2 и p_2 удовлетворяют линейным уравнениям с коэффициентами, зависящими только от y , решение можно искать в виде

$$\{u_2, v_2, w_2, p_2\} = \varepsilon \exp(\sigma_2 x_2 + i l_2 z) \{u_{22}(y), v_{22}(y), w_{22}(y), p_{22}(y)\}$$

В итоге уравнения в частных производных приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим, к примеру, уравнение относительно функции $v_{22}(y)$, которое в совокупности с условием затухания возмущений при $y \rightarrow +\infty$ и условием сращивания разложений (3.1), (3.3) составляет задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} U_0 v_{22}'' + \left(2 \frac{l_2^2}{\sigma_2^2} U_0' - U_0'' - l_2^2 U_0 \right) v_{22} &= 0 \\ v_{22}(0) &= v_{22}(+\infty) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если решение задачи (3.4) известно, то возмущение продольной составляющей вектора скорости определяется по формуле

$$u_{22} = -v_{22} U_0' / (\sigma_2 U_0)$$

Из (3.4) следует, что $v_{22} = O(y)$ при $y \rightarrow 0$, поэтому $u_{22}(0) = O(1)$, и тогда условие сращивания разложений (3.1), (3.3) для функции u дает

$$A(x_2, z) = \varepsilon \exp(\sigma_2 x_2 + i l_2 z) u_{22}(0)$$

Таким образом, в задаче для вязкого подслоя (3.2) оказывается известной толщина вытеснения пограничного слоя (так называемый ком-

пенсационный режим течения). Поскольку движение в подслое играет подчиненную роль в организации возмущенного течения, ограничимся указанием работ [13, 14], в которых свойства пространственных течений в компенсационном режиме рассматриваются в линейном и нелинейном приближениях соответственно.

Возвращаясь к основной задаче (3.4), рассмотрим модельный пример, допускающий аналитическое решение. Пусть $U_0 = 1 - \exp(-y)$ (такой профиль скорости реализуется в пограничном слое с сильным отсосом [15]). Выполняя в (3.4) замену переменных, получим задачу на собственные значения для гипергеометрического уравнения Гаусса

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - e^{-y}, \quad v_{22} = (1 - \xi)^{l_2} \xi \varphi(\xi), \quad l_2 > 0 \\ \xi(1 - \xi)\varphi'' + [2 - (3 + 2l_2)\xi]\varphi' + 2\left(\frac{l_2^2}{\sigma_2^2} - l_2\right)\varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= O(1), \quad \varphi(1) = O(1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя известные свойства решений гипергеометрического уравнения [12], можно показать, что задача (3.5) имеет решение, лишь если

$$\sigma_2 = \pm \frac{\sqrt{2} l_2}{\sqrt{2nl_2 + n^2 - 1}}, \quad l_2 > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

при этом собственные функции $\varphi_n(\xi)$ оказываются полиномами степени $n-1$. Поскольку основной интерес представляют неустойчивые вихри, в дальнейшем можно опустить решения с отрицательными инкрементами σ_2 .

Таким образом, в модельном случае задача (3.4) имеет счетный спектр действительных собственных чисел $\sigma_2 = \sigma_2(l_2)$. Еще одно точное решение задачи получается при любом невозмущенном профиле скорости U_0 и соответствует наиболее неустойчивым вихрям $n=1$ в (3.6)

$$v_{22} = U_0(y) e^{-l_2 y}, \quad \sigma_2 = l_2^{1/2} \quad (3.7)$$

Решение (3.7) справедливо и для пограничного слоя Блазиуса. Вышие моды неустойчивых вихрей ($n \geq 2$) в этом случае определялись численно. Для этого вместо однородных краевых условий в (3.4) были поставлены условия вида

$$v_{22}(y_m) = e^{-l_2 y_m}, \quad v_{22}'(y_m) = -l_2 e^{-l_2 y_m} \quad (3.8)$$

при достаточно большом y_m (обычно полагалось $y_m = 10$). Соотношения (3.8) представляют собой главные члены асимптотического разложения решения задачи (3.4) при $y \gg 1$. При фиксированных значениях l_2 и σ_2 выполнялось интегрирование уравнения (3.4) с условиями (3.8) от точки $y = y_m$ до $y = 0$ со вторым порядком точности (шаг интегрирования $\Delta y = 0,01$), в результате чего определялась величина $v_{22}(0)$. С помощью метода Ньютона для каждого l_2 подбиралось такое значение σ_2 , при котором выполняется условие $v_{22}(0) = 0$. Сравнение численного и аналитического решений в случае профиля скорости $U_0 = 1 - \exp(-y)$ показало, что результаты графически неразличимы.

Инкременты нарастания невязких вихрей Гертлера для первых трех мод показаны на фиг. 5. Сплошные кривые 1-3 относятся к пограничному слою Блазиуса, а кривая 1 и штриховые линии 4, 5 представляют точное решение модельной задачи (3.6). Отметим, что у каждой моды увеличение волнового числа l_2 сопровождается монотонным ростом инкремента σ_2 .

Рассмотрим предельные свойства коротковолновых вихрей ($l_2 \gg 1$). Потребуем, чтобы при $l_2 \rightarrow \infty$ структура уравнения (3.4) не менялась. Это возможно лишь в том случае, если $\sigma_2 \sim \sqrt{l_2}$, $y \sim 1/l_2$. Пусть $U_0 = ay +$

+ ... при $y \rightarrow 0$. Производя в соответствии с указанными оценками предельный переход в уравнении (3.4), получим в главном приближении задачу вида

$$y v_{22}'' + \left(2 \frac{l_2^2}{\sigma_2^2} - l_2^2 y \right) v_{22} = 0, \quad v_{22}(0) = v_{22}(+\infty) = 0 \quad (3.9)$$

Предельная задача (3.9) не содержит величины невозмущенного трения a , следовательно, асимптотические свойства собственных чисел при $l_2 \gg 1$ не зависят от конкретного вида функции $U_0(y)$. Обращаясь теперь к решению модельной задачи (3.6) и полагая $l_2 \rightarrow \infty$, сразу получим собственные значения задачи (3.9)

$$\sigma_2 = (l_2/n)^{1/2} + \dots, \quad l_2 \gg 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

После очевидной замены переменных, связанной с деформацией координат x и z , формула (3.10) сводится к указанной выше длинноволновой асимптотике вязких вихрей (2.4). Это означает, что при переходе от характерного вязкого режима возмущенного течения ($l_1 \sim 1$) к невязкому ($l_2 \sim 1$) параметры вихрей меняются непрерывно.

Рассмотрим теперь свойства длинноволновых невязких вихрей ($l_2 \ll 1$). Анализ точных решений (3.6) и (3.7) показывает, что у длинноволновых вихрей происходит отделение первой моды от остального счетного набора мод: в то время как у первой моды $\sigma_2 = \sqrt{l_2}$, у высших мод при $l_2 \rightarrow 0$ имеем $\sigma_2 = l_2 \sqrt{2/(n^2 - 1)} + \dots$, $n = 2, 3, \dots$. Расчеты показали, что линейный закон изменения $\sigma_2(l_2)$ при $l_2 \rightarrow 0$ у высших мод, но с другими численными коэффициентами, справедлив и в пограничном слое Блазиуса.

Оказывается, что ответвление первой моды сопровождается появлением не только количественных, но и качественных различий в структуре вихрей. Вихри высших мод ($n \geq 2$) при увеличении периода приобретают постоянный размер в поперечном направлении (по оси y), так что вихревые слои оказываются локализованными внутри пограничного слоя. Для описания такого предельного состояния достаточно в уравнении (3.4) отбросить последнее слагаемое в круглых скобках и заменить условие $v_{22}(+\infty) = 0$ на $v_{22}'(+\infty) = 0$.

Одновременно с уменьшением волнового числа падает инкремент роста, поэтому характерный продольный размер возмущенной области увеличивается. Этот процесс продолжается до тех пор, пока характерный продольный размер вихрей не окажется соизмеримым с расстоянием от передней кромки пластины до вихрегенератора ($x \sim 1$). Последнее имеет место при $\Delta z \sim G^{1/2}$ или, для волнового числа, при $l = 2\pi/\Delta z \sim G^{-1/2}$, что совпадает с указанной в [7] асимптотикой длинноволновой нейтральной ветви. Теория устойчивости в интервале изменения волновых чисел $l \sim G^{-1/2}$ должна учитывать вязкость и непараллельность основного течения и в настоящее время отсутствует.

Иначе меняется структура вихрей первой моды. Точное решение (3.7) показывает, что вместе с увеличением бокового размера вихрей (их периода) происходит пропорциональное увеличение толщины вихря: $y \sim l_2^{-1}$. При этом возмущенная область невязкого течения не только включает в себя основную часть пограничного слоя, но захватывает еще и внешний потенциальный поток. В совокупности с пассивным вязким подслоем вихрь приобретает трехслойную структуру. При дальнейшем увеличении периода вихрей достигается такое состояние, когда вязкий подслой уже в главном приближении включается в процесс организации возмущенного движения. В этом случае реализуется новый характерный режим течения.

4. Продольно-поперечное взаимодействие. Указанный выше режим неустойчивых вихрей первой моды описывается теорией продольно-поперечного взаимодействия

[10]. В обозначениях настоящей работы он реализуется при $x-1=G^{-1/2}x_3$, $z=G^{1/2}z_3$, $(x_3, z_3)=O(1)$. В направлении оси y область возмущенного движения разделяется на внешнюю область потенциального течения $y \sim G^{1/2}$ и основную часть пограничного слоя $y \sim 1$, где локально-невязкое течение сопровождается действием центробежных сил. Кроме того, в пристеночной части пограничного слоя располагается вязкий подслой. Рассмотрим только движение в подслое, поскольку исчерпывающее описание двух оставшихся областей, а также вывод условия взаимодействия, связывающего давление в вязком подслое с его толщиной вытеснения, содержатся в [10]. Пусть $\varepsilon \ll 1$ — относительная амплитуда возмущения продольной составляющей вектора скорости в подслое, где решение представляется в виде

$$\begin{aligned} y &= G^{-1/2}y_3, \quad y_3 = O(1), \quad u = G^{-1/2}[ay_3 + \varepsilon Eu_3(y_3) + \dots] + \dots \\ v &= G^{1/2}\varepsilon Ev_3(y_3) + \dots, \quad w = G^{3/2}\varepsilon Ew_3(y_3) + \dots \\ p &= GP_0 + G^{5/2}\varepsilon Ep_3(y_3) + \dots, \quad E = \exp(\sigma_3 x_3 + i l_3 z_3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подстановка (4.1) в уравнения (1.2) в совокупности с обычными краевыми условиями и условием взаимодействия [10] приводит к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \sigma_3 a y_3 u_3 + a v_3 &= u_3'', \quad p_3' = 0 \\ \sigma_3 a y_3 w_3 + i l_3 p_3 &= w_3'', \quad \sigma_3 u_3 + v_3' + i l_3 w_3 = 0 \\ u_3(0) &= v_3(0) = w_3(0) = 0, \quad u_3(+\infty) = a A_3 \\ p_3(+\infty) &= A_3(1 - \sigma_3^2 / |l_3|) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решение задачи (4.2) можно получить с помощью метода, описанного в [11]. В итоге будем иметь соотношение между инкрементом роста σ_3 и волновым числом $l_3 > 0$ вихрей Гертлера

$$\frac{\sigma_3^2}{l_3} + 3a^{5/3} |Ai'(0)| \frac{\sigma_3^{5/3}}{l_3^2} = 1 \quad (4.3)$$

где $Ai'(0) = -0.2588$ — производная от функции Эйри.

Из соотношения (4.3) в случае коротковолновых вихрей $l_3 \gg 1$ получаем формулу типа (3.7): $\sigma_3 = \sqrt[3]{l_3} + \dots$. В длинноволновом пределе имеем

$$l_3 \rightarrow 0: \quad \sigma_3 = [3 |Ai'(0)|]^{-3/5} a^{-1} l_3^{4/5} + \dots \quad (4.4)$$

Физический смысл последнего соотношения состоит в том, что у вихрей с большим периодом происходит вырождение внешней потенциальной области, в результате чего вихри концентрируются в пограничном слое (соответствующая теория взаимодействия развита в работе [11]). Можно показать, что формула (4.4) справедлива до тех пор, пока период вихрей не становится равным $\Delta z = O(G^{1/2})$. Таким образом, в окрестности длинноволновой нейтральной ветви происходит воссоединение первой и высших мод.

Автор благодарит А. И. Рубана за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Görtler H. Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Fachgruppe I. Neue Folge 2. 1940. S. 1–26.
2. Hämmerlin G. Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // J. Rat. Mech. Anal. 1955. V. 4. № 2. P. 279–321.
3. Herbert Th. On the stability of the boundary layer along a concave wall // Arch. Mech. Stosow. 1976. V. 28. № 5–6. P. 1039–1055.
4. Floryan J. M., Saric W. S. Stability of Görtler vortices in boundary layers // AIAA J. 1982. V. 20. № 3. P. 316–324.
5. Hall P., Görtler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // J. Fluid Mech. 1982. V. 124. P. 475–494.
6. Hall P., Lakin W. D. The fully nonlinear development of Görtler vortices in growing boundary layers // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1988. V. 415. № 1849. P. 421–444.
7. Hall P. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid. Mech. 1983. V. 130. P. 41–58.
8. Hall P., Bennett J. Taylor – Görtler instabilities of Tollmien – Schlichting waves and others flows governed by the interactive boundary layer equations // J. Fluid Mech. 1988. V. 171. P. 441–457.
9. Hall P. The Görtler vortex instability mechanism in three-dimensional boundary layers // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 399. № 1816. P. 135–152.
10. Рожко С. Б., Рубан А. И. Продольно-поперечное взаимодействие в трехмерном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 42–50.

11. Рожко С. Б., Рубан А. И., Тимошин С. Н. Взаимодействие пространственного пограничного слоя с вытянутым препятствием // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 39–48.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: Пер. с англ. / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. Smith F. T. Pipeflows distorted by nonsymmetric indentation or branching // *Mathematika* (Gr. Brit.) Ser. 1. 1976. V. 23. № 1. P. 62–83.
14. Sykes R. I. On three-dimensional boundary layer flow over surface irregularities // *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*. 1980. V. 373. № 1754. P. 311–329.
15. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.XI.1988