

УДК 533.6.011:532.517

© 1990 г.

БРЫКИНА И. Г., РУСАКОВ В. В.

ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ АНАЛОГИИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

Несмотря на развитие численных методов решения пространственных задач обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа, важное значение имеет разработка различных приближенных методов решения таких задач, широко используемых в инженерной практике. Достаточно много приближенных методов разработано для случая больших чисел Рейнольдса, когда происходит разделение течения на вязкую область и пограничный слой. Эти методы основаны на использовании теории пограничного слоя и требуют знания параметров вязкого течения на поверхности тела. В то же время до сих пор практически не существовало аналогичных методов, пригодных для решения трехмерных задач обтекания при малых и умеренных числах Рейнольдса, когда вязкость существенна во всей области возмущенного течения и теория пограничного слоя неприменима. В настоящей работе предлагается приближенный метод определения тепловых потоков и напряжения трения в пространственных задачах обтекания с помощью двумерных и одномерных решений, применимый в широком диапазоне чисел Рейнольдса — от малых до больших. На основе теоретического анализа приближенного аналитического решения уравнений пространственного вязкого ударного слоя показано, что задачу определения теплового потока в окрестности плоскости симметрии тел, обтекаемых под углом атаки, можно свести, во-первых, к задаче определения этой величины на осесимметричном теле и, во-вторых, к задаче определения теплового потока в осесимметричную критическую точку. На основе анализа результатов численного решения задачи показано, что соответствующие аналогии имеют место и для напряжения трения. С помощью решения задачи конечно-разностным методом оценивается точность установленных соотношений подобия. Ранее аналогичное соотношение подобия было получено в [1] для критической точки двойной кривизны.

Рассматривается стационарное пространственное обтекание затупленных тел под углом атаки сверхзвуковым потоком вязкого однородного газа при малых, умеренных и больших числах Рейнольдса. Течение исследуется в рамках модели вязкого ударного слоя, аналогичной двухслойной модели, предложенной в [2] для осесимметричного обтекания.

Пусть $z=f(x, y)$ — уравнение поверхности тела в декартовой системе координат, вектор скорости набегающего потока V_∞ совпадает по направлению с осью z , начало координат помещено в точку торможения потока. Выберем систему криволинейных неортогональных координат, нормальную связанную с обтекаемой поверхностью: одна из координат — расстояние по нормали к поверхности, а в качестве двух других, выбранных на поверхности, используются декартовы координаты точки пересечения этой нормали с поверхностью. Уравнения пространственного тонкого вязкого ударного слоя в этой системе координат приведены в [3]. Течение в окрестности плоскости симметрии $y=0$ будем исследовать на основе этих уравнений. На ударной волне используются модифицированные соотношения Ренкина — Гюгонио, на поверхности тела — граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры.

В [4] в первом приближении интегрального метода последовательных приближений [5, 6] было получено аналитическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии затупленных тел. В частности, получено выражение для числа Стантона,

определяемого как

$$c_H = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty' - H_w')}$$

Здесь q — тепловой поток к поверхности, обусловленный в течении со скольжением теплопроводностью и трением; H' — полная энтальпия, ρ — плотность, индексы ∞ и w относятся к значениям величин в невозмущенном потоке и на поверхности обтекаемого тела.

Анализ приведенного в [4] выражения для c_H показывает, что зависимость числа Стантона от геометрических свойств поверхности и числа Рейнольдса Re определяется в основном углом α между нормалью к поверхности в данной точке и скоростью набегающего потока и параметром $Re/H \cos \alpha$, где H — средняя кривизна поверхности в данной точке, равная полусумме главных кривизн поверхности в этой точке. Следовательно, тепловой поток к поверхности пространственного тела будет равен тепловому потоку к поверхности осесимметричного тела, если будут совпадать оба эти параметра: $\alpha^{ax} = \alpha$, $Re^*/H^{ax} \cos \alpha^{ax} = Re/H \cos \alpha$. Таким образом, число Стантона в данной точке (s с координатой x) на линии растекания пространственного тела, обтекаемого под углом атаки, можно определить с помощью соотношения

$$c_H(Re, x) = c_H^{ax}(Re^*, x), \quad Re^* = Re \frac{H^{ax}}{H} \quad (1)$$

$$H = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \quad g = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$

где c_H^{ax} — число Стантона в соответствующей точке осесимметричного тела, образованного вращением рассматриваемой ветви линии растекания вокруг оси z , определяемое из системы уравнений, в которой постоянное число Рейнольдса Re заменяется на Re^* , зависящее от x ; H^{ax} — средняя кривизна поверхности этого осесимметричного тела в рассматриваемой точке; все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру R , в качестве которого был выбран радиус кривизны поверхности в точке торможения в плоскости симметрии; $Re = R\rho_\infty V_\infty / \mu(T_0)$, T_0 — температура торможения набегающего потока, μ — коэффициент вязкости.

Численные расчеты, проведенные для широкого класса тел и условий обтекания, показывают, что аналогичное соотношение имеет место и для коэффициента трения c_f

$$c_f(Re, x) = c_f^{ax}(Re^*, x), \quad Re^* = Re \frac{H^{ax}}{H} \quad (2)$$

Для режимов течения с большими числами Re , когда можно пренебречь эффектами скольжения на теле и на ударной волне использовать обычные соотношения Ренкина — Гюгоню, из решения, полученного в [4], следует, что тепловой поток убывает пропорционально $1/\sqrt{Re}$ (что согласуется с теорией пограничного слоя). При этом осесимметричная аналогия (1) становится значительно проще

$$c_H(x) = \sqrt{H/H^{ax}} c_H^{ax}(x) \quad (3)$$

Здесь число Стантона $c_H^{ax}(x)$ определяется на осесимметричном теле при том же постоянном значении Re , что и $c_H(x)$.

В теории пограничного слоя для несжимаемой [7] жидкости и для сжимаемого газа [8] была предложена осесимметричная аналогия, заключающаяся в том, что уравнения трехмерного пограничного слоя вдоль линии тока внешнего невязкого течения в предположении о малой интенсивности вторичного течения сводятся к уравнениям пограничного слоя на некотором осесимметричном теле, радиус которого определяется

невязким течением. Эта аналогия использовалась во многих работах при решении пространственных задач пограничного слоя (см. обзор [9]). Однако пограничная аналогия неприменима при небольших числах Re , поскольку требует знания невязкого течения, которого при таких Re просто не существует. В отличие от осесимметричной аналогии, используемой в теории пограничного слоя, аналогия, предложенная в данной работе, во-первых, не требует расчета невязкого течения, во-вторых, значительно проще, так как при ее использовании необходимо знать только среднюю кривизну поверхности, и, в-третьих, применима не только при больших, но и при низких числах Re . При этом предложенную аналогию, выраженную соотношением (3), можно использовать и в теории пограничного слоя. Ее преимущество перед обычной пограничной аналогией в том, что она проще и главное не требует расчета трехмерного невязкого течения.

В связи с этим следует отметить, что в точке торможения соотношение (3) принимает вид

$$c_{H_0} = c_{H_0}^{ax} \sqrt{(1 + \kappa)/2}$$

Здесь c_{H_0} — число Стантона в трехмерной критической точке, κ — отношение главных кривизн поверхности в этой точке, c^{ax} — число Стантона в осесимметричной критической точке. Эта формула в точности совпадает с аналогичной формулой, полученной в теории пограничного слоя [10, 11].

Дальнейшее исследование полученного в [4] решения позволяет получить более простую, хотя, вероятно, и менее точную одномерную аналогию. Для распределения вдоль поверхности величины теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке, с учетом слабой зависимости этой величины от эффектов скольжения на поверхности в [4] была получена приближенная формула (2.5). Из анализа этой формулы следует, что число Re и геометрические свойства поверхности входят в выражение для $c_H/\cos \alpha$ только в комбинации $Re/H \cos \alpha$. Следовательно, число Стантона c_H в произвольной точке на линии растекания можно выразить через число Стантона c_H^{ax} в осесимметричной критической точке:

$$c_H(Re, x) = \cos \alpha c_{H_0}^{ax}(Re_*), \quad Re_* = \frac{Re}{H \cos \alpha} \quad (4)$$

$$\cos \alpha = g^{-1/2} = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

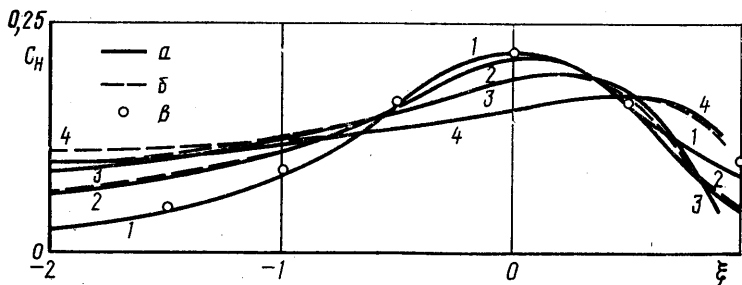
Здесь $c_{H_0}^{ax}$ определяется при числе $Re_*(x)$, меняющемся в зависимости от x .

При больших числах Re , когда тепловой поток убывает пропорционально $1/\sqrt{Re}$, соотношение (4) упрощается

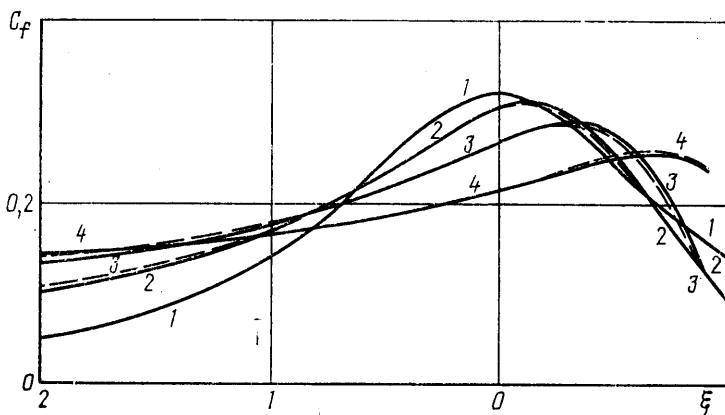
$$c_H(x) = H^{1/2} \cos^{1/2} \alpha c_{H_0}^{ax} \quad (5)$$

Здесь $c_{H_0}^{ax}$ вычисляется при том же числе Re , что и $c_H(x)$.

Для проверки справедливости полученных соотношений подобия проводилось численное решение системы уравнений пространственного тонкого вязкого ударного слоя с обобщенными условиями Ренкина — Гюгонио на ударной волне и учетом эффектов скольжения на теле, а также соответствующей системы уравнений, описывающей осесимметричное течение. Использовалась разностная схема четвертого порядка точности аппроксимации по поперечной координате и второго порядка по продольной. Результаты расчета, полученные с помощью соотношений (1)–(5), сравнивались с точным численным решением для различных эллиптических параболоидов, двуполостных гиперboloидов и трехосных эллипсоидов.



Фиг. 1

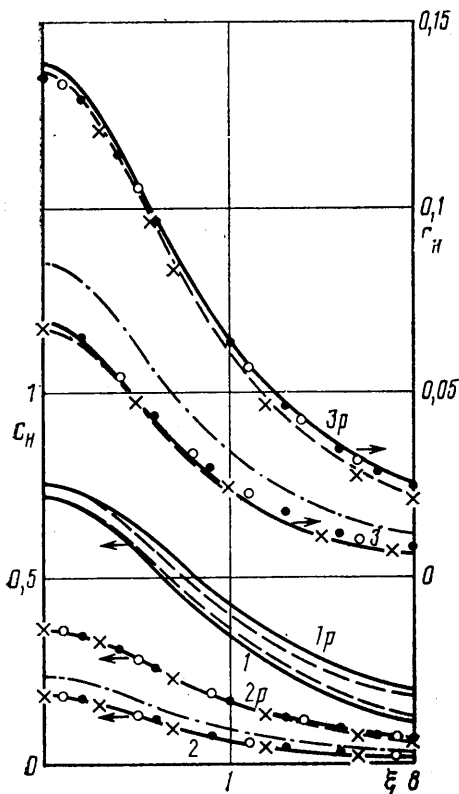


Фиг. 2

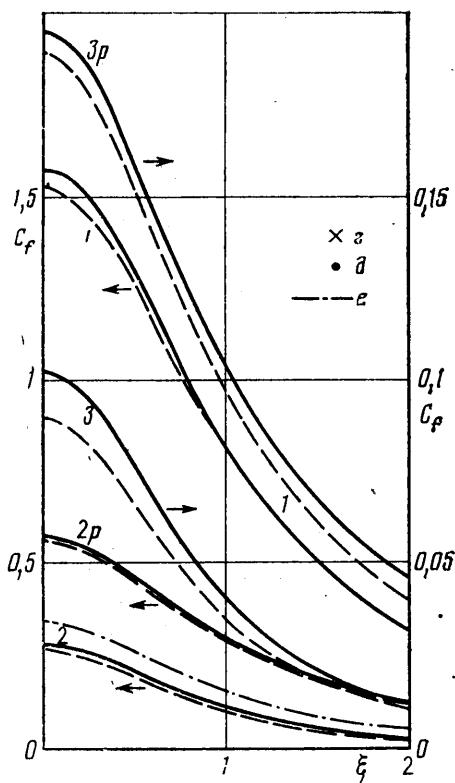
дов, обтекаемых под углами атаки от 0 до 45° . Сравнение проводилось в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи: число Re изменялось от 1 до 10^4 , T_w/T_0 — от 0 до $0,5$, отношение удельных теплоемкостей γ — от $1,1$ до $1,67$ (число Прандтля полагалось равным $0,71$). Некоторые результаты сравнения приближенных и точных решений приведены ниже.

На фиг. 1 и 2 приводятся распределения коэффициентов трения и теплообмена вдоль линии растекания эллиптического параболоида $z = 0,5(x^2 + \kappa y^2)$, $\kappa = 0,8$, обтекаемого при $Re = 100$ под углами атаки $0, 15, 30, 45^\circ$ — линии 1–4 соответственно. На фиг. 3 и 4 сравнение C_H и C_F проводится для эллиптических параболоидов с $\kappa = 0,25$ и 4 (кривые с буквой p), обтекаемых под нулевым углом атаки, при числах $Re = 1, 100, 700$ — линии 1–3 соответственно. На фиг. 5 приведены распределения числа Стантона по поверхности 45° — гиперboloида, обтекаемого под углом атаки 30° , при числах $Re = 1, 100, 1000$ — линии 1–3. На всех фигурах линии a — численное решение, b — расчет с помощью осесимметричной аналогии (1), (2), β — расчет с помощью одномерной аналогии (4), γ — расчет с помощью упрощенной осесимметричной аналогии (3), δ — расчет с помощью упрощенной одномерной аналогии (5), $\xi = x$.

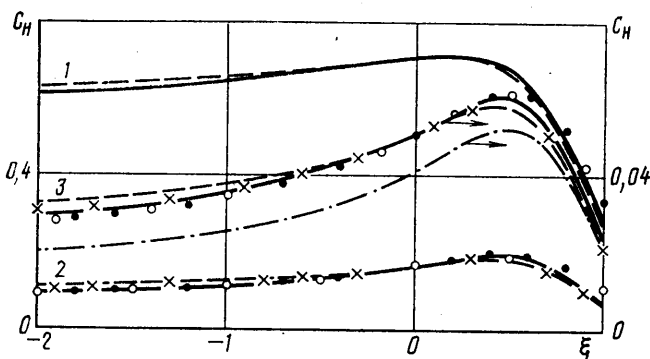
Результаты проведенного сравнения продемонстрировали высокую точность соотношения (1), с помощью которого расчет теплового потока в окрестности плоскости симметрии пространственного тела сводится к расчету теплового потока к поверхности осесимметричного тела. Аналогичное соотношение для коэффициента трения (2) в некоторых случаях может давать большую погрешность, чем соотношение (1) для коэффициента теплообмена. Проведенное сравнение показало также, что тепловые потоки на линии растекания пространственного тела, определенные по (4) путем расчета теплового потока в осесимметричной критической точке, хорошо согласуются с результатами численного решения уравне-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ний пространственного вязкого ударного слоя, однако точность соотношения (4) уменьшается в случае обтекания под углом атаки с той стороны от точки торможения, где радиус продольной кривизны контура тела уменьшается.

Анализ полученных результатов показал, что уже при $Re \geq 100$ результаты расчетов по упрощенным формулам (3) и (5) практически совпадают с результатами расчетов соответственно по формулам (1) и (4) (фиг. 3 и 5). Таким образом, для определения тепловых потоков при $Re \geq 100$ вместо соотношений подобия (1) и (4) можно пользоваться более простыми соотношениями (3) и (5), не требующими использования при расчетах переменных чисел Re .

Для определения тепловых потоков на линии растекания затупленных тел в некоторых работах используют просто осесимметричное реше-

ние для тела, образованного вращением линии растекания вокруг оси, параллельной направлению набегающего потока без учета реальной поперечной кривизны поверхности (например, [12, 13]). Для сравнения такие осесимметричные решения (линии e) приведены на фиг. 3–5 при $Re=100, 700, 1000$. Видно, что поперечная кривизна поверхности оказывает очень сильное влияние на величину теплового потока и что использование обычных осесимметричных решений без поправок, связанных с кривизной поверхности, в отличие от предложенных в данной работе может давать значительные ошибки — до 100% и более.

В заключение следует отметить, что использование установленных соотношений подобия позволяет, во-первых, значительно сократить время расчетов и, во-вторых, применять имеющиеся программы для расчета одномерных и двумерных течений к решению пространственных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брыкина И. Г., Русаков В. В. Аналитическое исследование трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 143–150.
2. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // Inst. Astronaut. Sci. Pap. 1963. № 92. P. 100.
3. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува // Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 144–156.
4. Брыкина И. Г., Русаков В. В. Аналитическое исследование пространственного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии // ПМТФ. 1989. № 4. С. 16–22.
5. Ковач Э. А., Турский Г. А. Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 1. С. 61–64.
6. Брыкина И. Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 1. С. 154–166.
7. Eichelbrenner E. A., Oudart A. Methode de calcul de la couche limite tridimensionnelle // ONERA Publ. 1955. № 76. 49 p.
8. Cooke J. C. An axially symmetric analogue for general three-dimensional boundary layers // Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem. 1959. № 3200. 12 p.
9. Пейгин С. В., Турский Г. А. Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1988. Т. 22. С. 62–177.
10. Reshotko E. Heat transfer to a general three-dimensional stagnation point // Jet Propulsion. 1958. V. 26. № 1. P. 58–60.
11. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пространственный пограничный слой на проницаемой поверхности в окрестности плоскости симметрии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 37–48.
12. Zoby E. V. Approximate heating analysis for the windward symmetry plane of shuttle-like bodies at large angle of attack // Progress in Astronaut. and Aeronaut. V. 82. Thermophysics of Atmospheric Entry. N. Y., 1982. P. 229–247.
13. Shinn J. L., Simmonds A. L. Comparison of viscous shock-layer heating analysis with shuttle flight data in slip flow regime // AIAA Pap. 1984. № 226. 9 p.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1988