МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1990

УДК 532.546

КОПАЕВ А. В., РАДЫГИН В. М.

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ОКРУЖНОСТЯХ

На примере задачи для трех окружностей предложен метод решения задач сопряжения в случае n концентрических окружностей, являющийся достаточно универсальным. Этот метод применим и в случае, когда границами раздела сред являются параллельные прямые. Для нахождения комплексных потенциалов фильтрационных течений используется интегральная формула Шварца.

Впервые задача об окружности рассматривалась в [1], где была получена фильтрационная теорема об окружности. В [2–5] эта теорема обобщена на случай двух или трех окружностей. При этом использовались методы источников [2, 5], биполярных координат [4] и конформных отображений [3]. Доказательство справедливости фильтрационных теорем, полученных в указанных работах, сводилось к проверке выполнения условий на границах раздела сред. Вопрос о единственности решения оставался открытым, а для практического использования фильтрационных теорем это существенно.

1. Рассмотрим плоскопараллельную установившуюся фильтрацию жидкости в кусочно-однородной пористой среде. В каждой из областей однородности такой среды фильтрационное течение характеризуется комплексным потенциалом $f(z)$, представляющим собой аналитическую функцию. При этом особые точки фильтрационного течения определяются особыми точками аналитической функции.

Пусть область фильтрационного течения состоит из областей, разделенных двумя концентрическими окружностями с центрами в начале координат и радиусами r_1, $r_2(r_1<r_2)$.

Особые точки фильтрационного течения располагаются произвольно во внешности круга с центром в начале координат радиуса $r_0(r_0<r_1)$, исключая границы раздела областей.

Введем обозначения

$$D_j^+=\{z:|z|<r_j\},\quad D_j^-=\{z:|z|>r_j\}$$
$$S_j=\{\zeta:|\zeta|=r_j\},\quad j=0,\,1,\,2$$
$$E_j=\{z:r_{j-1}<|z|<r_j\},\quad j=1,\,2$$

Пусть $f_1(z)=u_1+iv_1$ описывает фильтрационное течение в круге D_1^+ проницаемостью k_1; $f_2(z)=u_2+iv_2$ – в кольце E_2 проницаемостью k_2; $f_3(z)=u_3+iv_3$ – в области D_2^- проницаемостью k_3.

При этом на окружностях S_1 и S_2 выполняются условия [6]

$$S_j\colon\ u_j=u_{j+1},\quad k_jv_j=k_{j+1}v_{j+1},\quad j=1,\,2 \tag{1.1}$$

Изменим проницаемость в круге D_0^+ с k_1 на k_0 и найдем комплексные потенциалы

$$W_j(z)=\varphi_j+i\psi_j,\quad j=0,\,1,\,2,\,3$$

описывающие возмущенные фильтрационные течения в областях D_0^+, E_1, E_2, D_2^-. Так как изменение проницаемости в круге D_0^+ не влияет на особые точки течения, комплексные потенциалы $W_j(z)$ можно представить в виде

$$W_0(z)=f_1(z)+g_0(z),\quad W_j(z)=f_j(z)+g_j(z),\quad j=1,\,2,\,3 \tag{1.2}$$

Здесь $g_j(z)=\xi_j+i\eta_j$, $j=0,\,1,\,2,\,3$ – функции, аналитические соответственно в областях D_0^+, E_1, E_2, D_2^-. Учитывая (1.1) и представление (1.2), условия на границах раздела указанных областей запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&S_0:\ \xi_1=\xi_0, \quad \eta_1=\frac{k_0}{k_1}\eta_0+\frac{k_0-k_1}{k_1}v_1\\
&S_j:\ \xi_{j+1}=\xi_j, \quad \eta_{j+1}=\frac{k_j}{k_{j+1}}\eta_j, \quad j=1,2
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Из определения функций $g_j(z)$, $j=1$, 2, 3 следует, что эти функции можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
g_j(z)=p_j(z)+\overline{q_{j-1}(r_{j-1}^2/z)}, \quad j=1,2\\
g_3(z)=\overline{q_2(r_2^2/z)}
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

где функции $p_j(z)=\alpha_j+i\beta_j$; $q_j(z)=\gamma_j+i\delta_j$; $j=0$, 1, 2 аналитические в круге D_j^+ и непрерывны вплоть до границы, причем $q_j(0)=0$.

Используя представления (1.4), условия (1.3) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
&S_0:\ \alpha_1(\zeta)+\gamma_0(\zeta)=\xi_0(\zeta), \quad \beta_1(\zeta)-\delta_0(\zeta)=\frac{k_0}{k_1}\eta_0(\zeta)+\frac{k_0-k_1}{k_1}v_1(\zeta)\\
&S_1:\ \alpha_2(\zeta)+\gamma_1(\zeta)=\alpha_1(\zeta)+\gamma_0\left(\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\zeta\right), \quad \beta_2(\zeta)-\delta_1(\zeta)=\frac{k_1}{k_2}\left(\beta_1(\zeta)-\delta_0\left(\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\zeta\right)\right)\\
&S_2:\ \gamma_2(\zeta)=\alpha_2(\zeta)+\gamma_1\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\zeta\right); \quad -\delta_2(\zeta)=\frac{k_2}{k_3}\left(\beta_2(\zeta)-\delta_1\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\zeta\right)\right)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Используя интегральную формулу Шварца и соотношения (1.5), получим основную систему функциональных уравнений

$$
\begin{gathered}
p_1(z)+\overline{p_1(0)}+q_0(z)=g_0(z)+\overline{g_0(0)}\\
p_1(z)-\overline{p_1(0)}-q_0(z)=\frac{k_0}{k_1}g_0(z)-\frac{k_0}{k_1}\overline{g_0(0)}+\frac{k_0-k_1}{k_1}f_1(z)-\frac{k_0-k_1}{k_1}\overline{f_1(0)}, \quad |z|<r_0\\
p_2(z)+\overline{p_2(0)}+q_1(z)=p_1(z)+\overline{p_1(0)}+q_0\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}z\right)\\
p_2(z)-\overline{p_2(0)}-q_1(z)=\frac{k_1}{k_2}\left[p_1(z)-\overline{p_1(0)}-q_0\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}z\right)\right], \quad |z|<r_1\\
q_2(z)=p_2(z)+\overline{p_2(0)}+q_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}z\right)\\
-q_2(z)=\frac{k_2}{k_3}\left[p_2(z)-\overline{p_2(0)}-q_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}z\right)\right], \quad |z|<r_2
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Исключая из системы (1.6) функции $q_0(z)$, $q_1(z)$, $q_2(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$, получим функциональное уравнение для нахождения $g_0(z)$

$$
\begin{gathered}
g_0(z)+\frac{(k_1-k_0)(k_2-k_1)}{(k_1+k_0)(k_2+k_1)}g_0\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}z\right)+\frac{(k_1-k_2)(k_2-k_3)}{(k_1+k_2)(k_2+k_3)}g_0\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}z\right)+\\
+\frac{(k_0-k_1)(k_2-k_3)}{(k_0+k_1)(k_2+k_3)}g_0\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}z\right)=\frac{k_1-k_0}{k_0+k_1}\left[f_1(z)+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}f_1\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}z\right)+\right.\\
\left.+\frac{(k_1-k_2)(k_2-k_3)}{(k_1+k_2)(k_2+k_3)}f_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}z\right)+\frac{k_2-k_3}{k_2+k_3}f_1\left(\frac{r_0^2}{r_2^2}z\right)\right]+C_1\\
C_1=\frac{4k_1k_2}{(k_0+k_1)(k_1+k_2)}\left[\frac{k_0-k_3}{k_2+k_3}g_0(0)+\frac{k_0-k_1}{k_2+k_3}f_1(0)\right]
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Разлагая левую и правую части уравнения (1.7) в ряды Тейлора и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, найдем

$$g_0(z)=g_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n a_n}{d}z^n$$

$$d_n=(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_1^{2n}r_2^{2n}+(k_1-k_0)(k_2-k_1)(k_2+k_3)r_0^{2n}r_2^{2n}+$$
$$+(k_0+k_1)(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_1^{4n}+(k_1-k_0)(k_1+k_2)(k_3-k_2)r_0^{2n}r_1^{2n}$$
$$C_n=(k_1-k_0)[(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_1^{2n}r_2^{2n}+(k_1-k_2)(k_2+k_3)r_0^{2n}r_2^{2n}+$$
$$+(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_1^{4n}+(k_1+k_2)(k_2-k_3)r_0^{2n}r_1^{2n}]$$

где a_n – коэффициенты ряда Тейлора функции $f_1(z)$.

Теперь, используя соотношения (1.6), находим функции $p_1(z)$, $p_2(z)$, $q_0(z)$, $q_1(z)$, $q_2(z)$, а используя формулы (1.4),– функции $g_1(z)$, $g_2(z)$, $g_3(z)$ и, наконец, по формулам (1.2) находим искомые комплексные потенциалы $W_0(z)$, $W_1(z)$, $W_2(z)$ и $W_3(z)$

$$W_0(z)=2k_1\sum_{n=0}^{\infty}[(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_2^{2n}+(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_1^{2n}]\frac{r_1^{2n}a_n}{d_n}z^n,\quad |z|<r_0$$

$$W_1(z)=f_1(z)+(k_0-k_1)\sum_{n=0}^{\infty}[(k_2-k_1)(k_2+k_3)r_2^{2n}+(k_1+k_2)(k_3-k_2)r_1^{2n}\frac{a_n r_0^{2n}}{d_n}z^n+$$

$$+(k_1-k_0)\sum_{n=0}^{\infty}[(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_2^{2n}+(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_1^{2n}]\frac{\bar{a}_n r_0^{2n}r_1^{2n}}{d_n z^n},\quad r_0<|z_1|<r_1$$

$$W_2(z)=f_2(z)+2k_1(k_1-k_0)(k_2-k_3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n r_0^{2n}r_1^{2n}}{d_n}z^n+ \tag{1.8}$$

$$+2k_1(k_1-k_0)(k_2+k_3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{a}_n r_0^{2n}r_1^{2n}r_2^{2n}}{d_n z^n},\quad r_1<|z|<r_2$$

$$W_3(z)=f_3(z)+4k_1k_2(k_1-k_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{a}_n r_0^{2n}r_1^{2n}r_2^{2n}}{d_n z^n},\quad |z|>r_2$$

Полагая в формулах (1.8) $k_3=k_2$, $f_3(z)=f_2(z)$, получим выражения для комплексных потенциалов, описывающих фильтрационное течение в кусочно-однородной среде, границами раздела областей однородности которой являются две концентрические окружности радиусов r_0 и r_1

$$W_0(z)=2k_1(k_1+k_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1^{2n}a_n}{d_n}z^n,\quad |z|<r_0$$

$$W_1(z)=f_1(z)+(k_1-k_0)(k_1-k_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^{2n}a_n}{d_n}z^n+ \tag{1.9}$$

$$+(k_1-k_0)(k_1+k_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^{2n}r_1^{2n}\bar{a}_n}{d_n z^n},\quad r_0<|z|<r_1$$

$$W_2(z)=f_2(z)+2k_1(k_1-k_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^{2n}r_1^{2n}\bar{a}_n}{d_n z^n},\quad |z|>r_1$$

$$d_n=(k_0+k_1)(k_1+k_2)r_1^{2n}+(k_1-k_0)(k_2-k_1)r_0^{2n}$$

Полагая в формулах (1.9) $k_2=k_1$, $f_2(z)=f_1(z)$, получим фильтрационную теорему об окружности [6].

2. Приведем примеры применения полученной теоремы об окружностях. Пусть в однородной среде проницаемостью задан поступательный фильтрационный поток, описываемый комплексным потенциалом вида $W=v_0z$.

Используя фильтрационную теорему об окружностях, построим комплексные потенциалы течения в кусочно-однородной среде с границей раздела в виде трех концентрических окружностей проницаемостью k_0 в круге $|z|<r_0$, k_1, k_2 – соответственно в кольцах $r_0<|z|<r_1$, $r_1<|z|<r_2$, k_3 – во внешности круга $|z|>r_2$. Имеем

$$W_0(z)=8k_1k_2k_3r_1^2r_2^2v_0zd^{-1}, \quad |z|<r_0$$

$$W_1(z)=4k_2k_3(k_0+k_1)r_1^2r_2^2v_0zd^{-1}+4k_2k_3(k_1-k_0)r_0^2r_1^2r_2^2\tilde{v}_0/dz, \quad r_0<|z|<r_1$$

$$W_2(z)=2k_3[(k_0+k_1)(k_1+k_2)r_1^2+(k_1-k_0)(k_2-k_1)r_0^2]r_2^2v_0zd^{-1}+$$
$$+2k_3[(k_0+k_1)(k_2-k_1)r_1^2+(k_1-k_0)(k_1+k_2)r_0^2]r_2^2v_0r_1^2/dz, \quad r_1<|z|<r_2.$$

$$W_3(z)=v_0z+[(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_3-k_2)r_1^2r_2^2+(k_0+k_1)(k_2-k_1)(k_2+k_3)r_1^4+$$
$$+(k_1-k_0)(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_0^2r_2^2+(k_1-k_0)(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_0^2r_1^2]\bar{v}_0r_2^2/dz, \quad |z|>r_2$$

$$d=(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_1^2r_2^2+(k_0+k_1)(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_1^4+$$
$$+(k_1-k_0)(k_2-k_1)(k_2+k_3)r_0^2r_2^2+(k_1-k_0)(k_1+k_2)(k_3-k_2)r_0^2r_1^2$$

Полученные комплексные потенциалы в отличие от формул в фильтрационной теореме не содержат рядов и поэтому удобны для практических расчетов.

Пусть в однородной среде проницаемостью k_3 фильтрационное течение определяется источником (стоком) интенсивности q, описываемым комплексным потенциалом вида

$$W=\frac{q}{2\pi}\ln(z-b)$$

Используя фильтрационную теорему об окружностях, построим комплексные потенциалы течения в кусочно-однородной среде, описанной в предыдущем примере, при условии, что $r_2<|b|$.

$$W_0(z)=-\frac{q}{2\pi}8k_1k_2k_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_1^{2n}r_2^{2n}}{nd_nb^n}z^n, \quad |z|<r_0$$

$$W_1(z)=-\frac{q}{2\pi}4k_2k_3(k_0+k_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_1^{2n}r_2^{2n}}{nd_nb^n}z^n-$$
$$-\frac{q}{2\pi}4k_2k_3(k_1-k_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^{2n}r_1^{2n}r_2^{2n}}{nd_n\bar{b}^nz^n}, \quad r_0<|z|<r_1$$

$$W_2(z)=-\frac{q}{2\pi}2k_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(k_0+k_1)(k_1+k_2)r_1^{2n}+(k_1-k_0)(k_2-k_1)]r_0^{2n}r_2^{2n}}{nd_nb^n}z^n-$$
$$-\frac{q}{2\pi}2k_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(k_0+k_1)(k_2-k_1)r_1^{2n}+(k_1-k_0)(k_1+k_2)r_0^{2n}]r_1^{2n}r_2^{2n}}{nd_n\bar{b}^nz^n}, \quad r_1<|z|<r_2$$

$$W_3(z)=\frac{q}{2\pi}\ln(z-b)-\frac{q}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_3-k_2)r_1^{2n}r_2^{2n}+(k_0+k_1)(k_2-k_1)(k_2+k_3)\times$$
$$\times r_1^{4n}+(k_0-k_1)(k_1-k_2)(k_3-k_2)r_0^{2n}r_2^{2n}+(k_1-k_0)(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_0^{2n}r_1^{2n}]\frac{r_2^{2n}}{nd_n\bar{b}^nz^n}, \quad |z|>r_2$$

$$d_n=(k_0+k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)r_1^{2n}r_2^{2n}+(k_0+k_1)(k_2-k_1)(k_3-k_2)r_1^{4n}+$$
$$+(k_1-k_0)(k_2-k_1)(k_2+k_3)r_0^{2n}r_2^{2n}+(k_1-k_0)(k_1+k_2)(k_3-k_2)r_0^{2n}r_1^{2n}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубева О. В.* Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 1. С. 113–116.

2. *Костицына Л. И.* К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-одно-

родной пористой среде // Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. 1966. Т. 164. Вып. 6. С. 67–82.
3. *Копаев А. В., Радыгин В. М.* О плоской фильтрации в кусочно-однородных средах с границами раздела в виде концентрических окружностей. М., 1984. 17 с.– Деп. в ВИНИТИ 27.04.1984, № 2751.
4. *Ярмицкий А. Г.* Фильтрационная теорема о двух окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 77–82.
5. *Перевощиков В. Г., Шпилевой А. Я.* К вопросу применения метода изображений для построения фильтрационных течений в неоднородных средах // Сб. науч. тр. Моск. обл. пед. ин-та. 1973. Вып. 2. С. 18–23.
6. *Радыгин В. М., Голубева О. В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк. 1983. 160 с.

Орел

Поступила в редакцию
12.IV.1988