

УДК 532.5.013

© 1989

ЯРМИЦКИЙ А. Г.

ЦИЛИНДР ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В СЛАБО ЗАВИХРЕННОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В [1] показано, как построить установившееся течение невязкой жидкости вокруг бесконечного цилиндра, когда невозмущенный поток имеет две компоненты скорости: перпендикулярную к образующей цилиндра и параллельную ей. Обе составляющие, вообще говоря, не постоянные. Полученное решение выражается через функцию тока плоского течения в отсутствие второй (продольной) составляющей. Значение полученного результата, как отмечает сам автор, к сожалению, ограничено, ибо точное выражение для упомянутой функции тока известно лишь в случаях, когда скорость набегающего потока либо постоянна, либо является линейной, гармонической или экспоненциальной функцией поперечной координаты.

Ниже показывается, что это ограничение преодолимо, если предположить, что вдали от цилиндра течение мало отличается от однородного с компонентами скорости, перпендикулярной и параллельной образующей. В таком случае задачу удается свести к двум независимым в первом приближении задачам — определению продольной компоненты скорости и функции тока возмущенного течения. Изопахми продольной скорости в этом приближении служат линии тока обтекания цилиндра однородным потоком. Что же касается функции тока и давления, то они совпадают с соответствующими величинами при плоском течении вокруг того же цилиндра в отсутствие продольной скорости.

С использованием идей [2] исследуется обтекание кругового цилиндра, когда поперечный поток имеет произвольный периодический профиль скоростей далеко вверх по течению. Завихренность этого течения, по предположению, мала. На продольную компоненту скорости, зависящую вдали от цилиндра только от одной поперечной координаты, кроме малого отличия от постоянной величины и дифференцируемости по этой координате никаких ограничений не накладывается.

1. Линеаризация основных уравнений гидродинамики и постановка задачи. Пусть скорость невозмущенного течения задается выражениями (фиг. 1)

$$U(y) = U_0 + \varepsilon U_1(y), \quad W(y) = W_0 + \varepsilon W_1(y) \quad (1.1)$$

где ε — малый параметр; $U_0 = \text{const}$ и $W_0 = \text{const}$.

Внесем в это течение бесконечный цилиндр произвольного поперечного сечения (фиг. 1). Возмущенный им поток, следуя [3], назовем двухпараметрическим.

Согласно [3], функциональные определители, связывающие z -компоненту скорости w и энергию единицы массы жидкости E с функцией тока течения ψ , равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial(w, \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(E, \psi)}{\partial(x, y)} = 0 \quad (1.2)$$

Предположим, что имеют место асимптотические разложения

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \varepsilon \psi_1(x, y) + \dots, \quad w(x, y) = W_0 + \varepsilon w_1(x, y) + \dots \quad (1.3)$$
$$E(x, y) = E_0 + \varepsilon E_1(x, y) + \dots$$

где $\psi_0(x, y)$ — функция тока плоского обтекания цилиндра однородным потоком (в отсутствие продольной компоненты скорости w); E_0 — запас энер-

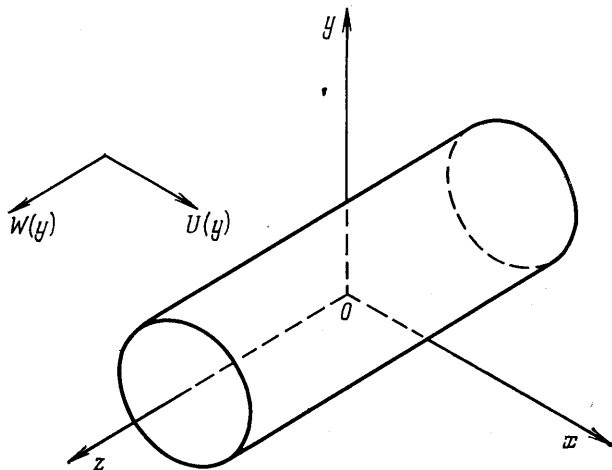
гии единицы массы жидкости при $\varepsilon=0$; величины с индексом I — первые приближения соответствующих величин без индекса.

Линеаризованные на этой основе уравнения (1.2) приводят к соотношениям

$$w(\psi_0) = W_0 + \varepsilon \Phi(\psi_0), \quad E(\psi_0) = E_0 - \varepsilon F(\psi_0) \quad (1.4)$$

где Φ и F — произвольные функции.

Так что с точностью до ε механическая энергия единицы массы жидкости (как и z -компонента скорости возмущенного течения) постоянны



Фиг. 1

вдоль линий тока $\psi_0(x, y) = \text{const}$ основного течения. Таким образом,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \Pi = E(\psi_0) - \frac{w^2(\psi_0)}{2}$$

где p — давление, ρ — плотность, u , v , w — компоненты скорости вдоль осей x , y , z соответственно, Π — потенциал массовых сил.

Дифференцируя последнее выражение по ψ_0 , получим

$$\frac{d}{d\psi_0} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \Pi \right) = -\varepsilon (F'(\psi_0) + W_0 \Phi'(\psi_0)) \quad (1.5)$$

Учитывая, что z -компонента завихренности в исследуемом потоке определяется как [3]

$$\Omega(\psi) = w(\psi) w'(\psi) - E'(\psi)$$

перепишем (1.5) в виде

$$\frac{d}{d\psi_0} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \Pi \right) = -\Omega(\psi_0) \quad (1.6)$$

$$\Omega(\psi_0) = \varepsilon (F'(\psi_0) + W_0 \Phi'(\psi_0))$$

Отсюда следует, что давление в рассматриваемом течении такое же, как в плоском завихренном потоке с вихрем $\Omega(\psi_0)$ в отсутствие продольной скорости w . Значение $\Omega(\psi_0)$ определяется профилем скоростей набегающего потока и сохраняет постоянное значение вдоль линий тока основного течения.

Наконец, линеаризуя выражение

$$\frac{\partial(\Omega, \psi)}{\partial(x, y)} = 0 \quad (1.7)$$

связывающее z -компоненту завихренности с функцией тока, получим уравнение для нахождения первого приближения функции тока

$$\nabla^2 \psi_1 = -\varepsilon^{-1} \Omega(\psi_0) \quad (1.8)$$

Теперь можно следующим образом сформулировать краевую задачу: найти функцию $\psi_1(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1.8) и условиям

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow U_1(y), \quad \psi_1|_L = 0 \quad (1.9)$$

где L — контур цилиндра.

Для решения задачи (1.8)–(1.9) удобнее обезразмерить переменные, приняв за масштабы некоторый характерный линейный размер цилиндра и скорость U_0 однородной части набегающего потока; обозначения величин оставим прежними. Так что теперь

$$U(y) = 1 + \varepsilon U_1(y) \quad (1.10)$$

Рассмотрим произвольную точку $P(x, y)$ в плоскости течения. Пусть $y = y_*$ — уравнение той линии тока безвихревой части плоского течения вдали от тела, которая проходит через точку $P(x, y)$, т. е.

$$\psi_0(x, y) = \psi_0(-\infty, y_*) = y_*$$

Тогда z -компонента завихренности

$$\Omega(\psi_0) = -\varepsilon U_1'(y_*) \quad (1.11)$$

Эта составляющая вектора-вихря переносится вдоль линии тока основного (потенциального) течения из невозмущенной области в точку P .

В силу (1.8) и (1.11) функция $\psi_1(x, y)$ должна удовлетворять основному в данной работе уравнению

$$\nabla^2 \psi_1 = U_1'(y_*) \quad (1.12)$$

Для определения давления воспользуемся соотношениями (1.4), (1.6) и (1.11). С точностью до ε находим

$$E(\psi_0) - U(\psi_0) - W_0 w(\psi_0) = C$$

где C — постоянная интегрирования.

В рассматриваемом приближении

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \Pi = U(\psi_0) + \text{const}$$

Трехчлен Бернулли сохраняет постоянное значение не во всем потоке (как это имеет место в потенциальных и винтовых течениях), а только вдоль линий тока безвихревой части течения. Продольная компонента скорости, как уже отмечалось выше, влияющая на величину давления не оказывает.

Для функции $\Phi(\psi_0)$, характеризующей продольную компоненту скорости возмущенного течения и не зависящей от ψ_1 , имеет место очевидное соотношение

$$\Phi(\psi_0) = W_1(\psi_0(x, y)) \quad (1.13)$$

Таким образом, для полного описания движения жидкости достаточно найти функцию $\psi_1(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона (1.12) и крайевым условиям (1.9). Следовательно, в рассматриваемом приближении пространственную задачу об обтекании цилиндра удается свести к плоской, не зависящей от продольной компоненты скорости w .

2. Метод решения. Предположим, что функция $U_1(y)$ с периодом $2l$ до-

пускает разложение в ряд Фурье

$$U_1(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n y}, \quad k_n = \frac{\pi n}{l} \quad (2.1)$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l U_1(y) e^{-ik_n y} dy$$

Тогда уравнение (1.12) принимает вид

$$\nabla^2 \psi_1 = i \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n k_n e^{ik_n y}.$$

Будем искать его решение в виде

$$\psi_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \Psi_1(x, y; k_n) \quad (2.2)$$

где функция Ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Psi_1 = ik_n e^{ik_n y}. \quad (2.3)$$

Следовательно, функция Ψ_1 соответствует значению

$$U_1(y) = u_1(y; k_n) = \exp(ik_n y)$$

Если Ψ_1 удовлетворяет еще краевым условиям

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow u_1(y; k_n), \quad \Psi_1|_L = 0 \quad (2.4)$$

где L — контур цилиндра, то функция (2.2) является решением задачи.

3. Слабовихреный поток вокруг кругового цилиндра. *Определение функции Ψ_1 .* Поместим начало полярной системы координат r, θ в центр поперечного сечения цилиндра единичного радиуса. Функция тока однородного потока, обтекающего этот цилиндр, как известно, имеет вид

$$\psi_0(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$$

Так как в «начале» линии тока, проходящей через точку (r, θ) , $\psi_0|_{x \rightarrow -\infty} = y_*$, то ее уравнение можно записать следующим образом:

$$y_* = \psi_0(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$$

Следовательно, в произвольном слабовихренном потоке функция ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi_1 = U_1'(y_*) = \left. \frac{dU_1}{dy} \right|_{y=(r-1/r)\sin\theta} \quad (3.1)$$

Для определения $\Psi_1(r, \theta; k_n)$ положим

$$U_1(y) = u_1(y; k_n) = \exp(ik_n y)$$

Согласно (3.1)

$$\nabla^2 \Psi_1 = ik_n \exp \left[ik_n \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right] \quad (3.2)$$

Введем вспомогательную функцию

$$\chi(r, \theta; k_n) = k_n^{-1} \exp(ik_n r \sin \theta) - i\Psi_1(r, \theta; k_n) \quad (3.3)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \chi = k_n \left\{ \exp \left[ik_n \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right] - \exp(ik_n r \sin \theta) \right\} \quad (3.4)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

$$\chi(1, \theta; k_n) = k_n^{-1} \exp(ik_n \sin \theta) \quad (3.6)$$

Решение краевой задачи (3.4)–(3.6) будем искать в виде разложения χ в ряд Фурье по переменной θ

$$\chi = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{m \geq 1} a_{2m}(r) \cos 2m\theta + a_{2m-1}(r) \sin(2m-1)\theta \quad (3.7)$$

Такой вид решения подсказан правой частью (3.4) и краевым условием (3.6), если учесть, что

$$\exp(iz \sin \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{m \geq 1} J_{2m}(z) \cos 2m\theta + iJ_{2m-1}(z) \sin(2m-1)\theta \quad (3.8)$$

где $J_\nu(z)$ – бesselовы функции первого рода порядка ν .

Подставив (3.7) в (3.4), с учетом (3.8) получим

$$a_\nu'' + \frac{1}{r} a_\nu' - \frac{\nu^2}{r^2} a_\nu = 2k_n \left[J_\nu \left(k_n \left(r - \frac{1}{r} \right) \right) - J_\nu(k_n r) \right]$$

$$a_\nu \equiv a_{2m} \quad (\nu = 2m, m = 0, 1, 2, \dots); \quad a_\nu = -i a_{2m-1} \quad (\nu = 2m-1, \dots, m = 1, 2, \dots)$$

Подстановка (3.7) в условие (3.6) приводит к краевым условиям для a_ν :

$$a_\nu(1) = 2k_n^{-1} J_\nu(k_n) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Методом вариации произвольных постоянных находим

$$a_0 = \alpha_0(r) \ln r + \beta_0(r)$$

$$a_\nu = \alpha_\nu(r) r^\nu + \beta_\nu(r) r^{-\nu} \quad (\nu \in N)$$

$$\alpha_0(r) = 2k_n \int_1^r \rho \left[J_0 \left(k_n \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right) - J_0(k_n \rho) \right] d\rho + \alpha_0(1)$$

$$\beta_0(r) = -2k_n \int_1^r \rho \ln \rho \left[J_0 \left(k_n \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right) - J_0(k_n \rho) \right] d\rho + \beta_0(1)$$

$$\alpha_\nu(r) = \nu^{-1} k_n \int_1^r \rho^{1-\nu} \left[J_\nu \left(k_n \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right) - J_\nu(k_n \rho) \right] d\rho + \alpha_\nu(1) \quad (\nu \in N)$$

$$\beta_\nu(r) = (-1)^\nu \alpha_{-\nu}(r)$$

Выражение (3.7) можно записать теперь в виде

$$\chi = \frac{1}{2} (\alpha_0(r) \ln r + \beta_0(r)) + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{2m}(r) r^{2m} + \alpha_{-2m}(r) r^{-2m}) \cos 2m\theta +$$

$$+i(\alpha_{2m-1}(r)r^{2m-1}-\alpha_{-(2m-1)}(r)r^{-(2m-1)})\sin(2m-1)\theta$$

Согласно гипотезе Тзяна [2], внесение в поток твердого тела не приводит к изменению циркуляции вокруг его контура. Поэтому следует положить $\alpha_0(1)=0$. В силу условий на границе ($r=1$)

$$\begin{aligned}\beta_0(1) &= 2k_n^{-1}J_0(k_n) \\ \alpha_\nu(1) + (-1)^\nu \alpha_{-\nu}(1) &= 2k_n^{-1}J_\nu(k_n)\end{aligned}$$

Условие на бесконечности требует, чтобы

$$\alpha_\nu(\infty) = 0 \quad (\nu \in N)$$

Это влечет за собой

$$A_\nu(k_n) + \alpha_\nu(1) = 0$$

$$A_\nu(k_n) = \nu^{-1}k_n \int_1^\infty \rho^{1-\nu} \left[J_\nu \left(k_n \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \right) - J_\nu(k_n \rho) \right] d\rho$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha_\nu(1) &= -A_\nu(k_n) \\ \alpha_{-\nu}(1) &= (-1)^\nu (2k_n^{-1}J_\nu(k_n) + A_\nu(k_n))\end{aligned}$$

Учитывая, что [4]

$$A_\nu = \nu^{-1}(k_n I_{\nu-1}(k_n) K_1(k_n) - J_{\nu-1}(k_n))$$

найдем

$$\begin{aligned}\alpha_\nu(1) &= \nu^{-1}(J_{\nu-1}(k_n) - k_n I_{\nu-1}(k_n) K_1(k_n)) \\ \alpha_{-\nu}(1) &= (-1)^\nu \nu^{-1}(J_{\nu+1}(k_n) + k_n I_{\nu-1}(k_n) K_1(k_n))\end{aligned}$$

Здесь $I_{\nu-1}(k_n)$ — модифицированная бесселева функция первого рода порядка $\nu-1$, а $K_1(k_n)$ — второго рода первого порядка.

Компоненты скорости течения вокруг цилиндра единичного радиуса

$$V_r = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta + \varepsilon \frac{\partial \Psi_1}{r \partial \theta} + \dots, \quad V_\theta = -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \theta - \varepsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \dots$$

$$\Psi_1(r, \theta; k_n) = i(\chi(r, \theta; k_n) - k_n^{-1} \exp(ik_n r \sin \theta))$$

Приведем окончательное выражение для скорости на поверхности цилиндра

$$\begin{aligned}V_\theta|_{r=1} &= -2 \sin \theta - \varepsilon \left[iJ_1(k_n) + 2k_n K_1(k_n) \sum_{m \geq 0} I_{2m}(k_n) \sin(2m+1)\theta - \right. \\ &\quad \left. - iI_{2m+1}(k_n) \cos(2m+2)\theta \right] + o(\varepsilon)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Для дальнейшего полезно, отделив действительную и мнимую части последнего выражения, записать распределения скоростей на поверхности цилиндра в случаях $u_1(y; k_n) = \cos k_n y$ и $u_1(y; k_n) = \sin k_n y$. Получим соответственно

$$V_\theta|_{r=1} = -2 \sin \theta - \varepsilon 2k_n K_1(k_n) \sum_{m \geq 0} I_{2m}(k_n) \sin(2m+1)\theta + o(\varepsilon) \quad (3.10)$$

$$V_\theta|_{r=1} = -2 \sin \theta - \varepsilon \left[J_1(k_n) - 2k_n K_1(k_n) \sum_{m \geq 0} I_{2m+1}(k_n) \cos(2m+2)\theta \right] + o(\varepsilon)$$

$$(3.11)$$

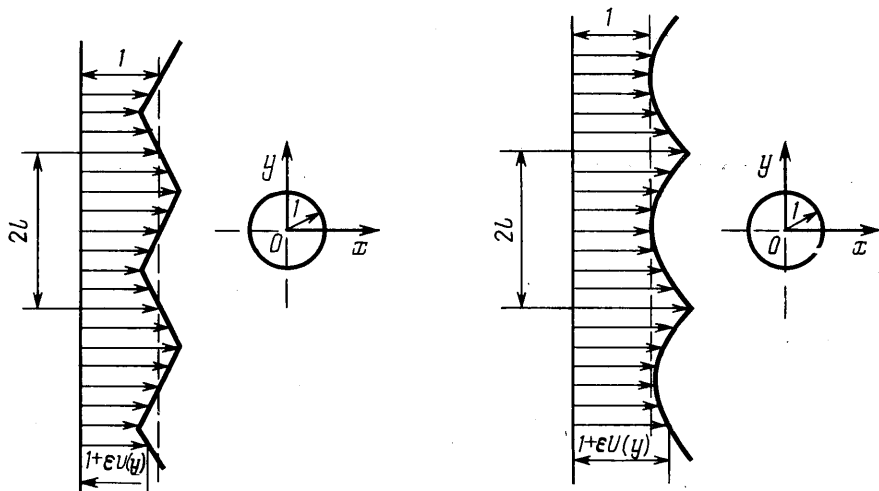
В следующем пункте эти результаты использованы для расчета течения в случаях, когда профили скоростей далеко вверх по потоку имеют вид, представленный на фиг. 2, а и б.

Пилообразный профиль скоростей. Профиль, изображенный на фиг. 2, а, опишем аналитически

$$U_1(y) = \frac{2y}{l} \quad \left(0 \leq y \leq \frac{1}{2}l\right); \quad U_1(y) = 2\left(1 - \frac{y}{l}\right) \quad \left(\frac{1}{2}l \leq y \leq l\right) \quad (3.12)$$

$$U_1(-y) = -U_1(y)$$

Так что наибольшая скорость вихревой части набегающего потока равна ε .



Фиг. 2

В силу асимметрии профиля скоростей $U_1(y)$ относительно оси $y=0$ функция (3.12) представима в виде

$$U_1(y) = \sum_{n \geq 1} c_{2n-1} \sin k_{2n-1} y; \quad c_{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2}$$

С помощью (2.2) и (3.11) найдем соответствующее распределение скоростей на поверхности цилиндра:

$$v_{\theta 1} |_{r=1} = \sum_{n \geq 1} c_{2n-1} V_{\theta 1}(\theta; k_{2n-1}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m \geq 1} a_{2m} \cos 2m\theta$$

$$V_{\theta 1} = - \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

$$a_0 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} J_1(k_{2n-1})$$

$$a_{2m} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} k_{2n-1} K_1(k_{2n-1}) I_{2m-1}(k_{2n-1})$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$ и используя асимптотику бesselевых функций при малых значениях аргумента, как и следовало ожидать, получим известное выражение для распределения скоростей на поверхности цилиндра в скошенном

потоке с вихрем $\Omega_1 = -2/l$

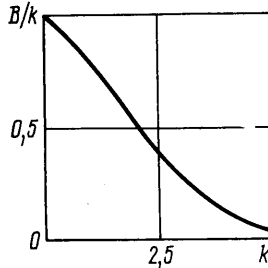
$$v_{\theta 1} = \Omega_1 \left(\frac{1}{2} - \cos 2\theta \right)$$

Подъемную силу, действующую на цилиндр в потоке (1.10), (3.12), легко определить, воспользовавшись формулой [5]:

$$P = \pi \rho \varepsilon (a_2 - a_0) = 16 \varepsilon \rho l^{-1} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} B(k_{2n-1}) + o(\varepsilon) \quad (3.13)$$

$$B(k_{2n-1}) = J_1(k_{2n-1}) k_{2n-1}^{-1} + I_1(k_{2n-1}) K_1(k_{2n-1})$$

Выражения $B(k_{2n-1}) > 0$ и монотонно стремятся к нулю с ростом n (фиг. 3) [2]. Следовательно, по признаку Лейбница ряд в (3.13) сходится. При замене его



Фиг. 3

суммы частичной суммой абсолютная погрешность, как известно, не превышает абсолютной величины первого из отброшенных членов. Так, удерживая лишь первый член ряда, получаем

$$\frac{P}{16 \varepsilon \rho l^{-1}} = B(k_1)$$

При этом относительная погрешность не будет превышать величины $\delta = 1/3 B(k_3)/B(k_1)$, т. е. одной трети отношения ординат тех точек графика (фиг. 3), отношение абсцисс которых равно 3.

Полагая, к примеру, $l = \pi$, с точностью до ε имеем

$$\frac{P}{16 \varepsilon \rho l^{-1}} = B(1) - \frac{1}{3} B(3) + \frac{1}{5} B(5) - \dots \approx 0,7803 - 0,0906 + 0,0049 - \dots$$

откуда видно, что ряд довольно быстро сходится; если при удержании только лишь первого члена относительная погрешность не превышает 11,6%, то с учетом второго члена она составляет уже менее 0,7%.

Когда $l \rightarrow \infty$, выражение (3.13) переходит в соотношение

$$P = 4 \pi \rho \varepsilon l^{-1}$$

что соответствует интуитивно ожидаемому результату для подъемной силы кругового цилиндра в потоке с вихрем $\Omega = -2\varepsilon/l^1$.

Профиль типа следа за решеткой цилиндров. Обратимся теперь к профилю скоростей с аналитическим представлением (фиг. 2, б)

$$U_1(y) = (y/l)^2, \quad |y| \leq l$$

Так как профиль симметричен относительно оси $y=0$, ряд Фурье для функции $U_1(y)$ имеет вид

$$U_1(y) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n \geq 1}^{\infty} c_n \cos k_n y$$

¹ В этом случае выражение для подъемной силы конечно и является точным в отличие от любого иного течения с непостоянным вихрем, где результат выражается в виде ряда по степеням ε .

$$c_0 = \frac{2}{3}, \quad c_n = (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

Используя (2.2) и (3.10), запишем распределение скоростей на контуре цилиндра

$$v_{\theta 1}|_{r=1} = \frac{1}{2} c_0 V_{\theta 1}(\theta) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} c_n V_{\theta 1}(\theta; k_n)$$

$$V_{\theta 1}(\theta) = \lim_{n \rightarrow 0} V_{\theta 1}(\theta; k_n) = -2 \sin \theta \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) представляет собой ряд Фурье по синусам кратных дуг:

$$v_{\theta 1}|_{r=1} = a_1 \sin \theta + \sum_{m \geq 1}^{\infty} a_{2m+1} \sin(2m+1)\theta$$

$$a_1 = -\frac{2}{3} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} k_n I_0(k_n) K_1(k_n)$$

$$a_{2m+1} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} k_n I_{2m}(k_n) K_1(k_n)$$

При $l \rightarrow \infty$, как это можно было предвидеть, $v_{\theta 1}|_{r=1} = 0$ и распределение скоростей на поверхности цилиндра приближается к распределению в однородном потоке.

При наличии продольной компоненты скорости, определяемой вторым из соотношений (1.1), в случае возмущения потока круговым цилиндром в соответствии с (1.4) и (1.13) получим

$$w = W_0 + \varepsilon W_1 \left(\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right)$$

т. е. в рассматриваемом приближении эта компонента не зависит от конкретного вида профиля скоростей поперечного течения, равно как и на обтекание цилиндра поперечным потоком не влияет наличие продольной компоненты скорости. В приближениях более высокого порядка эти течения, разумеется, интерферируют.

Автор благодарен Г. Ю. Степанову за указание возможных направлений дальнейшего развития проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shankar P. N. A note on a class of exact solutions in inviscid rotational flows // ZAMP. 1985. V. 36. № 1. P. 172–173.
2. Shankar P. N., Sinha U. N. Weakly sheared, two-dimensional inviscid flows past bodies // J. méс. 1980. V. 19. № 1. P. 125–148.
3. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. Ярмицкий А. Г. Формула Жуковского для подъемной силы цилиндра в произвольном установившемся потоке идеальной несжимаемости жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 6–18.

Мариуполь

Поступила в редакцию
30.VI.1988