

САВЕНКОВ И. В.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пограничный слой на вогнутой поверхности подвержен неустойчивости типа Гертлера [1] (в дополнение к неустойчивости типа Толлмина — Шлихтинга), из-за которой в течении могут появляться продольные вихри, приводящие в конечном итоге к ламинарно-турбулентному переходу. Хотя к настоящему времени имеются многочисленные расчеты характеристик вихрей Гертлера (см., например, [2, 3]), до сих пор остается открытым вопрос об их генерации внешними возмущениями (проблема восприимчивости). Между тем анализ восприимчивости существенно упрощается, если перейти к пределу числа Рейнольдса $R \rightarrow \infty$ (для случая плоской пластины см. [4]).

Данная работа посвящена анализу возбуждения неустойчивости пограничного слоя на искривленной поверхности при $R \rightarrow \infty$.

1. **Постановка задачи.** Волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое плоской пластины при больших R существуют за счет взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком в рамках трехслойной схемы [5, 6]. Сказанное относится также к вихрям Гертлера [7], если соответствующим образом [8] видоизменить эту схему.

Будем изучать распространение возмущений от бугорка на обтекаемой поверхности, причем в соответствии с [8] его продольный размер выберем $O(L^*R^{-3/4})$, боковой — $O(L^*R^{-3/2})$ и поперечный — $O(L^*R^{-1/2})$ (L^* — расстояние от передней кромки пластины до неровности; $R = U_\infty^* L^* / \nu_\infty^*$ — число Рейнольдса, где U_∞^* — скорость на внешней границе пограничного слоя перед неровностью, ν_∞^* — коэффициент кинематической вязкости). Кроме того, будем считать, что бугорок выдвигается за некоторое время $O(R^{-1/2} L^* / U_\infty^*)$ в первоначально невозмущенный пограничный слой. Такой подход позволит изучить нестационарные процессы в пограничном слое на искривленной поверхности и, главное, ответить на вопрос о предельном состоянии решения при больших временах. Так, в [9] было показано, что в следе за волновым пакетом, вызванным начальным импульсом при запуске осциллятора, генерируется волна Толлмина — Шлихтинга.

Для описания течения, вызванного бугорком, будем иметь систему уравнений в вязком пристеночном слое (все величины безразмерны) [8, 10]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$p = \text{sign}(\kappa_0) A$$

$$u \rightarrow y, w \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad u \rightarrow y \rightarrow A(t, x, z), w \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

Здесь использовалась ортогональная система координат, ось x которой направлена вниз по потоку вдоль обтекаемой поверхности (при отсутствии бугорка), ось y — по нормали к ней, а z — в боковом направлении; u , v и w — проекции вектора скорости на указанные оси, p — самоиндуцированное давление; κ_0 — кривизна поверхности ($\kappa_0 > 0$ для вогнутой). Функция A имеет смысл мгновенного смещения линий тока в основной толще пограничного слоя.

Граничные условия на твердой поверхности имеют вид

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad y = hF(t, x, z) \quad (1.3)$$

где функция F описывает бугорок ($F \equiv 0$ при $t < 0$ и $F \rightarrow F_0(x, z)$ при $t \rightarrow \infty$).

2. Линеаризация задачи (1.1) — (1.3). Построение решения. Проблема восприимчивости обычно формулируется как линейная, поскольку ламинарно-турбулентный переход вызывается, как правило, первоначально малыми возмущениями. Поэтому будем изучать линейную стадию усиления возмущений от бугорка малой высоты, для чего в записи $(u-y, v, w, p, A) = h(u', v', w', p', A')$ перейдем к пределу $h \rightarrow 0$. Требуя затухания возмущенных величин при $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ ($t = \text{const}$), получившуюся линейную задачу будем решать с использованием преобразования Лапласа по времени t и Фурье по переменным x и z . Тогда для функций-образов, введенных по образцу

$$A^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dz e^{-i(hx+mz)} \int_0^{\infty} A'(t, x, z) e^{-\omega t} dt$$

будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной y , решение которой следует изложенной в [10] схеме. Окончательно имеем

$$A^*(\omega, k, m) = - \frac{F^*(\omega, k, m) \Phi(\Omega)}{\Phi(\Omega) - Q(k, m)} \quad (2.1)$$

$$\Phi = \frac{d \text{Ai}(\Omega)}{d\zeta} \left[\int_{\Omega}^{\infty} \text{Ai}(\zeta) d\zeta \right]^{-1}, \quad \Omega = \omega (ik)^{-2/3}$$

$$Q = \text{sign}(\kappa_0) (ik)^{1/3} m^2 / k^2$$

Нули знаменателя в (2.1) — это дисперсионное соотношение

$$\Phi(\Omega) = Q(k, m), \quad \Omega = \omega (ik)^{-2/3} \quad (2.2)$$

связывающее параметры ω , k и m собственных колебаний пограничного слоя на искривленной поверхности.

Нетрудно убедиться, что в случае выпуклой поверхности ($\kappa_0 < 0$) все корни уравнения (2.2) устойчивы ($\text{Re } \omega_n < 0$, $n=1, 2, 3, \dots$). Неустойчивая мода ($\text{с } \text{Re } \omega_1 > 0$) появляется только в пограничном слое на вогнутой поверхности, поэтому в дальнейшем будем интересоваться только этим случаем.

В указанном случае дисперсионное соотношение можно свести к хорошо изученному типу для пограничного слоя на плоской пластине (см., например, [4, 9]), если переписать его в виде

$$\Phi(\Omega) = (ik')^{1/3} |k'|, \quad k' = \text{sign } k |m|^{2/3} |k|^{-2/3} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет счетный набор корней $\omega_n' = (ik')^{2/3} \Omega_n'(k')$, неустойчив из них только первый. Имеем

$$\omega_n(k, m) = (ik)^{2/3} \Omega_n'(k') = (k/k')^{2/3} \omega_n'(k') \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что если k и m устремить к бесконечности, оставляя при этом $k' = \text{const}$ ($\text{и } \text{Re } \omega_1(k') > 0$), то $\text{Re } \omega_1 \sim k^{2/3}$ неограниченно возрастает. Это, безусловно, является дефектом асимптотической теории, развитой в предположении $k, m = O(1)$. Выход из положения здесь заключается в искусственном подавлении коротковолновых возмущений путем выбора функции F с достаточно быстро затухающим образом F^* при $k^2 + m^2 \rightarrow \infty$.

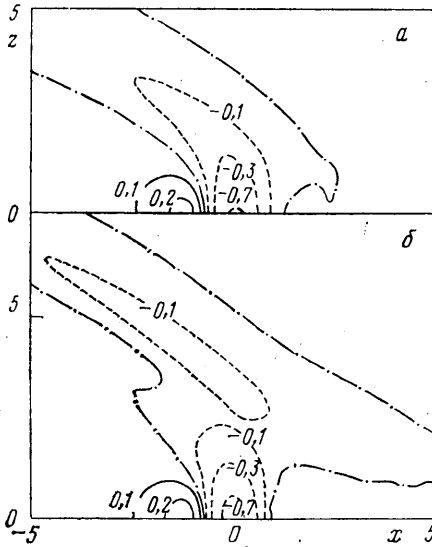
Вычисление оригинала A' начнем с обратного преобразования Лапласа, применив к нему теорему Коши о вычетах. Имеем

$$A' = - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (J_0 + J) e^{i(hx+mz)} dm dk \quad (2.5)$$

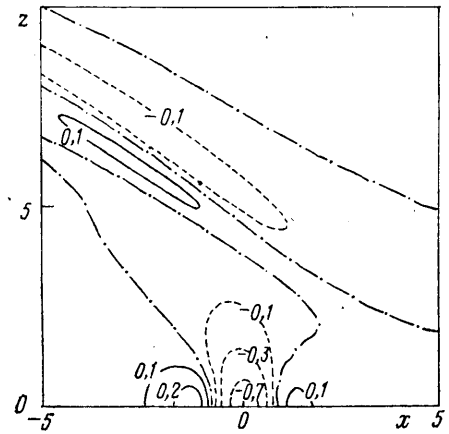
$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^{2/3} F^*(\omega_n, k, m) \Phi(\Omega_n)}{d\Phi[\Omega_n]/d\Omega} \exp[\omega_n(k, m)t]$$

Здесь ряд J сходится в силу оценки $|\Omega_n'| \sim n^{2/3}$, $n \rightarrow \infty$ [9]; J_0 — вклад от особенностей функции F^* . Эта функция обязательно имеет особенность при $\omega = 0$ (поскольку $F \rightarrow F_0 \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$), вклад от которой дает стационарное решение, найденное в [10].

3. Результаты расчетов. Формулой (2.5) можно пользоваться для проведения численных расчетов на ЭВМ, поскольку в ряде J оказалось достаточным брать только первые 10 членов [4]. Оказалось удобным перейти от m к новой переменной ih



Фиг. 1



Фиг. 2

тегрирования $l = m|k|^{-5/6}$, причем сначала удобно вычислять интеграл по l . Используя свойства симметрии, интегрирование в (2.5) можно вести только по положительным k и l . Вычисления производились с шагами $\Delta l = 0,05$ и $\Delta k = 0,1$, соответственно до $l_{\max} = 7$ и $k_{\max} = 6$. Выбор l_{\max} и k_{\max} в основном определяется скоростью затухания F^* при $k^2 + m^2 \rightarrow \infty$. В расчетах было положено

$$F = (1 - e^{-t})F_0, \quad F_0 = \exp[-2(x^2 + z^2)].$$

На фиг. 1, а, б и 2 даны картины изолиний функции A' (нормированной на $A_0' = \text{const}$) соответственно на моменты $t=1, 2$ и 3 (штриховой нанесены уровни с $A' < 0$, сплошной — с $A' > 0$, штрихпунктир соответствует $A' = 0$). Отделяющийся от источника волновой пакет (область $z > 2,5$ на фиг. 1, б и 2) имеет свои характерные особенности, отличающие его от пакета в пограничном слое на плоской пластине [4]. Возмущенная область сильно вытянута приблизительно под углом 45° , так что фронты возмущений практически плоские; волновой пакет распространяется в боковом направлении (по обе стороны от источника с учетом симметрии рисунка), так что в область вниз по потоку ($x > 0$) практически ничего не идет. Имеется достаточно сильное проникновение нестационарных возмущений в область вверх по потоку, хотя их амплитуда остается на 10%-ном уровне от максимальной. Возмущения рано или поздно затухают в любой фиксированной точке пространства (конвективная неустойчивость): так, представленное на фиг. 1, б решение в окрестности источника уже практически не меняется с дальнейшим увеличением t (ср. с фиг. 2). Полученные результаты качественно соответствуют результатам асимптотического анализа [11]. Кроме того, из численного решения следует довольно неожиданный вывод о том, что в рамках принятой модели генерация вихрей Гертлера не происходит.

Автор благодарит О. С. Рыжова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Görtler H. Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten and konkaven Wänden // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Klasse, neue Folge. Fachgruppe 1. 1940. В. 2. № 1. С. 1–26.
2. Флориан Дж. М., Сарик В. С. Устойчивость течения в пограничном слое с вихрями Гертлера // Ракетная техника и космонавтика. 1982. Т. 20. № 4. С. 18–29.
3. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
4. Рыжов О. С., Савенков И. В. Асимптотический подход в теории гидродинамической устойчивости // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 4. С. 61–86.
5. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
6. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
7. Тимошин С. Н. Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гертлера // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 32–41.

8. Рожко С. Б., Рубан А. И. Продольно-поперечное взаимодействие в трехмерном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 42–50.
9. Геренгьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264–272.
10. Рожко С. Б., Рубан А. И., Тимошин С. Н. Взаимодействие пространственного пограничного слоя с вытянутым препятствием // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 39–48.
11. Рубан А. И. Распространение волновых пакетов в пограничном слое на искривленной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1988