

УДК 532.51.013.4:536.25

© 1990 г.

ГИЛЕВ А. Ю., НЕПОМНЯЩИЙ А. А., СИМАНОВСКИЙ И. Б.

**ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ
С ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА**

Возникновение термогравитационной конвекции в системе двух бесконечных горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей при подогреве снизу изучалось в [1-3]. Было установлено, что потеря устойчивости равновесия может быть обусловлена как монотонными, так и колебательными возмущениями.

В настоящей работе изучается возбуждение конвекции при наличии двух источников температурной неоднородности: различия температур твердых границ и тепловыделения или теплопоглощения на поверхности раздела. Природа поверхностного источника тепла может быть связана с гетерогенной химической реакцией, испарением жидкости, поглощением излучения [4, 5] и т. д.

Показано, что даже для тех систем, для которых в отсутствие поверхностного тепловыделения неустойчивость имеет монотонный характер, возможно появление колебательной неустойчивости, которая при определенных условиях может оказаться наиболее опасной.

1. Рассматривается система двух вязких несмешивающихся жидкостей, заполняющих пространство между твердыми горизонтальными пластинами $y=a_1$ и $y=-a_2$ (ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально). Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, температуропроводности и объемного расширения равны соответственно $\eta_m, \nu_m, \kappa_m, \chi_m, \beta_m$ ($m=1$ для верхней жидкости, $m=2$ для нижней). Температура пластин поддерживается постоянной и различной; подогрев осуществляется снизу, разность температур равна θ . Кроме того, существует дополнительный источник подогрева, обусловленный тепловыделением на границе раздела, которая предполагается плоской

$$y=0: \quad -\kappa_1 \frac{dT_1}{dy} + \kappa_2 \frac{dT_2}{dy} = q$$

где q — мощность теплового источника (стока) тепла.

Введем обозначения: $\eta = \eta_1/\eta_2, \nu = \nu_1/\nu_2, \kappa = \kappa_1/\kappa_2, \chi = \chi_1/\chi_2, \beta = \beta_1/\beta_2, a = a_2/a_1$. В качестве единиц длины, времени, функции тока и температуры выберем соответственно $a_1, a_1^2/\nu_1, \nu_1$ и θ . Безразмерные градиенты температуры в равновесии равны

$$A_1 = -\frac{1+Q\kappa a}{1+\kappa a}, \quad A_2 = -\frac{\kappa(1-Q)}{1+\kappa a}; \quad Q = \frac{qa_1}{\theta\kappa_1}$$

Случай $Q > 0$ отвечает тепловыделению, а $Q < 0$ — теплопоглощению на границе раздела.

Для нормальных возмущений функции тока ψ_m и температуры T_m ($m=1, 2$) с волновым числом k и комплексным декрементом $\lambda + i\omega$ линеаризованные уравнения конвекции имеют вид

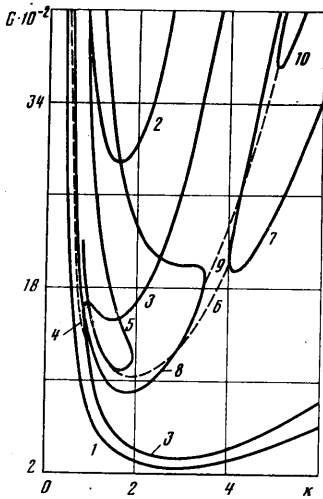
$$(\lambda + i\omega)D\psi_m = -d_m D^2\psi_m + ikGb_m T_m, \quad -(\lambda + i\omega)T_m - ik\psi_m A_m = \frac{c_m}{P} DT_m \tag{1.1}$$

$$D \frac{d^2}{dy^2} - k^2, \quad d_1 = b_1 = c_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{\nu}, \quad b_2 = \frac{1}{\beta}, \quad c_2 = \frac{1}{\chi}$$

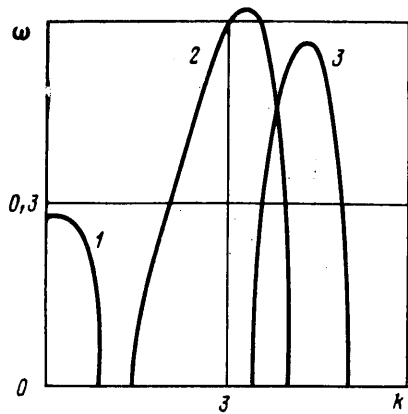
$$P = \frac{\nu_1}{\kappa_1}, \quad G = \frac{g\beta_1\theta a_1^3}{\nu_1^2}$$

Здесь P и G — числа Прандтля и Грасгофа. Условия на твердых границах и границе раздела

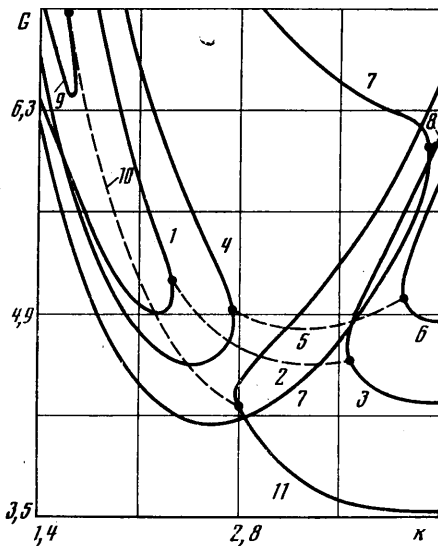
$$\begin{aligned} y=1: \psi_1 = \psi_1' = T_1 = 0, \quad y=-a: \psi_2 = \psi_2' = T_2 = 0 \\ y=0: \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_1' = \psi_2', \quad T_1 = T_2, \quad \kappa T_1' = T_2', \quad \eta \psi_1'' = \psi_2'' \end{aligned} \tag{1.2}$$



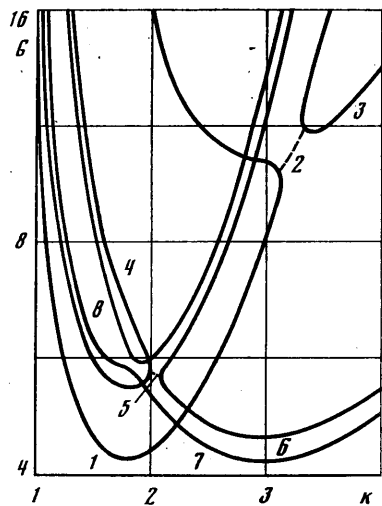
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Равенство $\lambda=0$ определяет бесконечную совокупность нейтральных кривых $G=G(k, Q)$, соответствующих различным модам возмущений. Нормальные возмущения, отвечающие данной монотонной нейтральной кривой, во многих случаях локализованы преимущественно в одной из жидкостей [2]. В местах замыкания монотонных нейтральных кривых, соответствующих возмущениям в разных жидкостях, может возникать колебательная неустойчивость.

Тепловыделение на границе по-разному действует на возбуждение конвекции в верхнем и нижнем слое. С ростом Q ($Q>0$) градиент температуры в верхней жидкости растет, а в нижней — убывает, меняя знак при $Q>1$. Вследствие этого нейтральные кривые, соответствующие развитию возмущений в верхней (нижней) жидкости смещаются в область меньших (больших) значений числа Грасгофа. При $Q<0$ смещение нейтральных кривых, происходящее с ростом $|Q|$, имеет противоположный характер. В результате может происходить пересечение монотонных нейтральных кривых, приводящее к появлению колебательной неустойчивости.

Краявая задача (1.1)–(1.2) решалась численно методом Рунге–Кутты. При фиксированных значениях параметров k, G, ω строилась система линейно независимых решений задачи, удовлетворяющих граничным условиям на твердых границах $y=1, y=-a$. На каждом шаге интегрирования производилась оценка погрешности; если она превышала 10^{-5} , то расчет повторялся с уменьшенным шагом. Для выполнения граничных условий при $y=0$ необходимо обращение в нуль некоторого определителя δ . В случае монотонной неустойчивости поиск значения G , при кото-

ром $\delta=0$, осуществлялся методом касательных; для колебательной неустойчивости значения G , ω , обеспечивающие обращение в нуль вещественной и мнимой части δ , определялись методом Гаусса.

Опишем результаты расчетов для системы вода – силиконовое масло № 200 ($P=6,28$; $\eta=0,915$; $\nu=1,116$; $\kappa=0,169$; $\chi=0,472$; $\beta=7,16$; $a=1,6$). Монотонные нейтральные кривые будем изображать сплошными линиями, а колебательные – штриховыми линиями. На фиг. 1 изображены две наиболее низко лежащие нейтральные кривые при $Q=0$, которые соответствуют монотонному возбуждению конвекции в верхней (кривая 1) и нижней (кривая 2) жидкостях. В соответствии с изложенными выше соображениями с ростом Q нейтральная кривая 1 опускается, а кривая 2 – поднимается. Напротив, при $Q<0$ с ростом $|Q|$ нейтральные кривые движутся навстречу друг другу. Увеличение параметра $|Q|$ приводит к замыканию монотонных нейтральных кривых и появлению в длинноволновой области участка колебательной неустойчивости (см. линии 3, 4 для $Q=-0,8$). При некотором значении $|Q|$ в длинноволновой области возникает монотонная нейтральная кривая. В определенной области изменения $|Q|$ минимальное значение числа Грагсгофа достигается на колебательной нейтральной кривой, связывающей длинноволновый и коротковолновый фрагменты монотонных нейтральных кривых (линии 5–7, $Q=-3$). В дальнейшем наиболее опасными вновь становятся монотонные возмущения, теперь, однако, локализованные в нижней жидкости (см. линии 8–10, $Q=-3,2$).

На фиг. 2 показаны типичные зависимости частоты нейтральных колебаний от волнового числа (линии 1–3, $Q=-0,8$; -3 ; $-3,2$). В точках окончания колебательных нейтральных кривых на монотонных кривых частота колебаний обращается в нуль.

Рассмотрим теперь систему трансформаторное масло – муравьиная кислота ($P=306$; $\eta=11,1$; $\nu=15,4$; $\kappa=0,41$; $\chi=0,714$; $\beta=0,672$), для которой в отсутствие источников или стоков тепла на границе существует участок колебательной нейтральной кривой, соединяющий длинноволновый и коротковолновый фрагменты монотонной нейтральной кривой. Заметим, что возмущения во второй жидкости отвечает верхняя ветвь длинноволнового фрагмента и нижняя ветвь коротковолнового фрагмента. Опишем сначала случай $a=0,667$, для которого при $Q=0$ неустойчивость связана с коротковолновыми монотонными возмущениями во втором слое (см. фиг. 3, линии 1–3). С ростом Q (при $Q>0$) фрагменты нейтральной кривой, отвечающие возмущениям в первой (второй) жидкости, опускаются (поднимаются). В результате наиболее опасной становится длинноволновая мода неустойчивости по отношению к возмущениям в первом слое (линии 4–6; $Q=0,1$). Ни при каких значениях Q колебательная неустойчивость не является наиболее опасной. При дальнейшем увеличении Q колебательная нейтральная кривая вытесняется в коротковолновую область (линии 7, 8; $Q=0,35$). При $Q<0$ с увеличением $|Q|$ порог коротковолновой монотонной неустойчивости понижается, а длинноволновой – растет; интервал существования колебательной неустойчивости смещается в сторону меньших значений волнового числа (линии 9–11, $Q=-0,2$).

Пусть теперь $a=0,54$. При $Q=0$ наиболее опасными являются длинноволновые монотонные возмущения, локализованные преимущественно в верхней жидкости (фиг. 4, линии 1–3). Очевидно, что при $Q>0$ этот тип возмущений остается наиболее опасным. При $Q<0$ с ростом $|Q|$ фрагменты монотонных нейтральных кривых, отвечающих возмущениям в верхней жидкости, смещаются в сторону больших G , а фрагменты, соответствующие возмущениям в нижней жидкости, – в сторону меньших G . Это приводит к изменению картины нейтральных кривых, показанному на фиг. 4 (линии 4–6, $Q=-1$). Заметим, что с ростом $|Q|$ область существования колебательной неустойчивости сужается. При некотором $|Q|$ происходит перезамыкание нейтральных кривых, приводящее к их расщеплению на два несвязанных между собой монотонных фрагмента и исчезновению колебаний (линии 7, 8, $Q=-1,2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 302–305.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Першина Е. А. О возникновении конвекции в некоторых двухслойных системах // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1983. С. 3–24.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости равновесия двухслойной системы с теплоизолированными границами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 22–28.
4. Алексеев В. Б., Александров А. А. Модель двумерной конвекции в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 8. С. 837–850.
5. Ингель Л. Х., Стогова И. В. О возмущениях, вызываемых термическими неоднородностями на границе раздела двух устойчиво стратифицированных сред // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23. № 10. С. 1111–1112.

Пермь

Поступила в редакцию
18.IV.1988