

УДК 532.526.2

© 1990 г.

ГУРЕВИЧ Ю. Г.

РАЗВИТИЕ ЛОКАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В двумерном пограничном слое на искривленной поверхности принято выделять два типа возмущений — продольные и поперечные. При обтекании вогнутой поверхности развитие этих двух типов возмущений качественно различно. Потеря устойчивости к малым продольным возмущениям соответствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную. В отличие от этого потеря устойчивости к поперечным возмущениям приводит к тому, что в направлении, от которого невозмущенное течение не зависит, могут формироваться периодически расположенные стационарные структуры [1–3].

В статье анализируется процесс нелинейного развития локального поперечного возмущения на вогнутой поверхности и рассматривается механизм формирования периодической структуры, возникающей вследствие такого возмущения. При этом основное внимание уделено качественному анализу течения. На основе асимптотического поведения уравнений Навье-Стокса при $Re \rightarrow \infty$ получены уравнения, описывающие развитие поперечного возмущения в ламинарном пограничном слое.

Получено решение, описывающее вихри Тэйлора, возникающие между двумя коаксиальными цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра. Проведен анализ экспериментальных данных по вихрям Гертлера в пограничном слое.

1. Пусть на вогнутой цилиндрической поверхности с характерным радиусом R формируется двумерный пограничный слой. Ось x направим вдоль направляющей, ось z — вдоль образующей, а ось r — по нормали к обтекаемой поверхности. Компоненты скорости по координатам x, z, r обозначим соответственно u, w, v . Невозмущенное течение не зависит от координаты z и составляющая скорости $w=0$.

Рассмотрим вопрос о том, как будет развиваться течение вблизи поверхности при $t > 0$, если в начальный момент времени $t=0$ исходное течение возмущено так, что вдоль линии $z=0$ и в некоторой ее окрестности $|z| < \tau$ толщина пограничного слоя δ меньше, чем толщина невозмущенного пограничного слоя δ_0 ($\delta < \delta_0$ при $|z| < \tau$). Начальное состояние возмущенного потока показано на фиг. 1.

Разница в толщинах пограничного слоя в возмущенной и невозмущенной областях не предполагается малой и имеет величину порядка δ_0 . Такое возмущение может быть вызвано, например, небольшим локальным отсосом пограничного слоя вдоль линии $z=0$, локальным тангенциальным вдувом или другой причиной. Интересным с практической точки зрения примером такого течения является пограничный слой на вогнутой поверхности вблизи линии ее пересечения с плоскостью, так как вблизи линии пересечения толщина пограничного слоя асимптотически стремится к нулю по сравнению с δ_0 при $Re \rightarrow \infty$ [4].

Для дальнейшего рассмотрения можно считать, что в начальный момент времени $t=0$, причина, вызвавшая утоньшение вдоль оси x , отсутствует и течение развивается только под действием начального возмущения.

При $|z| > \tau$ распределение давления в потоке в направлении r определяется соотношением

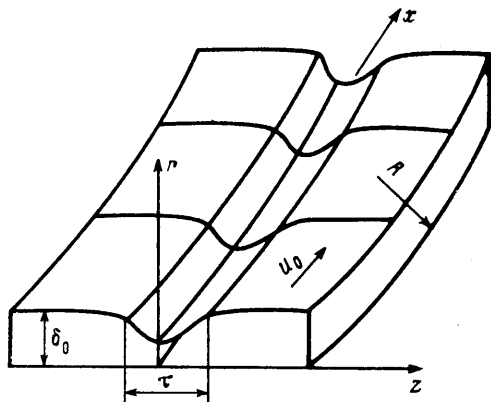
$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{\rho u_0^2}{R-r}$$

где u_0 — составляющая скорости в невозмущенной части потока.

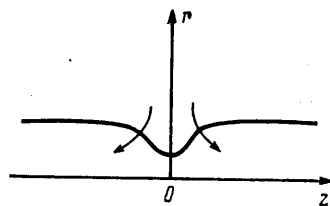
При $|z| < \tau$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{\rho u^2}{R-r}$$

Пусть на некотором, достаточно большом расстоянии от обтекаемой поверхности $r_0 \gg \delta_0$, скорость и давление в потоке не зависят от z . Тогда раз-



Фиг. 1



Фиг. 2

ница давлений на поверхности в областях $|z| < \tau$ и $|z| > \tau$ будет определяться соотношением

$$\Delta p = \int_{r_0}^0 \frac{\rho u_0^2}{R-r} dr - \int_{r_0}^0 \frac{\rho u^2}{R-r} dr$$

Таким образом, начальное возмущение приводит к росту давления на поверхности вблизи линии $z=0$. Давление в области $|z| < \tau$ увеличивается на величину

$$\Delta p \sim \frac{\rho u^2}{R} \delta_0$$

Возникающий при этом индуцируемый градиент давления по оси z

$$\frac{\partial p}{\partial z} \sim \frac{\rho u^2}{R} \frac{\delta}{\tau} \quad (1.1)$$

Вследствие этого частицы жидкости начинают двигаться вдоль оси z от линии $z=0$ с характерной скоростью w . Из уравнения движения по оси z следует, что в начальный момент времени

$$\frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.2)$$

Интервал времени, в течение которого жидкая частица пройдет расстояние порядка τ , имеет величину $\Delta t \sim \tau/w$. Тогда, используя (1.1), (1.2) и уравнение неразрывности, можно получить оценки для скоростей w и v :

$$w \sim u \sqrt{\frac{\delta_0}{R}}, \quad v \sim u \sqrt{\frac{\delta_0}{R}} \frac{\delta_0}{\tau} \quad (1.3)$$

Характерные масштабы изменения параметров потока в направлениях x , z , r имеют соответственно величины

$$L_x \sim 1, L_z \sim \tau, L_r \sim \delta_0 \quad (1.4)$$

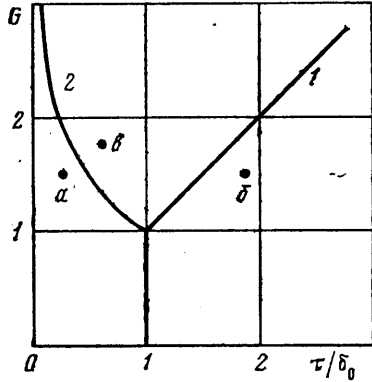
Для дальнейших оценок воспользуемся уравнением импульса в направлении оси x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$$

Характеристикой, определяющей развитие возмущения, является знак величины $\partial u/\partial t$. Если в области возмущения при $|z| \sim \tau$ величина $\partial u/\partial t > 0$, то это значит, что пограничный слой утоньшается и размер области утоньшения пограничного слоя возрастает. Под действием индуцируемого градиента давления возмущение как бы «разбегается». На фиг. 2 стрелками показано направление движения условной границы пограничного слоя при $\partial u/\partial t > 0$.

Если $\partial u/\partial t < 0$, то пограничный слой в зоне возмущения начинает выравниваться — возмущение затухает. При $|z| \sim \tau$ слагаемые в правой части соотношения (1.5) без учета величины $\partial u/\partial t$ имеют порядок величин $w \partial u/\partial z \sim \nu \partial u/\partial r$. Тогда условие разбегания возмущения ($\partial u/\partial t > 0$) с учетом (1.3), (1.4) примет вид

$$\frac{u^2}{\tau} \sqrt{\frac{\delta_0}{R}} > \nu \left(\frac{u}{\delta_0^2} + \frac{u}{\tau^2} \right) \quad (1.6)$$



Фиг. 3

Пусть характерный размер возмущения $\tau > \delta_0$. Тогда порядок величины правой части соотношения (1.6) определяется слагаемым $\nu u/\delta_0^2$ и условие (1.6) примет вид

$$\frac{u \delta_0}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_0}{R}} > \frac{\tau}{\delta_0} \quad (1.7)$$

Если $\tau < \delta_0$, то основную роль играет слагаемое $\nu u/\tau^2$ и условие (1.6) приводит к соотношению

$$\frac{u \delta_0}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_0}{R}} > \frac{\delta_0}{\tau} \quad (1.8)$$

В неравенствах (1.6)–(1.8) имеется в виду соотношение между порядками величин. Заметим, что в приведенных оценках под величиной ν может пониматься как ламинарная, так и характерная турбулентная вязкость.

На фиг. 3 показана диаграмма, которая определяет области качественно различного поведения начального возмущения, построенная на основании соотношений (1.7), (1.8). Линии 1 и 2 описываются соответственно формулами

$$G = \frac{\tau}{\delta_0} \quad (\tau > \delta_0), \quad G = \frac{\delta_0}{\tau} \quad (\tau < \delta_0)$$

$$G = \frac{u \delta_0}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_0}{R}}$$

Область, лежащая выше линий 1 и 2, соответствует возмущениям, которые разбегаются, как показано на фиг. 2 ($\partial u/\partial t > 0$).

Проанализируем качественно развитие локального возмущения, исходя из диаграммы на фиг. 3. Когда параметр G по порядку величины мень-

ше единицы, то кривизна не оказывает воздействия на развитие возмущения и оно затухает, либо стягиваясь за счет слагаемого $\partial^2 u / \partial z^2$, когда $\tau < \delta_0$, либо сглаживаясь за счет слагаемого $\partial^2 u / \partial r^2$ при $\tau < \delta_0$. Если точка, соответствующая начальному возмущению, находится левее линии 2, например, в точке «а», оно будет стягиваться. Его масштаб τ начнет уменьшаться, и точка «а» двигается влево, пока возмущение не исчезнет. Это связано с действием вязких сил, которые определяются величиной $\partial^2 u / \partial z^2$. Если начальному возмущению соответствует точка «б», то с течением времени оно будет сглаживаться не меняя своего характерного масштаба τ . Основную роль в развитии такого возмущения играют вязкие силы, определяемые величиной $\partial^2 u / \partial r^2$. Если же начальному возмущению соответствует точка «в», то его развитие будет описываться движением точки «в» вправо до пересечения с линией 1. Возмущение будет разбегаться.

В связи с проведенным анализом возникает вопрос: возможно ли такое развитие возмущения, которое приведет к некоторому стационарному течению, отличному от невозмущенного. Если такие стационарные течения существуют, то на фиг. 3 им соответствуют точки, лежащие на линиях 1 и 2. Однако условия для возникновения течений, соответствующих линиям 1 и 2, различны. Для возникновения стационарного течения в окрестности линии 2 необходимо, чтобы начальное возмущение само лежало вблизи этой линии, так как в случае его смещения в любую сторону от линии 2 начинается нестационарный процесс, который приведет либо к разбеганию, либо к стягиванию возмущения. В отличие от этого любое начальное возмущение, лежащее в области разбегания — между линиями 1 и 2 — в процессе своего развития будет приближаться к линии 1, так как его масштаб τ растет. Затем оно может или привести к стационарному течению, соответствующему точке на линии 1, или, перейдя через линию 1, будет сглаживаться не меняя своего масштаба. Таким образом, при заданном значении параметра G существует интервал значений τ / δ_0

$$\frac{1}{G} < \frac{\tau}{\delta_0} < G \quad (1.9)$$

определяющий начальные возмущения, развитие которых может привести к возникновению стационарного трехмерного течения, которому соответствует точка на линии 1 фиг. 3. При этом характерный поперечный масштаб такого течения τ_0 определяется из условия $\tau_0 / \delta_0 = G$.

2. Проведенный выше анализ показывает, что при некотором соотношении параметров развитие локального возмущения приводит к растеканию газа от линии $z=0$ в области с характерным размером τ_0 по оси z . На границе области возмущенного и невозмущенного течений при $z \sim \tau_0$ существует область со сгущением линий тока. В эту область стекаются жидкие частицы, заторможенные в пристеночной области. Из физических соображений понятно, что при некотором соотношении параметров течения возможно такое развитие возмущения, когда сгущение линий тока будет приводить к образованию локального максимума толщины пограничного слоя при $z \sim \tau_0$. Наличие максимума вызывает уменьшение давления в области его расположения, так же как утоньшение пограничного слоя приводит к росту давления. Благодаря этому в области $z > \tau_0$ может возникнуть течение со скоростью $w < 0$.

Рассмотренный механизм возникновения пониженного давления на границе области возмущения может приводить к формированию трехмерного течения в окрестности линии $z \approx 2\tau_0$ аналогично тому, как формируются течения в окрестности линии $z=0$ и, вообще говоря, к формированию периодической структуры по оси z . Такая возможность формирования периодической структуры вследствие локального возмущения подтверждается экспериментально. В некоторых экспериментах на осесимметричных моделях при повороте одной из составных частей модели на фиксированный

угол наблюдается поворот всей периодической структуры на тот же угол [5].

Заметим, что проведенный качественный анализ справедлив не только для пограничного слоя на вогнутой поверхности. При развитии поперечных возмущений важно наличие кривизны линий тока и соответствующего градиента скорости. Например, поперечные возмущения могут развиваться вблизи линий отрыва и присоединения пограничного слоя, при развитии волны Толмина — Шлихтинга. Аналогичное течение может возникнуть и на неискривленных вращающихся поверхностях, когда индуцируемый градиент давления по оси z возникает вследствие кориолисовой силы, действующей в направлении нормали \mathbf{n} к поверхности. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial n} \sim u\omega$$

в отличие от рассмотренного случая, где

$$\frac{\partial p}{\partial n} \sim \frac{u^2}{R}$$

(ω — угловая скорость вращения поверхности).

3. Рассмотрим течение в ламинарном пограничном слое на вогнутой цилиндрической поверхности с характерным радиусом кривизны $R \sim 1$ и скоростью набегающего потока $u_\infty \sim 1$ при $Re \gg 1$. Толщина невозмущенного пограничного слоя $\delta_0 \sim Re^{-1/2}$, а величина $G \sim Re^{1/4}$. Положим $\rho = 1$ и рассмотрим уравнения движения и неразрывности. Обобщение на случай сжимаемой жидкости при $Pr \sim 1$ и $M \sim 1$ не содержит дополнительных трудностей, если отсутствуют области резкого изменения параметров потока, связанные с наличием скачков уплотнения.

Положим масштаб начального возмущения $G > \tau/\delta_0 > G^{-1}$. (Возмущение лежит выше линий 1 и 2 на фиг. 3.) Оценим масштаб времени T развития возмущения. Из (1.3) скорость $w \sim Re^{1/4}$. Время, за которое возмущение пройдет путь до линии 1 на фиг. 3, определяется величиной

$$T \sim \frac{\tau_0}{w}, \quad \frac{\tau_0}{\delta_0} \sim G \sim Re^{1/4}$$

Тогда имеем $T \sim 1$, $\tau_0 \sim Re^{-1/4}$.

Если возмущение, пройдя линию 1 на фиг. 3, начинает сглаживаться, то характерное время сглаживания T определяется из уравнения движения по оси x

$$\frac{1}{T} \sim Re^{-1} \frac{1}{\delta_0^2}$$

откуда следует $T \sim 1$. Таким образом, характерное время развития начального возмущения, лежащего в области разбега на фиг. 3, имеет величину $T \sim 1$ независимо от того, сформируется стационарное трехмерное течение или нет. Характерный масштаб течения в направлении z определяется величиной $L_z \sim \tau_0$ также независимо от начального возмущения.

Введем новые переменные

$$X=x, Y=r Re^{1/2}, Z=z Re^{1/4}, t=t \quad (3.1)$$

и будем искать решение уравнения Навье-Стокса в виде разложения по степеням Re

$$\begin{aligned} u &= U + Re^{-1/4} U_1 + Re^{-1/2} U_2 + \dots, v = Re^{-1/2} V + Re^{-3/4} V_1 + \dots \\ w &= Re^{-1/4} W + Re^{-1/2} W_1 + \dots, p = p_0 + Re^{-1/4} p_1 + Re^{-1/2} p_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

После подстановки (3.2) в уравнения Навье-Стокса для коэффициентов разложения U_1, V_1, W_1, p_1 получается линейная система уравнений,

имеющая тривиальное решение, а для U, W, V, p_0, p_2 следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= -\frac{\partial p_0}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial p_0}{\partial Z} &= 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial Y} = 0, \quad \frac{U^2}{R} = -\frac{\partial p_2}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{\partial p_2}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Во внешнем потоке возмущение давления определяется масштабами возмущения в пограничном слое δ_0, τ_0 соотношением $\Delta p \sim \delta_0 \tau_0 \sim \text{Re}^{-1/2}$. Тогда можно положить $\partial p_2 / \partial z = 0$ при $Y \rightarrow \infty$, и интегрируя выражение для $\partial p_2 / \partial Y$ получить

$$\frac{\partial p_2}{\partial Z} = -\frac{\partial}{\partial Z} \int_Y^\infty \frac{U_e^2 - U^2}{R} dY \quad (3.4)$$

При $\text{Re} \rightarrow \infty$ величина p_0 определяется внешним течением, а R , как и p_0 , зависит только от X .

Затронутый ранее в п. 1 вопрос о существовании трехмерного стационарного течения, отличного от невозмущенного, в данном случае сводится к поиску трехмерных стационарных решений уравнений (3.3) с учетом (3.4). (При $\partial / \partial Z = 0$ и $w = 0$ уравнения (3.3) переходят в уравнения двумерного пограничного слоя.)

4. С помощью полученных уравнений рассмотрим течение Тейлора, возникающее между двумя коаксиальными цилиндрами, когда внутренний цилиндр вращается. Пусть расстояние между поверхностями цилиндров $\Delta = 1$, радиус внешнего цилиндра R , линейная скорость движения поверхности внутреннего цилиндра $u_e = 1$. Координатная ось Z направлена вдоль оси цилиндров; Y отсчитывается от поверхности внешнего цилиндра по направлению к центру. Ось X направлена по дуге окружности. Заметим, что $U = Y, V = W = 0$ есть решение уравнений (3.3) (в физических переменных $\Delta \sim \text{Re}^{-1/2}$).

Будем искать стационарное, трехмерное решение уравнений (3.3) полагая, что компоненты скорости можно представить в виде

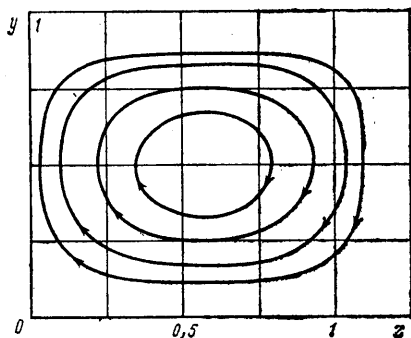
$$U = Y + U^\circ(Y, X, Z) \quad (4.1)$$

$$U^\circ \ll 1, \quad V \ll 1, \quad W \ll 1$$

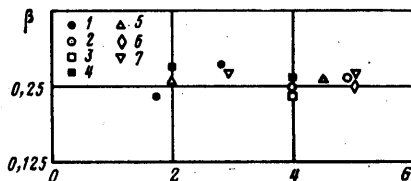
Подставляя (4.1) в (3.3) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial^2 U^\circ}{\partial Y^2}, \quad -\frac{\partial}{\partial Z} \int_Y^1 \frac{Y U^\circ}{R} dY + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \\ U^\circ = W = V &= 0 \quad (Y=0, Y=1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

После дифференцирования второго уравнения (4.2) по Z и по Y , ис-



Фиг. 4



Фиг. 5

ключая V и W , получим

$$\frac{\partial^6 U^\circ}{\partial Y^6} = \frac{Y}{R} \frac{\partial^2 U^\circ}{\partial Z^2} \quad (4.3)$$

Представив U° в виде $U^\circ = U^\circ(Y)U^\circ(Z)$, получим задачу на собственные значения для оператора

$$U^{\circ(6)} = -\frac{\lambda}{R} Y U^\circ \quad (4.4)$$

$$U''' = U'' = U = 0 \quad (Y=0, Y=1)$$

и уравнение для определения функции U°

$$U^{\circ''} = -\lambda U^\circ$$

Используя известную теорему об асимптотическом поведении собственных значений λ дифференциального оператора при $|\lambda| \rightarrow \infty$ [6], для оператора (4.4) можно получить

$$\lambda_k' = +(2\pi)^6 \left[k^6 + \frac{k^5}{2} + o(k^4) \right], \quad \lambda_k'' = +(2\pi)^6 \left[k^6 + \frac{3k^5}{2} + o(k^4) \right]$$

при $k \rightarrow \infty$, где k — натуральное число. Отсюда видно, что собственные значения λ_k' и λ_k'' положительны. Следовательно, уравнения (4.2) допускают решения, периодические по Z .

Для вычисления первых собственных значений оператора (4.4) при малых значениях k будем искать решение уравнения (4.4) в виде

$$U = \sum_i a_i Y^i \quad (i=0, 1, \dots) \quad (4.5)$$

После подстановки (4.5) в (4.4) для a_i получим

$$a_{i+7} \frac{(i+7)!}{(i+1)!} + A a_i = 0 \quad (i=0, 1, \dots), \quad A = \frac{\lambda}{R}$$

что дает рекуррентные соотношения для определения a_i ($i=7, 8, \dots$) через величины a_0, \dots, a_6 .

$$a_{7h+i} = (-1)^h A^h \prod_1^h (7k-6+i)! \left(\prod_1^h (7k+i) \right)^{-1} a_i \quad (4.6)$$

$$k=1, 2, \dots, i=0, 1, \dots, 5$$

Из (4.6) видно, что ряд (4.5), определяющий функцию U , и ряды,

определяющие шесть ее производных, сходятся при любом A в интервале $0 \leq Y \leq 1$.

Подстановка (4.5) в граничные условия (4.4) с учетом (4.6) дает соотношения для определения констант a_0, \dots, a_5

$$a_0=0, \quad a_2=0, \quad a_3=0 \quad (4.7)$$

$$a_1 T_i^1 + a_4 T_i^4 + a_5 T_i^5 = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$T_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} f_i^j(k) A^k (-1)^k \quad (j=1, 4, 5)$$

где $f_i^j(k)$ — известные функции k .

Определитель D системы уравнений (4.7) легко вычисляется, так как ряды, определяющие T_i^j , быстро сходятся. Вычисления показали, что наименьшее значение A , при котором $D=0$, равно $A_1=7000$. Следующее собственное значение соответствует $A_2=3 \cdot 10^5$.

На фиг. 4 представлены линии тока в плоскости y, z в физических переменных, отнесенных к расстоянию между цилиндрами Δ при $A=A_1$. Расчеты проведены для значений $\Delta=4$ мм, $R=25$ мм, $Re=U\Delta/\nu=94,5$, соответствующих условиям эксперимента работы [3]. В эксперименте длина волны периодической структуры вдоль оси z имеет значение $\tau=2,3\Delta$. В расчете $\tau=2,8\Delta$.

Таким образом, полученные на основании приведенного в п. 1 качественного анализа уравнения для ламинарного течения имеют периодические решения и достаточно хорошо описывают вихри Тейлора.

5. Решение уравнений (3.3) для возмущенного течения в пограничном слое на вогнутой цилиндрической поверхности, например для вихрей Гертлера, представляет большую сложность по сравнению с задачей, рассмотренной в п. 4, так как в этом случае нельзя считать $\partial/\partial X=0$. Иллюстрацией того, насколько существенна в таких течениях производная $\partial U/\partial X$, являются уравнения двумерного пограничного слоя с граничными условиями $U=V=0$ при $Y=0$; $U=1$ при $Y \rightarrow \infty$. Положив в них $\partial/\partial X=0$, приходим к единственно возможному решению $U \sim Y$, которое не удовлетворяет граничному условию $U \rightarrow 1$ при $Y \rightarrow \infty$, поэтому попытаемся сопоставить полученные выше результаты с экспериментальными данными по вихрям Гертлера, не решая уравнений (3.3).

Предположим, что существует периодическое по Z решение уравнений (3.3), удовлетворяющее граничным условиям

$$U=V=W=0, \quad Y=0$$

$$U \rightarrow 1, \quad W \rightarrow 0, \quad Y = \infty$$

и описывающее вихри Гертлера на вогнутой цилиндрической поверхности. Тогда в физических переменных для периода τ и толщины пограничного слоя δ можно записать

$$\tau = R Re^{-1/4} f_1(x)$$

$$\delta = R Re^{-1/2} f_2(x), \quad \alpha = \frac{\delta}{\tau} = Re^{-1/4} f(x)$$

Теперь, представив имеющиеся экспериментальные данные в виде

$$\alpha = Re^{\beta} f(x)$$

можно определить экспериментальное значение β . Обычно экспериментальные данные представляются в виде зависимости $\lg \alpha$ от $\lg G$. Если фиксировать условия эксперимента и проводить измерения в различных сечениях x , то эта зависимость имеет вид [7, 8]

$$\lg \alpha = c_1 \lg G(x) + c_2, \quad G(x) = \left(\frac{\delta}{R} \right)^{1/2} Re$$

Причем наклон прямой не меняется при изменении скорости набегающего потока, т. е. можно считать, что c_1 не зависит от числа Re , тогда, учитывая то, что $\delta \approx Re^{-1/2} f_2(x)$, а величина $c_2 = \gamma \lg Re$, экспериментальную зависимость можно пере-

писать в виде

$$\lg \alpha = \left(\frac{c_1}{4} + \gamma \right) \lg Re + \lg f(x)$$

Для определения величины $\beta = c_1/4 + \gamma$ нужно сравнивать два значения $\lg \alpha_1$ и $\lg \alpha_2$, полученные при одинаковом значении x и R (так как при изменении R и сохранении геометрических параметров экспериментальной модели подобие не сохраняется) и при различных значениях скорости набегающего потока u_{01}, u_{02} .

На фиг. 5 показаны значения β , посчитанные по экспериментам работ [7, 8] при различных значениях $G(x)$, R и скоростей набегающего потока u_{01}, u_{02} . Точки соответствуют следующим значениям R и $u' = u_{01}/u_{02}$:

$$\begin{aligned} 1 - R=4; \quad u'=0,23 [8]; \quad 2 - R=2, \quad u'=0,23 [8]; \\ 3 - R=2, \quad u'=0,44 [8]; \quad 4 - R=2, \quad u'=0,51 [8]; \\ 5 - R=10, \quad u'=0,69 [7]; \quad 6 - R=3, \quad u'=0,43 [7]; \\ 7 - R=3, \quad u'=0,54 [7] \end{aligned}$$

Видно, что в экспериментах значение $\beta \approx 1/4$. Таким образом, оценки для масштабов течения, на основе которых получены уравнения (3.3), подтверждаются. Заметим, что во многих работах (например, в [9]) относительно поперечного масштаба τ делается предположение $\tau \sim \delta$. Это приводит к значению $\beta = 1/2$, что не соответствует экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. Görtler H. Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an Konkaven Wänden // ZAMM. 1941. В. 21. No 4. S. 230-252.
3. Schultz-Grunow F., Hein H. Beitrag zur Couetteströmung // Z. Flugwiss, 1956. В. 4. No 1-2. S. 28-30.
4. Гуревич Ю. Г. Пограничный слой в окрестности угла между вогнутой цилиндрической поверхностью и плоскостью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С.160-165.
5. Глогов Г. Ф., Мороз Э. К. Продольные вихри в сверхзвуковых течениях с отрывными зонами // Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 4. С. 44-53.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехиздат. 1954. 352 с.
7. Tani I. Production of longitudinal vortices in the boundary layer along a concave wall // J. Geophys. Res. 1962. V. 67. No 8. 3075-3080.
8. Бобошко В. А., Шмедер Ю. А. Продольные вихри в пограничном слое вдоль вогнутой поверхности // Тр. Николаев. кораблестроит. ин-та. 1979. № 152. С. 57-64.
9. Hall P. The nonlinear development of Gortler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 243-266.

Москва

Поступила в редакцию
20.XII.1988