

УДК 532.529.6

© 1989

САГИТОВ Р. Р., ХАБЕЕВ Н. С.

## ВЛИЯНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА НА ЕГО КОНДЕНСАЦИОННОЕ СМЫКАНИЕ В ЖИДКОСТИ

Изучение динамики, теплообмена одиночного пузырька представляет как самостоятельный интерес, так и является одним из этапов исследования пузырьков-смесей [1–3]. В связи с этим рассмотрим смыкание парового пузырька, который обтекается безграничным потоком несжимаемой жидкости. Конденсация пара в пузырьке происходит вследствие увеличения давления в окружающем потоке.

Основные результаты и обзор литературы по сферически-симметричной динамике, тепло- и массообмену одиночного пузырька приведены в [4–7]. Теоретические и экспериментальные данные по движению газовых пузырьков отражены в [8]. Конвективный тепло- и массообмен при обтекании пузыря, не совершающего радиального движения, подробно рассмотрен в [9–12]. Тепловой режим схлопывания парового пузырька в недогретой жидкости и влияние на этот процесс его относительного движения ранее были рассмотрены в [13]. Там же можно найти сравнение численных расчетов с экспериментальными данными (описание экспериментальной установки приведено в [14]).

В настоящей работе исследуется конденсация пара и влияние на этот процесс двух факторов: относительного движения и внешнего воздействия со стороны несущего потока (возмущения давления). Построена математическая модель, описывающая все этапы данного явления. Модель включает в себя уравнения баланса массы, количества движения и энергии (как для пара, так и для жидкости) или их первые интегралы.

**1. Постановка задачи.** Будем считать, что пузырь все время сохраняет сферическую форму. Для оценки справедливости такого предположения можно использовать критерий по числу Вебера [8]:  $We = 2\rho_l R U_\infty^2 / \sigma \ll 1$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $R$  — радиус пузырька,  $U_\infty$  — характерная скорость обтекания,  $\rho_l$  — плотность жидкости.

Жидкость будем считать бесконечно протяженной, несжимаемой. Рассмотрим осесимметричное обтекание пузырька потоком, поступательная скорость которого на бесконечности  $U_\infty$  постоянна. Обсуждение корректности такого предположения можно найти в [13]. Конечно, в реальной ситуации силы трения, присоединенной массы, гравитационные и пр. могут быть и не уравновешены, т. е. имеет место ускоренное движение. Положим, что за время, характерное для исследуемого процесса, скорость изменится незначительно. Также можно рассмотреть случай, когда скорость является определенной функцией времени (или радиуса пузырька). Некоторые данные по этому поводу можно найти, например, в [8, 15].

Предположим, что течение жидкости потенциальное, обтекание пузыря безотрывное. Обоснование и обсуждение такого приближения приведено в [8, 9, 16, 17] для умеренных чисел Рейнольдса  $1 \ll Re \ll 1000$ , где  $Re = 2\rho_l U_\infty R / \mu_l$  ( $\mu_l$  — коэффициент динамической вязкости жидкости). Отмечается, что в реальной ситуации область отрыва представляет собой очень узкую зону у кильватера пузырька. Особенностью постановки краевой задачи о движении пузыря является отсутствие явных ограничений на касательную составляющую вектора скорости на межфазной поверхности. Поэтому роль вязкого пограничного слоя, который, несомненно, существ-

вует в реальной жидкости, в данном диапазоне чисел Рейнольдса мало существенна. Таким образом, можно найти потенциал поля скоростей  $\varphi(r, \alpha, t)$  для осесимметричного движения жидкости [13]

$$\varphi = -U_{\infty}(r + 0,5R^3/r^2) \cos \alpha - R^2 w_{1\sigma}/r, \quad r \gg R \quad (1.1)$$

где  $r$  — расстояние от фиксированной точки до центра пузырька,  $\alpha$  — угол между радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и направлением, противоположным направлению набегающего потока на бесконечности,  $w_{1\sigma}$  — радиальная скорость жидкости на поверхности пузырька. Теперь можно вычислить радиальную и тангенциальную составляющие вектора скорости  $\mathbf{V}(v_r, v_{\alpha})$ .

Уравнение количества движения жидкости в такой постановке имеет первый интеграл — интеграл Коши — Лагранжа. Учитывая балансовые условия, налагаемые на массу и импульс на поверхности пузырька, этот интеграл можно написать в виде уравнения Рэлея — Ламба [6, 8]

$$R \frac{dw_{1\sigma}}{dt} + \frac{3}{2} w_{1\sigma}^2 = \frac{p_v - p_{\infty} - 2\sigma/R}{\rho_l} + \frac{1}{4} U_{\infty}^2 - \frac{2jw_{1\sigma}}{\rho_l} \quad (1.2)$$

$$w_{1\sigma} = \frac{dR}{dt} - \frac{j}{\rho_l} \quad (1.3)$$

где  $j$  — интенсивность испарения жидкости с единицы площади,  $p_v$  — давление пара,  $p_{\infty}$  — давление в жидкости на бесконечности. Уравнение (1.2) выведено в предположении, что давление в жидкости на межфазной поверхности зависит только от времени. Это приближение оправдано в случаях, когда давление пара можно считать однородным по объему пузырька, а сам пузырь имеет форму сферы [8]. Условие (1.3) отражает баланс массы на поверхности пузыря.

Уравнение энергии жидкости, если принять ее удельную теплоемкость  $c_l$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda_l$  за постоянные величины, можно записать следующим образом через температуру  $T_l$ :

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_l}{\partial r} + \frac{v_{\alpha}}{r} \frac{\partial T_l}{\partial \alpha} = a_l \left( \frac{\partial^2 T_l}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \alpha^2} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r^2} \frac{\partial T_l}{\partial \alpha} \right) \quad (1.4)$$

$a_l = \lambda_l / (\rho_l c_l)$  — коэффициент температуропроводности.

Начальные и граничные условия для уравнения (1.4) задаются равенствами

$$T_l(r, \alpha, 0) = T_{\infty} \quad (1.5)$$

$$T_l(\infty, \alpha, t) = T_{\infty}, \quad T_l(R, \alpha, t) = T_s \quad (1.6)$$

где  $T_s$  — температура насыщения пара,  $T_{\infty}$  — начальная температура жидкости.

Система уравнений (1.1) — (1.4) незамкнута. Для ее замыкания нужно определить давление пара  $p_v$ , температуру насыщения  $T_s$  и интенсивность испарения жидкости  $j$ . В качестве уравнения состояния пара принято пользоваться уравнением совершенного газа Клапейрона

$$p_v = \rho_v B_v T_v \quad (1.7)$$

где  $B_v$  — газовая постоянная пара,  $\rho_v$  и  $T_v$  — соответственно его плотность и температура. Уравнение (1.7) хорошо согласуется с данными для насыщенного пара [18]. Погрешность при давлениях от 1 до 10 атм. и температурах от 370 до 450 К составляет менее 3%.

Предположим, что все теплофизические функции для пара в пузырьке зависят только от  $t$  ( $p_v(t)$ ,  $\rho_v(t)$ ,  $T_v(t)$ ). Такие модели широко описаны и применяются в литературе [4, 19]. В силу однородности распределения давления и температуры в пузырьке переменная  $T_v$  есть температура насыщения и является функцией давления  $p_v$ , т. е.  $T_v = T_s(p_v)$ . Для вычисле-

ния этой зависимости воспользуемся схемой квазиравновесных фазовых переходов. Уравнение Клапейрона — Клаузиуса запишем следующим образом:

$$\frac{dp_v}{dT_s} = \frac{\rho_v L}{T_s} \quad (1.8)$$

где  $L$  — скрытая теплота парообразования. В такой записи уравнения уже учтено, что плотность пара  $\rho_v$  много меньше плотности жидкости  $\rho_l$ . Если отношение теплофизических параметров  $B_v$  и  $L$  можно считать постоянной величиной для данного процесса, тогда уравнение (1.8) интегрируется

$$T_s = \frac{T_{s0}}{1 - (T_{s0} B_v / L) \ln(p_v / p_{v0})}$$

Таким образом, для определения трех неизвестных величин  $p_v$ ,  $\rho_v$ ,  $T_s$  имеем два уравнения (1.7) и (1.8). Для замыкания этой системы воспользуемся уравнением баланса массы пузырька

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_v \right) = 4\pi R^2 j$$

Используя (1.3) и (1.8), это уравнение можно переписать в другом виде

$$\frac{dp_v}{dt} = \frac{3p_v}{R\gamma_*} \left( \frac{j}{\rho_v} - \frac{dR}{dt} \right) \quad (1.9)$$

где  $\gamma_* = 1 - B_v T_s / L$ .

Из условия баланса энергии на поверхности пузырька можно определить интенсивность парообразования

$$jL = q_v - q_l$$

$q_v$  и  $q_l$  — теплотокки в паре и жидкости у межфазной поверхности.

В [6, 14] указывается, что для паровых пузырьков из-за наличия источника тепла  $jL$  на межфазной поверхности выполняется следующая оценка  $q_v \ll q_l$ , т. е. перенос тепла за счет теплопроводности пара на несколько порядков меньше, чем в жидкости. Местные потоки тепла изменяются в зависимости от угла  $\alpha$ , это приводит к тому, что интенсивность испарения (конденсации) имеет различные значения на поверхности пузырька в зависимости от угла  $\alpha$ . Поверхностное натяжение выступает здесь в качестве механизма, который выравнивает эту неоднородность, т. е. сохраняет сферическую форму пузырька. Таким образом, условие баланса энергии на межфазной поверхности можно записать

$$j = 0,5 \frac{\lambda_l}{L} \int_0^\pi \frac{\partial T_l}{\partial r}(R, \alpha, t) \sin \alpha d\alpha \quad (1.10)$$

Для замыкания системы уравнений (1.1) — (1.10) необходимо задать начальное условие для функций  $R(t)$ ,  $w_{l\sigma}(t)$ ,  $p_v(t)$

$$t=0: R=R_0, w_{l\sigma}=0, p_{v0}=p_{\infty 0} + 2\sigma/R_0 \quad (1.11)$$

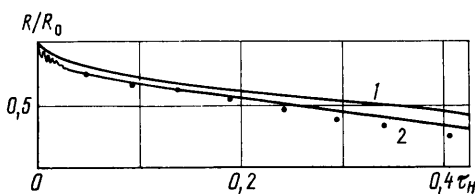
Из равновесия система выводится изменением давления  $p_\infty$  на бесконечности в жидкости. Для таких процессов выделяют две стадии изменения радиуса пузырька [6, 14]: динамическую и тепловую. Предложенная система уравнений позволяет эффективно изучать обе эти стадии.

**2. Сравнение с экспериментальными данными.** Для проверки корректности построенной модели было проведено сравнение результатов численных расчетов системы уравнений (1.1) — (1.11) с экспериментальными дан-

ными. В опытах изучалось следующее физическое явление [13, 14]: пузырек всплывает в воде с постоянной скоростью, в некоторый момент времени в жидкости скачком повышается давление. Пар в пузырьке начинает конденсироваться. Экспериментально в [13] исследовались только парогазовые пузырьки, поэтому они конденсировались лишь до некоторого конечного размера  $\gamma_p$  ( $\gamma_p = R_p/R_0$  — безразмерный установившийся радиус). Возьмем для сравнения данные опыта № 1870, в котором рассмотрен парогазовой пузырек с ничтожно малым объемным содержанием газа в начальный момент. В рассматриваемом случае  $\gamma_p = 0,075$ ; в других опытах, представленных в [13],  $\gamma_p$  принимает значительно большие значения. По величине  $\gamma_p$  можно примерно оценить начальное объемное содержание газа в пузырьке  $\alpha_{g0} = \gamma_p^3$  (в исследуемом случае  $\alpha_{g0} \approx 4,2 \cdot 10^{-4}$ ). Эксперимент проводился в воде при следующих условиях:

$$R_0 = 0,393 \text{ см}; U_\infty = 2,2 \text{ см/с}; T_\infty = 93,95^\circ \text{ С}; p_{v0} = 60,9 \text{ см рт. ст.}; \\ p_\infty = 74,57 \text{ см рт. ст.}; We = 0,03; Re = 600; Pe = 1029$$

На фиг. 1 рассмотрены зависимости радиуса пузыря от времени: точками обозначены экспериментальные данные, сплошными линиями — результаты численных расчетов. Кривая 1 получена в [13], а кривая 2 — из соответствующих расчетов, выполненных для системы уравнений (1.1) — (1.11). Видно, что предлагаемая в настоящей работе модель хорошо согласуется с экспериментами. Более простая модель [13], не учитывающая динамику колебаний пузырька, в данном случае оказалась также достаточно точной. Однако возможны ситуации, когда такой неучет может привести



Фиг. 1

к значительным ошибкам. Очевидно, это происходит при больших значениях отношения возмущенного давления к начальному  $p_\infty/p_{v0}$  [4] (в эксперименте оно равнялось примерно 1,22). Отметим, что кривая 2 на начальном коротком интервале времени носит осцилляционный характер. Амплитуда этих колебаний мала и они быстро затухают. Здесь в качестве безразмерного времени была использована величина [13, 14]

$$\tau_H = \frac{4}{\pi} Ja^2 \frac{a_1 t}{R_0^2}, \quad Ja = \frac{\rho_l c_l (T_s(p_\infty) - T_\infty)}{\rho_{v0} L}$$

где  $Ja$  — число Якоба.

**3. Переход к безразмерным переменным.** Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \frac{a_1 t}{R_0^2}, \quad r_* = \frac{r - R}{R_0}, \quad R_* = \frac{R}{R_0}, \quad P_v = \frac{p_v}{p_{v0}} \\ \theta = \frac{(T - T_\infty) \rho_l c_l}{\rho_{v0} L}, \quad W_{i\sigma} = \frac{R_0 w_{i\sigma}}{a_1}, \quad J = \frac{R_0}{a_1 \rho_l} j \quad (3.1)$$

При обезразмеривании системы уравнений (1.1) — (1.11) согласно (3.1) были получены безразмерные комплексы

$$Re = 2U_\infty R_0 / a_1, \quad P_\infty = p_\infty / p_{v0}, \quad C_\sigma = \rho_{v0} / \rho_l \\ C_R = \frac{R_0^2 p_{v0}}{a_1^2 \rho_l}, \quad S = \frac{2\sigma}{R_0 p_{v0}}, \quad C_B = \frac{B_0 T_{s0}}{L}, \quad C_L = \frac{T_{s0} c_l}{L} \quad (3.2)$$

Таким образом, исследуемый процесс имеет семь критериев подобия, каждый из которых играет определенную роль. Из-за предположения об идеальной жидкости в безразмерной математической постановке задачи от-

сутствует число Рейнольдса. Однако, проводя расчеты для конкретной жидкости, можно вычислить характерное значение числа  $Re$  и убедиться, что число Рейнольдса лежит в оговоренном выше интервале. Число Вебера можно получить, взяв определенную комбинацию безразмерных параметров (3.2).

В обсуждаемых в работе вариантах число  $We$  не превышало 0,1.

Число Пекле  $Pe$  характеризует в уравнении (1.4) соотношение двух механизмов изменения энергии жидкости: конвективного движения и переноса тепла посредством теплопроводности. Для тепловых процессов при обтекании сферы постоянного радиуса число Пекле (наряду с числом Якоба  $Ja$ ) является основным безразмерным критерием подобия. Из (3.1) видно, что в предлагаемой модели безразмерная температура пара  $\theta_s$  становится равной числу  $Ja$  в момент, когда устанавливается давление в пузырьре.

Скачок давления в жидкости задается параметром  $P_\infty$ . Этот параметр определяет механизм, который выводит систему из равновесия. Величина  $P_\infty$  существенным образом влияет на результаты численных расчетов. Указанные два безразмерных параметра  $Pe$  и  $P_\infty$  можно довольно широко варьировать. Значению  $Pe=0$  соответствует случай, когда нет обтекания. При этом система уравнений (1.1)–(1.11) соответствует известной постановке о сферически-симметричных колебаниях парового пузырька [7, 20], которая сравнивалась с экспериментальными данными [4]. В рамках поставленной модели можно подобрать такие  $a_1$ ,  $R_0$ ,  $U_\infty$ , чтобы число Пекле достигало  $\sim 10^4$ .

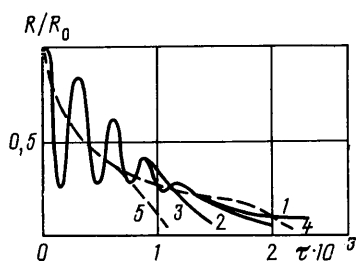
Критерий подобия  $C_R$  возникает при обезразмеривании в правой части уравнения Рэлея — Ламба (1.2). Величина параметра  $C_R$  имеет большое числовое значение даже для достаточно мелких пузырьков. Такая особенность часто помогает выделить два класса задач, рассматривающих только динамическую или только тепловую стадии; с другой стороны, это является неудобством при численном изучении процессов, для которых необходимо изучать обе эти стадии. Параметры  $Pe$  и  $C_R$  описывают соотношение начального размера пузырька и скорости его обтекания с термодинамическими характеристиками жидкости.

Безразмерный параметр  $C_p$  равен отношению начальной плотности пара к плотности жидкости. Этот критерий возникает при обезразмеривании уравнений (1.8) и (1.9), где он играет существенную роль на динамической стадии.

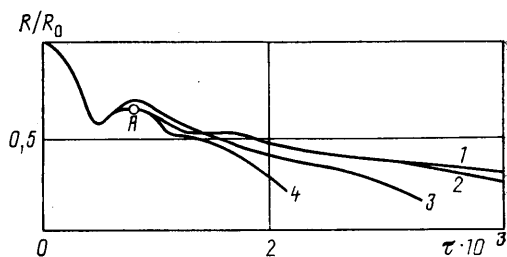
При нормальных условиях для большинства жидкостей (при отсутствии в них поверхностно-активных веществ) безразмерный коэффициент  $S$ , характеризующий поверхностное натяжение, много меньше единицы. В начальный момент времени разность  $P_0 - P_\infty$  в (1.2) приобретает конечное значение, поэтому учет  $S$  сказывается лишь на конечной стадии схлопывания пузырька.

Безразмерные константы  $C_B$  и  $C_L$  характеризуют теплофизические свойства пара и жидкости. Отметим, что фактически параметр  $C_L$  влияет на процесс только через граничное условие на поверхности пузырька (1.6) (температура  $\theta_s$  зависит от  $C_L$  в уравнении Клапейрона — Клаузиуса). Для реальных сред параметры  $C_B$  и  $C_L$  меньше единицы.

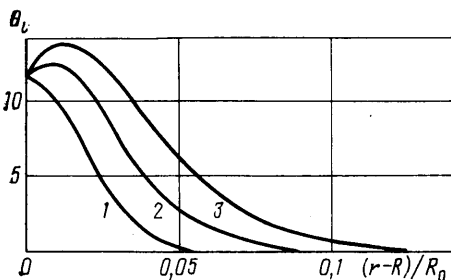
Возможности варьирования безразмерных критериев  $C_R$ ,  $C_p$ ,  $S$ ,  $C_B$  и  $C_L$  связаны с конкретными значениями соответствующих теплофизических констант и поэтому ограничены. Определение этих параметров проводилось следующим образом. Задавались начальный размер пузырька  $R_0$  и физическая среда (например, вода — пар воды), начальное равновесное давление  $p_{v0}$  (следовательно, и  $p_{\infty 0}$  из (1.11)). После этого, определив все необходимые теплофизические параметры [18] для рассматриваемой среды при заданных давлении и температуре, можно вычислить константы  $C_R$ ,  $C_p$ ,  $S$ ,  $C_B$ ,  $C_L$ . При этих условиях варьировались безразмерные критерии: число  $Pe$  и скачок давления на бесконечности в жидкости  $P_\infty$ . Такая схе-



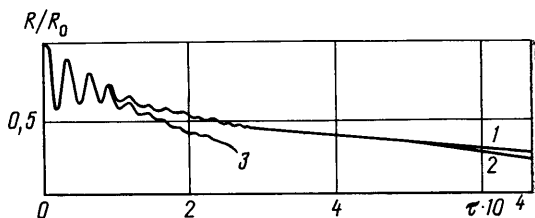
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ма анализа позволяет количественно учесть влияние параметров  $Re$  и  $P_\infty$  и качественно — всех остальных безразмерных констант. На фигурах, представленных в настоящей работе, отражены результаты численных расчетов, проведенных для парового пузырька в воде. Поэтому для полного определения конкретного рассчитываемого варианта достаточно задать параметры  $R_0$ ,  $p_{v0}$ ,  $Re$  и  $P_\infty$ ; остальные будут однозначно определены.

**4. Результаты численных расчетов.** Система уравнений (1.1) — (1.11) содержит одно двумерное нестационарное уравнение (1.4) и четыре обыкновенных дифференциальных уравнения. Для численного решения уравнения (1.4) был использован метод чередующихся направлений, предложенный в [21]. Данный метод устойчив и позволяет решать многомерные уравнения параболического типа. Построенные разностные схемы имеют второй порядок точности.

На фиг. 2 представлены зависимости радиуса пузырька от времени для случая  $R_0=0,1$  мм;  $p_{v0}=1$  бар;  $P_\infty=2$ . Сплошные линии 1–3 построены соответственно для  $Re=0$ ; 100; 1000. На фигуре отчетливо видно, что на динамической стадии (осцилляционное изменение радиуса пузырька) обтекание несколько не сказывается на функции  $R_*(\tau)$ . В зависимости от числа Пекле оно может быть существенно либо на чисто тепловой стадии (когда  $P_v=P_\infty$ ), либо на промежуточном этапе, когда и инерция жидкости и теплоперенос одинаково важны. При  $Re \ll 100$  относительное движение пузырька проявляется на заключительной стадии его смыкания ( $R_* \ll 0,1$ ). Пунктирные линии 4 и 5 построены по результатам расчетов, выполненных, согласно модели [13], для чисел Пекле  $Re=100$  и 1000 (соответственно для  $Re=60$  и 600). Число Рейнольдса определяется из равенства  $Re=Pe/Pr$ , где  $Pr=\mu_l c_l / \lambda_l$  — тепловое число Прандтля. Для воды при давлении 1 бар и температуре 373 К число Прандтля  $Pr \approx 1,7$ . Поэтому, зная число Пекле, можно вычислить соответствующее число Рейнольдса.

Варианты, рассмотренные на фиг. 2 и 3, отличаются друг от друга лишь величиной  $P_\infty$  (соответственно  $P_\infty=2$  и 1,2). Видим, что при уменьшении параметра  $P_\infty$  амплитуда колебаний радиуса пузырька и их количество уменьшается. Тем не менее характер влияния относительного движения (чисел  $Re$ ) не меняется. На фиг. 3 линии 1–4 построены для чисел  $Re=0$ ; 100; 500 и 1000.

Распределение температуры в жидкости возле пузырька в момент време-

ни  $A$ , когда функция  $R_*(\tau)$  локально принимает экстремальное значение (см. фиг. 3), дано на фиг. 4. Здесь линии 1–3 построены для трех углов  $\alpha=0$ ;  $\pi/2$  и  $2\pi/3$  (при этом число Пекле для всех этих случаев бралось равным 1000). Легко заметить, что монотонность кривых может меняться в зависимости от угла  $\alpha$ , поэтому такие задачи нельзя решать в предположении тонкости температурного пограничного слоя: существуют углы  $\alpha$  (например,  $\alpha=2\pi/3$ ), для которых функция  $\theta_i(r_*, \alpha, \tau)$  в некоторые моменты времени имеет максимум на удалении от поверхности пузыря ( $r_* > 0$ ).

Сравнение фиг. 2 и 5 показывает влияние величины начального радиуса  $R_0$  на исследуемый процесс. На фиг. 5 приведен вариант, для которого  $R_0=1$  мм,  $p_{в0}=1$  бар,  $P_\infty=2$ . Линиям 1–3 соответствуют числа  $Re=0$ ;  $10^3$  и  $10^4$ . Для более крупных пузырьков характерно большее число пульсаций (см. фиг. 5). Это связано с тем, что с увеличением начального радиуса пузырька  $R_0$  уменьшается удельная межфазная поверхность, поэтому уменьшается роль фазовых переходов и ее влияние на динамику пузырька.

Таким образом, относительное движение пузырька начинает заметно влиять на его конденсационное смыкание только после того, как колебания радиуса либо совсем прекратятся, либо их амплитуда значительно уменьшится, т. е. после чисто динамической стадии. Предположение о том, что давление в пузырьке мгновенно устанавливается соответственно давлению на бесконечности в жидкости, оказывается неточным (см. фиг. 1 и 2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
2. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 6. С. 1331–1333.
3. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред // ПММ. 1971. Т. 35. № 3. С. 451–463.
4. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Волны в жидкости с пузырьками // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1982. Т. 17. С. 160–249.
5. Plesset M. S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // Annu. Rev. Fluid Mech. Palo Alto. Calif. 1977. V. 9. P. 145–185.
6. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
7. Prosperetti A., Crum L. A., Commander K. W. Nonlinear bubble dynamics // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. № 2. P. 502–514.
8. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. 1976. Т. 10. С. 86–147.
9. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 539 с.
10. Соу Шаоле. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
11. Броунштейн Б. И., Фишбейн Г. А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 279 с.
12. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
13. Wittke D. D., Chao B. T. Collapse of vapor bubbles with translatory motion // Trans. ASME. 1967. V. C89. № 1. P. 17–24.
14. Florschuetz L. W., Chao B. T. On the mechanics of vapor bubble collapse // Trans. ASME. 1965. V. C87. № 2. P. 209–220.
15. Ruckenstein E., Davis E. J. The effects of bubble translation on vapor bubble growth in a superheated liquid // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1971. V. 14. № 7. P. 939–952.
16. Moore D. W. The rise of a gas bubble in a viscous liquid // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. № 1. P. 113–130.
17. Бэтчелор Д. К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
18. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
19. Акуличев В. А. Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. М.: Наука, 1978. 279 с.
20. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика паровых пузырьков // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 59–67.
21. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. SIAM. 1955. V. 3. № 1. P. 28–41.

Москва

Поступила в редакцию  
25.VII.1988