МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1990

УДК 533.95
© 1990 г.

РЫЛОВ Ю. А.

УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ФАЗ В БЕЗМАССОВОМ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОМ ГАЗЕ

Рассматривается установившееся движение безмассового электронно-позитронного газа в самосогласованном электромагнитном поле. В таком газе образуются две фазы для каждого из компонентов: динамическая фаза, где частицы движутся со скоростью света, и статическая фаза, где частицы движутся со скоростью, меньшей скорости света. Статическая фаза может существовать только внутри области захвата, где выполнены условия $(\mathbf{E}, \mathbf{H})=0$ и $\mathbf{E}^2<\mathbf{H}^2$. Изучены сильные и слабые разрывы электромагнитного поля на границе области захвата (на границе двух фаз).

1. Постановка задачи. Рассматриваемая модель бесстолкновительного безмассового электронно-позитронного газа используется при описании магнитосферы пульсара [1], для которой характерны: сильное электромагнитное поле ($H\simeq 10^{12}$ Гс), разреженность газа и ультрарелятивистский характер движения заряженных частиц. В этих условиях можно пренебречь энергией покоя mc^2 частиц по сравнению с кинетической энергией. Существенную роль играет радиационное торможение, которое приводит к подавлению ларморовского вращения. В результате возникает модель, где безмассовые электроны и позитроны движутся вдоль гладких (не винтовых) линий.

Движение такой двухкомпонентной среды описывается уравнениями

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\qquad \nabla\mathbf{E}=4\pi\rho$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\qquad \nabla\mathbf{H}=0$$
$$\frac{\partial\rho_+}{\partial t}+\nabla\mathbf{j}_+=0,\qquad \frac{\partial\rho_-}{\partial t}+\nabla\mathbf{j}_-=0 \tag{1.1}$$
$$\mathbf{j}=\mathbf{j}_++\mathbf{j}_-,\qquad \rho=\rho_++\rho_-$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля, ρ_+, $\mathbf{j}_+$, ρ_-, $\mathbf{j}_-$ — плотность заряда и тока соответственно для положительно (позитронов) и отрицательно (электронов) заряженных компонентов, c — скорость света. В тех областях, где выполнены условия $(\mathbf{E},\mathbf{H})\neq 0$ или $\mathbf{E}^2\geqslant\mathbf{H}^2$, связь $\mathbf{j}_+$, $\mathbf{j}_-$ с $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ задается уравнениями

$$\mathbf{j}_+=\rho_+\mathbf{v}_1,\qquad \mathbf{j}_-=\rho_-\mathbf{v}_{-1} \tag{1.2}$$
$$\mathbf{v}_s=\mathbf{v}_d+s\mathbf{v}_l,\qquad s=+1,\,-1$$
$$\mathbf{v}_d=c\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{\sigma_1},\qquad \mathbf{v}_l=c\frac{\lambda\mathbf{E}+s_1\nu\mathbf{H}}{\sigma},\qquad s_1=\operatorname{sgn}(\mathbf{E},\mathbf{H}) \tag{1.3}$$
$$\lambda=\sqrt{{}^1/_2(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2+\mu)},\qquad \nu=\sqrt{{}^1/_2(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2+\mu)},$$
$$\mu=\sqrt{(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)^2+4(\mathbf{E},\mathbf{H})^2},\qquad \sigma_1={}^1/_2(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2+\mu)$$

Детальный вывод (1.3) можно найти в [11]. Здесь ограничимся кратким пояснением.

Перейдем к системе координат K', в которой электрическое поле $\mathbf{E}'$ параллельно магнитному $\mathbf{H}'$. В системе координат K' безмассовая частица с зарядом e мгновенно ускоряется до скорости света (при $\mathbf{E}'\neq0$) и двигается со скоростью $\mathbf{v}_s'=sc\mathbf{E}'/E'$, $s=sgn(e)$. Электрон и позитрон будут иметь скорости, различающиеся знаком. При возвращении в лабораторную систему координат $\mathbf{v}_s'$ преобразуется в выражение (1.3).

Уравнения (1.1)—(1.3) можно толковать как описывающие бесстолкновительное движение электронно-позитронного газа в сильном электромагнитном поле, когда энергия покоя частиц mc^2 много меньше характерной энергии $e\Phi$, приобретаемой частицами в результате ускорения в электромагнитном поле ($\varepsilon=mc^2/e\Phi\ll1$). В этом случае можно положить $m=0$ и считать частицы безмассовыми [1]. Уравнения (1.1)—(1.3) описывают движение электронно-позитронного газа в безмассовом приближении, т. е. в нулевом приближении по ε. Если $(\mathbf{E},\mathbf{H})\neq0$, то такие частицы мгновенно ускоряются до скорости света, причем электроны движутся со скоростью $\mathbf{v}_{-1}$ ($v_{-1}^2=c^2$), а позитроны — со скоростью $\mathbf{v}_1$ ($v_1^2=c^2$). Скорости $\mathbf{v}_s$ ($s=\pm1$) определяются только электромагнитным полем посредством (1.3). Это легко показать на примере, когда продольное электрическое поле $\mathbf{E}_l=\mathbf{H}(\mathbf{E},\mathbf{H})/H^2$ много меньше магнитного. В этом случае из (1.3) следует

$$\mathbf{v}_d=c\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{H^2}+O(E_l^2),\qquad \mathbf{v}_l=cs_1\frac{\sqrt{H^2-E^2}}{H^2}\mathbf{H}+O(E_l)$$

т. е. $\mathbf{v}_d$ описывает дрейфовое движение в скрещенном электрическом и магнитном поле и не зависит от знака заряда, а $\mathbf{v}_l$ — продольное движение вдоль магнитного поля, причем скорость $\mathbf{v}_l$, возникающая в результате ускорения под действием $\mathbf{E}_l$, направлена вдоль $\mathbf{H}$, а величина ее определяется условием $\mathbf{v}_s^2=\mathbf{v}_d^2+\mathbf{v}_l^2=c^2$.

При установившемся движении импульс частиц газа определяется из уравнений импульса

$$\frac{d\mathbf{p}_s}{dt}\equiv\frac{\partial\mathbf{p}_s}{\partial t}+(\mathbf{v}_s,\nabla)\mathbf{p}_s=se\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}_s}{c}\times\mathbf{H}\right)-\dot{\mathbf{p}}_r,\qquad s=\pm1 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{p}_s=mc\gamma_s\mathbf{v}_s,\qquad \gamma_s=\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}_s^2/c^2}} \tag{1.5}$$

где член $\dot{\mathbf{p}}_r$ описывает радиационное торможение частицы.

Для безмассовых частиц $m=0$ и лоренц-фактор $\gamma=\infty$, поэтому величина p_s импульса $\mathbf{p}_s$ не влияет на скорость $\mathbf{v}_s$ и ток $\mathbf{j}$. Это означает, что уравнения (1.4) можно не рассматривать при определении движения среды. Импульс $\mathbf{p}_s$ может быть определен после того, как будет рассчитано движение среды.

Компонент, движущийся с ненулевым импульсом $\mathbf{p}_s$ ($\gamma=\infty$, $\mathbf{v}_s^2=c^2$), будем называть динамической фазой. Наряду с динамической фазой может существовать статическая фаза, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}_{sp}$, меньшей скорости света, и обладающая нулевым импульсом $\mathbf{p}_{sp}=0$. Статическая фаза может существовать, только если $(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$ и $E^2<H^2$ в некоторой области V_* пространства, т. е. если отсутствует продольное электрическое поле $\mathbf{E}_l$, ускоряющее частицы и превращающее статическую фазу в динамическую.

Условие $(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$ есть условие типа равенства и выполнение его внутри некоторой области V_* возможно, вообще говоря, лишь в особых случаях. В рассматриваемой модели условие $(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$ и $E^2<H^2$ или эквивалентное ему в силу соотношения (1.3) условие $\lambda=0$ являются правилом, а не исключением.

Представим себе, что условие $\lambda=0$ выполнено на двумерной поверхности Г, тогда в силу (1.3) поле одного из векторов $\mathbf{v}_l$ или $-\mathbf{v}_l$ будет направлено в сторону Г по обе стороны от Г. Это приводит к накоплению одного из компонентов в окрестности Г. Пусть, например, это будут электроны. Захваченные электроны заполняют некоторую область. Они движутся со скоростью $\mathbf{v}_{sp}=\mathbf{v}_d+\alpha\mathbf{v}_l$ $(\alpha^2\leqslant1)$ и образуют статическую фазу. Они располагаются так, что сила Лоренца, действующая на них, обращается в нуль. Это приводит к выполнению условия $\lambda=0$ во всей области захвата V_*, т. е. области, заполненной статической фазой.

С формальной точки зрения выражения $\overset{i}{u}_{(1)}=\{1,\mathbf{v}_1\}$, $\overset{i}{u}_{(-1)}=\{1,\mathbf{v}_{-1}\}$ являются собственными векторами тензора электромагнитного поля

$$F^{j}_{\cdot k}=\begin{Vmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ -cE_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -cE_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -cE_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

с собственными значениями $\lambda_{(1)}=-\lambda$, $\lambda_{(-1)}=\lambda$. Легко проверить, что сила Лоренца

$$\rho_s\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{j}_s\times\mathbf{H}=0,\qquad s=+\text{ или }s=- \tag{1.7}$$

действующая на компонент s и обращающаяся в нуль, может быть записана в виде

$$F^{i\cdot}_{\cdot k}j^k_{(s)}=0,\qquad i=0,1,2,3$$
$$j^k_{(s)}=\{\rho_s,\mathbf{j}_s\},\qquad s=\pm \tag{1.8}$$

Соотношения (1.8) означают, что $j^k_{(s)}$ является вещественным собственным вектором матрицы (1.6) с нулевым собственным значением. Поскольку других вещественных собственных векторов, кроме $\overset{i}{u}_{(1)}$ и $\overset{i}{u}_{(-1)}$, у матрицы (1.6) нет, то из (1.7) следует выполнение условия $\lambda=0$.

Таким образом, в области захвата V_* токи $\mathbf{j}_+$ и $\mathbf{j}_-$ представляют собой линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_{-1}$. Вместо (1.2) в области захвата получаем

$$\mathbf{j}_+=\rho_+(\alpha_1\mathbf{v}_1+(1-\alpha_1)\mathbf{v}_{-1}),\ 0\leqslant\alpha_1\leqslant1$$
$$\mathbf{j}_-=\rho_-(\alpha_{-1}\mathbf{v}_{-1}+(1-\alpha_{-1})\mathbf{v}_1),\ 0\leqslant\alpha_{-1}\leqslant1 \tag{1.9}$$

Величины α_1, α_{-1} описывают присутствие статической фазы наряду с динамической. Они определяются из уравнений (1.7), которые в силу (1.9) эквивалентны уравнению $\lambda=0$, налагающему ограничения на электромагнитное поле.

Граница Г области захвата есть граница между двумя разными фазами, поэтому на ней возможны разрывы электромагнитного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и 4-тока $\{\rho,\mathbf{j}\}$.

Соотношения (1.2), (1.4) верны только для установившегося движения среды. Под термином «установившееся движение» понимается, что инвариант $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ не меняет знака вдоль мировой линии любой частицы. Он может обращаться в нуль, но знак менять не может. Это соответствует тому, что все области, которые могли захватить статическую фазу, уже захватили ее. В результате всякая частица либо ускоряется, либо движется по инерции, но не замедляется. При этих условиях можно считать переменную $s_1=\mathrm{sgn}(\mathbf{E},\mathbf{H})$ постоянной вдоль мировой линии частицы, приписав ей нужное значение внутри области захвата, где $(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$ и s_1 не определено.

Настоящая работа посвящается изучению разрывов на границе области захвата для установившегося движения. Изучение области захвата и условий на ее границе важно по следующей причине. Внутри проточной области захвата, т. е. такой области, где динамическая фаза движется сквозь статическую, функция распределения по скоростям является двугорбой. Это приводит к развитию двухпучковой неустойчивости, колебаниям плотности заряда и генерации радиоизлучения за счет энергии динамической фазы. Применительно к магнитосфере пульсара это означает, что проточные области захвата являются источниками радиоизлучения, поэтому с астрофизической точки зрения очень интересно их изучение и классификация возможных типов границ области захвата.

2. Условия на слабом и сильном разрыве. Пусть V_* — область захвата в обычном пространстве, Г — ее двумерная граница, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Г ($\mathbf{n}^2=1$). Будем считать, что Г движется со скоростью, меньшей скорости света, и всегда можно выбрать такую инерциальную систему координат K_0, где данный участок Г покоится в данный момент времени. В дальнейшем все соотношения будут записываться только в системе координат K_0. Характер разрыва на границе Г существенно зависит от соотношения между нормальными компонентами v_{dn}, v_{ln} скоростей $\mathbf{v}_d$ и $\mathbf{v}_l$

$$v_{dn}\equiv(\mathbf{n},\ \mathbf{v}_d),\quad v_{ln}=(\mathbf{n},\ \mathbf{v}_l) \tag{2.1}$$

на границе Г. Внутри V_* и на Г $\mathbf{E}_l=0$, поэтому $\mathbf{v}_d$ и $\mathbf{v}_l$ задаются вблизи Г соотношениями (1.3) с $\lambda=0$.

Существуют три возможности на Г

$$\text{I. } v_{dn}^2=v_{ln}^2,\quad \text{II. } v_{dn}^2<v_{ln}^2,\quad \text{III. } v_{dn}^2>v_{ln}^2$$

В случае II доминирует продольная составляющая $\mathbf{v}_l$ скорости, знак которой различен у разных компонентов. В этом случае существует преобразование Лоренца со скоростью вдоль Г, которое обращает v_{dn} в нуль (система координат K_0''). В случае III доминирует дрейфовая составляющая $\mathbf{v}_d$ скорости, знак которой одинаков у обоих компонентов. В этом случае существует преобразование Лоренца со скоростью вдоль Г, которое обращает в нуль v_{ln} (система координат K_0''').

Из интегральных уравнений, соответствующих уравнениям (1.1), вытекают соотношения на Г

$$[\mathbf{E}]=4\pi\sigma\mathbf{n},\qquad [\mathbf{H}]=-\frac{4\pi}{c}n\times\mathbf{j}_{\text{sur}},\qquad \mathbf{j}_{\text{sur}}=\mathbf{q}_++\mathbf{q}_- \tag{2.2}$$

$$(\mathbf{n},\ \mathbf{q}_+)|_\Gamma=0,\ (\mathbf{n},\ \mathbf{q}_-)|_\Gamma=0,\ [\mathbf{E}]\equiv\mathbf{E}|_{\Gamma_2}-\mathbf{E}|_{\Gamma_1} \tag{2.3}$$

где квадратные скобки означают скачок на поверхности Г, а Γ_2 и Γ_1 — соответственно внешняя и внутренняя стороны Г. Величины σ, $\mathbf{j}_{\text{sur}}$ означают соответственно поверхностную плотность заряда и поверхностный ток на Г, $\mathbf{q}_+$ и $\mathbf{q}_-$ — составляющие поверхностного тока, соответствующие позитронам и электронам. Величины $\mathbf{j}_{\text{sur}}$, $\mathbf{q}_+$, $\mathbf{q}_-$ — суть функции σ, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, но $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, вообще говоря, разрывны на Г и, следовательно, неоднозначны.

Для определения $\mathbf{j}_{\text{sur}}$, $\mathbf{q}_+$, $\mathbf{q}_-$ примем, что граница Г имеет толщину, описываемую параметром ξ, так что $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ суть дифференцируемые функции t, x, ξ, причем на Г

$$\mathbf{E}_1(t,\ x)=\mathbf{E}(t,\ x,\ \xi),\ \mathbf{H}_1(t,\ x)=\mathbf{H}(t,\ x,\ \xi),\ \xi=0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{E}_2(t,\ x)=\mathbf{E}(t,\ x,\ \xi),\ \mathbf{H}_2(t,\ x)=\mathbf{H}(t,\ x,\ \xi),\ \xi=4\pi\sigma \tag{2.5}$$

Тогда соотношения (2.2), (2.3) могут быть получены в результате решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{E}}{d\xi}=\mathbf{n},\qquad \frac{d\mathbf{H}}{d\xi}=-\frac{1}{c}\mathbf{n}\times\mathbf{v}(\xi),\qquad \mathbf{v}=b_+\mathbf{v}_++b_-\mathbf{v}_- \tag{2.6}$$

$$\mathbf{j}_{\text{sur}}=\int_0^{4\pi\sigma}\mathbf{v}(\xi)\,d\xi,\qquad \mathbf{q}_+=\int_0^{4\pi\sigma}b_+(\xi)\mathbf{v}_+(\xi)\,d\xi,\qquad \mathbf{q}_-=\int_0^{4\pi\sigma}b_-(\xi)\mathbf{v}_-(\xi)\,d\xi \tag{2.7}$$

$$\mathbf{v}_+=\mathbf{v}_d+\alpha_+\mathbf{v}_l,\ \mathbf{v}_-=\mathbf{v}_d+\alpha_-\mathbf{v}_l,\ b_++b_-=1,\ b_+\geqslant 0,\ b_-\geqslant 0 \tag{2.8}$$

$$\sigma b_+(v_{dn}+\alpha_+v_{ln})=0,\ \sigma b_-(v_{dn}+\alpha_-v_{ln})=0,\ |\alpha_+|\leqslant 1,\ |\alpha_-|\leqslant 1 \tag{2.9}$$

с начальными условиями (2.4) и последующим использованием обозначений (2.5). Скорости $\mathbf{v}_d$, $\mathbf{v}_l$ суть функции от $\mathbf{E}(\xi)$, $\mathbf{H}(\xi)$, вид которых определяется соотношениями (1.3). Индексы n и t здесь и в дальнейшем означают соответственно нормальную и тангенциальную компоненты.

Из (2.6), (2.8), (2.9) и (1.3) следует

$$\frac{d}{d\xi}(\mathbf{E},\mathbf{H})=s_1\nu(v_{ln}+\alpha v_{dn}),\qquad \alpha=b_+\alpha_++b_-\alpha_- \tag{2.10}$$

Учтем, что в соответствии с (1.2), (1.3), (1.9) $\alpha_+=1$, $\alpha_-=-1$ при $\lambda\neq 0$. Тогда из (2.10) в силу (2.9) следует $d/d\xi(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$. Интегрирование этого уравнения с начальным условием $(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)=0$ дает $(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$, $\lambda=0$, $0\leqslant\xi\leqslant 4\pi\sigma$. Это означает, что «область внутри Г» представляет собой область захвата. Здесь возможны три случая

$$\begin{gathered} ID_+\colon\ v_{ln}=-v_{dn}\neq 0,\ b_+=1,\ b_-=0,\ \alpha_+=1,\ \operatorname{sgn}(\sigma)=1 \\ ID_-\colon\ v_{ln}=v_{dn}\neq 0,\ b_+=0,\ b_-=1,\ \alpha_-=-1,\ \operatorname{sgn}(\sigma)=-1 \\ IS\colon\ v_{ln}=v_{dn}=0,\ |\alpha_-|\leqslant 1,\ |\alpha_+|\leqslant 1,\ b_+=1-b_- \end{gathered} \tag{2.11}$$

Интегрирование уравнений (2.6) с начальными условиями (2.4) приводит к соотношениям

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{n}\xi,\ H_n=H_{1n}$$

$$(\mathbf{E},\mathbf{H})=(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)=0,\ \mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2=\mathbf{H}_1^2-\mathbf{E}_1^2 \tag{2.12}$$

$$(\mathbf{E}_t\times\mathbf{H}_t,\mathbf{n})=-\alpha s_1\nu H_{1n},\ \alpha=b_+\alpha_++b_-\alpha_-,\ |\alpha|\leqslant 1 \tag{2.13}$$

Соотношений (2.12), (2.13) достаточно для получения шести величин $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Последние два уравнения (2.12) записываются в виде

$$(\mathbf{H}_t,\ \mathbf{E}_{1t})=-(E_{1n}+\xi)H_{1n},\ \mathbf{H}_t^2=\mathbf{H}_{1t}^2+2E_{1n}\xi+\xi^2 \tag{2.14}$$

Пусть выполнено ID: $v_{ln}=sv_{dn}\neq 0$, $s=\operatorname{sgn}(\sigma)$. Тогда из (1.3) и (2.5) следует $H_{1n}\neq 0$, $E_{1t}^2=H_{1n}^2$, $\alpha=s=\pm 1$. Решение уравнений (2.14), (2.13) относительно $\mathbf{H}_t$ дает

$$\mathbf{H}_t=-((E_{1n}+\xi)\mathbf{E}_{1t}+ss_1\nu\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{1t})/H_{1n},\ [\mathbf{E}]=4\pi\sigma\mathbf{n}$$
$$[\mathbf{H}]=-((E_{1n}+4\pi\sigma)E_{1t}+\operatorname{sgn}(\sigma)s_1\nu\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{1t})/H_{1n}-\mathbf{H}_{1t}$$

Пусть IS: $v_{dn}=v_{ln}=0$. В этом случае $H_{1n}=0$, $\mathbf{E}_{1t}=0$ и первое уравнение (2.14) удовлетворяется тождественно. Второе уравнение дает

$$\mathbf{H}_t=\mathbf{H}_t(\xi)=\frac{H(\xi)}{H_1}\{\mathbf{H}_{1t}\cos\psi+\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{1t}\sin\psi\},\qquad H_1=|\mathbf{H}_1|$$

$$H(\xi)=|\mathbf{H}(\xi)|=\sqrt{H_1^2+2E_{1n}\xi+\xi^2},\qquad |\psi|\leqslant\sqrt{\frac{H_1^2-E_1^2}{H_1^2-E_{1n}^2}}\left|\operatorname{arctg}\frac{\xi\sqrt{H_1^2-E_{1n}^2}}{H_1^2+E_{1n}\xi}\right|$$

Ограничение на ψ возникает при интегрировании второго уравнения (2.6) при условии $|\alpha(\xi)|\leqslant 1$. Получить его непосредственно из второго соотношения (2.14) нельзя. Легко видеть, что $\mathbf{H}_t\to\mathbf{H}_{1t}$ при $\xi\to 0$. Получаем

$$[\mathbf{H}]=\frac{H(\xi)}{H_1}(\mathbf{H}_{1t}\cos\psi+\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{1t}\sin\psi)\,|_{\xi=4\pi\sigma}-\mathbf{H}_{1t}$$

В случае ID поверхностный ток $\mathbf{j}_{sur}$ может быть реализован движением только динамической фазы, тогда как в случае IS $\mathbf{j}_{sur}$ может быть создан движением статической фазы. Условия для скачка электромагнитного поля на границе области захвата напоминают условия на границе вакуум — проводник и отличаются от последних тем, что 4-ток $\{\sigma, \mathbf{j}_{sur}\}$ не является независимым от границы Г.

Во II и III случаях компоненты электромагнитного поля непрерывны на Г и возможен только слабый разрыв, т. е. скачок нормальной производной $\partial/\partial n \equiv (\mathbf{n}, \nabla)$. Тогда **E**, **H** и их тангенциальные производные непрерывны на Г. В этом случае для скачков производных от величины $u = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ получаем

$$[\nabla u] = \mathbf{n}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right], \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0$$

Применяя $\partial/\partial n$ к уравнениям (1.1), получаем

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right] = 4\pi[\rho_+ + \rho_-]\mathbf{n}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n}\right] = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{n}\times[\mathbf{j}] = -\frac{4\pi}{H^2}\{[\rho_+\alpha_+ + \rho_-\alpha_-]\nu s_1 \mathbf{n}\times\mathbf{H} + [\rho_+ + \rho_-](\mathbf{E}H_n - \mathbf{H}E_n)\} \tag{2.15}$$

$$[(\mathbf{j}_+, \mathbf{n})] = \frac{c}{H^2}\{[\rho_+](\mathbf{E}\times\mathbf{H}, n] + [\alpha_+\rho_+]s_1\nu H_n\} = 0$$

$$[(\mathbf{j}_-, \mathbf{n})] = \frac{c}{H^2}\{[\rho_-](\mathbf{E}\times\mathbf{H}, n) + [\alpha_-\rho_-]s_1\nu H_n\} = 0$$

где ρ_+, ρ_-, α_+, α_- описываются последними двумя уравнениями (1.1) и соотношениями

$$\mathbf{j}_+ = \rho_+(\mathbf{v}_d + \alpha_+\mathbf{v}_l), \quad \mathbf{j}_- = \rho_-(\mathbf{v}_d + \alpha_-\mathbf{v}_l) \tag{2.16}$$

которые предполагаются справедливыми всюду, и для совместности с (1.2) необходимо, чтобы $\alpha_+ = 1$, $\alpha_- = -1$ при $\lambda \neq 0$.

3. Слабый разрыв в случае одного компонента. Очень важным является частный случай, когда имеется только один компонент, например только электроны ($s=-1$) $\rho_+=0$. Этот случай часто реализуется, поскольку продольное электрическое поле стремится разделить компоненты. Например, в магнитосфере пульсара компоненты разделяются пространственно [2—4].

Условимся говорить, что граница Г неустойчива по отношению к компоненту s, если он вытекает из V_* сквозь Г, т. е. $(\mathbf{v}_s, \mathbf{n})|_\Gamma > 0$ ($s=\pm1$) и что Г устойчива по отношению к компоненту s, если он не вытекает из V_* сквозь Г (т. е. втекает в V_* или покоится там $(\mathbf{v}_s, \mathbf{n})|_\Gamma \leqslant 0$). В случае II граница Г или устойчива относительно позитронов ($s=1$) и неустойчива относительно электронов ($s=-1$) (случай II_+), или устойчива относительно электронов ($s=-1$) и неустойчива относительно позитронов ($s=1$) (случай II_-). В случае II в системе координат K_0'' $v_{dn}=0$, т. е. $(\mathbf{E}\times\mathbf{H}, \mathbf{n})=0$, и граница неподвижна.

В случае III граница либо устойчива относительно электронов и позитронов одновременно (случай $\mathrm{III}_\pm$), либо неустойчива относительно электронов и позитронов одновременно (случай III_0). В случае III $v_{ln}=0$ (т. е. $(\mathbf{H}, \mathbf{n})=0$) в системе координат K_0''' и граница Г неподвижна.

Запишем соотношения (2.15), (2.16) в случаях II и III, используя соответственно системы координат K_0'' и K_0''', при наличии только электронов ($\rho = \rho_- \leqslant 0$, $\rho_+ = 0$).

В случае II, когда $v_{dn}=0$, $v_{ln}^2>0$, получаем

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right] = 4\pi[\rho_-]\mathbf{n}, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n}\right] = -\frac{4\pi}{H^2}[\rho_-](\mathbf{E}H_n - \mathbf{H}E_n) \tag{3.1}$$

$$[\alpha_-\rho_-] = -\rho_-|_{\Gamma_2} - (\alpha_-\rho_-)|_{\Gamma_1} = 0$$

Так как $\rho_- \leqslant 0$, то из (3.1) следует

$$[\rho]=[\rho_-]=-(1+\alpha_-)\rho_-|_{\Gamma_1}\geqslant 0, \qquad \left[\frac{\partial E_n}{\partial n}\right]\geqslant 0 \tag{3.2}$$

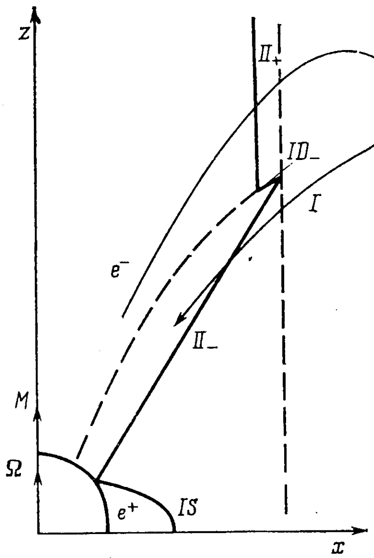
Покажем, что из

$$(\mathbf{v}_{-1}, \mathbf{n})=-c\,\mathrm{sgn}(\mathbf{E}, \mathbf{H})\frac{\nu}{H^2}H_n|_{\Gamma_2}>0, \qquad (\mathbf{E}\times\mathbf{H}, \mathbf{n})=0 \tag{3.3}$$

следует

$$[\partial E_n/\partial n]\leqslant 0. \tag{3.4}$$

Вычислим значение величины (**E**, **H**) вне области захвата на расстоя-



нии r от границы Г, измеряемом вдоль траектории электрона. Имеем

$$(\mathbf{E},\mathbf{H})=(\mathbf{E},\mathbf{H})|_{\Gamma_2}+r\left\{\left(\frac{\mathbf{v}_{-1}}{c}, \nabla\right)(\mathbf{E},\mathbf{H})\right\}\Bigg|_{\Gamma_2}+O(r^2)=$$

$$=\left\{\frac{r}{c}(\mathbf{v}_{-1}, \nabla)(\mathbf{E},\mathbf{H})\right\}\Bigg|_{\Gamma_1}+\frac{r}{c}[(\mathbf{v}_{-1}, \nabla)(\mathbf{E},\mathbf{H})]+O(r^2)=$$

$$=\frac{r}{c}(\mathbf{v}_{-1}, \mathbf{n})\left[\frac{\partial}{\partial n}(\mathbf{E},\mathbf{H})\right]+O(r^2) \tag{3.5}$$

Разложение (3.5) справедливо только при выполнении (3.3), так как только в этом случае разложение осуществляется вне V_*. Используя для вычисления (3.5) соотношения (3.1), получаем

$$(\mathbf{E},\mathbf{H})=-\frac{rH_n^2}{H^4}(H^2-E^2)^{3/2}\left[\frac{\partial E_n}{\partial n}\right]\mathrm{sgn}(\mathbf{E},\mathbf{H})+O(r^2)$$

Отсюда следует неравенство (3.4).

В случае II_+ $v_{dn}=0$, $v_{ln}<0$, граница Г неустойчива относительно электронов. Тогда из $v_{ln}<0$ и уравнения (1.3) для $\mathbf{v}_l$ следует (3.3) и, следовательно, (3.4).

Условие (3.4) совместно с (3.2) только в случае $[\rho_-]=0$, $[\partial E_n/\partial n]=0$. В силу (3.1) и (3.2) это приводит к непрерывности $\partial\mathbf{E}/\partial n$, $\partial\mathbf{H}/\partial n$ на Г, т. е.

$$[\partial_k\mathbf{E}]=0, \qquad [\partial_k\mathbf{H}]=0, \qquad \partial_k\equiv\frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad k=0,1,2,3$$

$$\rho_-|_\Gamma=0 \text{ или } [\alpha_-]=0, \ [\rho_-]=0$$

В случае II_- $v_{dn}=0$, $v_{ln}>0$ и Γ устойчива относительно электронов. В этом случае (3.4) не выполнено и ρ, вообще говоря, имеет разрыв на Γ, который с помощью (3.1) определяет разрывы $\partial\mathbf{E}/\partial n$, $\partial\mathbf{H}/\partial n$.

В случае III $v_{ln}^2=0$, $v_{dn}^2>0$. Тогда получаем

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right]=0, \qquad [\rho_-]=0 \tag{3.6}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n}\right]=-\frac{4\pi}{H^2}[\alpha_-\rho_-]\nu s_1\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{H^2}\nu s_1(\mathbf{n}\times\mathbf{H})\rho_-(1+\alpha_-|_{\Gamma_t})$$

В обоих случаях III_0 и $\mathrm{III}_\pm$ соотношения (3.6) имеют один и тот же вид.

В качестве иллюстрации рассмотрим безмассовый электронно-позитронный газ, эжектируемый с нулевым импульсом с поверхности вращающегося проводящего шара (нейтронной звезды). Шар создает поле тяготения и имеет магнитный момент **M**, параллельный оси вращения **Ω**, (**M**, **Ω**)>0. Установившееся движение газа обладает осевой симметрией и симметрией относительно экваториальной плоскости. Вид областей захвата и течение электронной динамической фазы схематически показаны на фигуре [5]. Жирными линиями обозначены границы области захвата. Римские цифры с индексами указывают тип границы. Полоидальное движение электронной динамической фазы обозначено стрелкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rylov Yu. A.* The algebraical structure of the electromagnetic tensor and description of charged particles moving in the strong electromagnetic field // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 2. P. 521–536.
2. *Rylov Yu. A.* The structure of polar caps and the equatorial belt of pulsars // Astrophys. and Space Sci. 1985. V. 117. № 1. P. 5–34.
3. *Krause-Polstorff J., Michel F. C.* Electrosphere of an aligned magnetized neutron star // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1985. V. 213. № 2. P. 43–49.
4. *Krause-Polstorff J., Michel F. C.* Pulsar space charging // Astron. and Astrophys. 1985. V. 144. № 1. P. 72–80.
5. *Rylov Yu. A.* Self-consistent model of the global structure of axially-symmetric pulsar magnetosphere in massless approximation // Astrophys. and Space Sci. 1988. V. 143. P. 269–300.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1988