

УДК 532.529.5+532.781

© 1989

ВОЛКОВ В. А., МУСЛАЕВ В. А., ПИРУМОВ У. Г.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ЧАСТИЦ В ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКАХ

Двухфазные течения при наличии кристаллизации частиц дискретной фазы рассматривались в [1-4]. В [1, 2] применялась модель равновесной кристаллизации, а в [3] — модель неравновесной кристаллизации. Для выявления влияния различных физических факторов на процесс кристаллизации в [4] наряду с моделями равновесной и неравновесной кристаллизации использовалась также модель мгновенной кристаллизации. Основное внимание в указанных работах уделялось влиянию кристаллизации на интегральные параметры двухфазных потоков, в то время как процесс кристаллизации отдельных частиц оставался недостаточно изученным. В частности, оставался открытым вопрос о том, при каких условиях справедлива модель равновесной кристаллизации и является ли она предельным случаем модели неравновесной кристаллизации.

В данной работе представлены результаты аналитического и численного исследования режимов кристаллизации отдельных частиц и показано, что модель равновесной кристаллизации [1, 2] является предельным случаем модели неравновесной кристаллизации [3]. Описан приближенный метод решения задачи о неравномерном прогреве частиц, который необходимо учитывать при определении момента начала кристаллизации частиц.

1. Рассмотрим задачу о неравномерном прогреве частиц в двухфазных потоках. Система уравнений, описывающая одномерное стационарное течение полидисперсной двухфазной смеси, имеет вид [5]

$$\rho V_g F = (1 - \alpha) Q \quad (1.1)$$

$$V_g \frac{dV_g}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{1 - \alpha} V_g \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{dV_i}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

$$V_i \frac{dV_i}{dx} = \varphi_{V_i} (V_g - V_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

$$(1 - \alpha) \left(c_p T_g + \frac{1}{2} V_g^2 \right) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(c_s \langle T_i \rangle + \frac{1}{2} V_i^2 \right) = H_0 \quad (1.4)$$

$$\frac{d\langle T_i \rangle}{dx} = \varphi_{T_i} (T_g - T_{iw}), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.5)$$

$$p = \frac{\rho R^\circ T_g}{\mu_g} \quad (1.6)$$

где N — число фракций конденсата; x — продольная координата по длине канала; ρ , p , V_g , T_g , μ_g — плотность, давление, скорость, температура и молекулярный вес газа соответственно; α — расходно-массовая доля конденсата, Q — расход смеси; F — площадь поперечного сечения канала, α_i , V_i , $\langle T_i \rangle$ — расходно-массовая доля, скорость и средняя по объему температура частиц i -й фракции конденсата; T_{iw} — средняя температура их поверхно-

сти, R° — универсальная газовая постоянная; c_p, c_s — удельные теплоемкости газа и конденсата; H_0 — полная энтальпия смеси; $\varphi_{v_i}, \varphi_{T_i}$ — коэффициенты, аппроксимирующие экспериментальные данные по сопротивлению и теплообмену частиц в широком диапазоне режимов обтекания [1] и зависящие от параметров течения и теплофизических свойств газа и конденсата.

При выводе системы (1.1)–(1.6) приняты следующие допущения: вязкость и теплопроводность газа проявляются только при взаимодействии с частицами, давление создается только газовой фазой, коагуляция и дробление частиц отсутствуют, частицы имеют сферическую форму, плотность и теплоемкость материала частиц не зависят от температуры, объемом частиц можно пренебречь.

В зависимости от того, какая задача решается — прямая или обратная, вдоль оси задается распределение площади поперечного сечения $F=F(x)$ либо плотности газа $\rho=\rho(x)$.

Для замыкания системы уравнений (1.1)–(1.6) необходимо добавить N уравнений для определения величин T_{iw} . Считается обычно, что температура во всех точках внутри частицы одинакова и поэтому используются соотношения

$$T_{iw}=\langle T_i \rangle, \quad i=1, \dots, N \quad (1.7)$$

При более строгом подходе для нахождения T_{iw} требуется решать N нестационарных уравнений теплопроводности, записанных в сферических координатах и усредненных по угловым

$$V_i \frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{\lambda_s}{\rho_s c_s} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (1.8)$$

где $T_i(r)$ — температура, осредненная по сфере радиуса r ; λ_s, ρ_s — коэффициент теплопроводности и плотность материала частиц.

Граничные условия для (1.8) имеют вид

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial T_i}{\partial r} \right)_w = \frac{\varphi_{T_i} \rho_s c_s d_i V_i}{6\lambda_s} (T_g - T_{iw}) \quad (1.9)$$

Таким образом, для учета неравномерности прогрева частиц вместо (1.5) к уравнениям (1.1), (1.4), (1.6) необходимо добавить N уравнений (1.8) с граничными условиями (1.9).

Рассмотрим два приближенных подхода к решению поставленной задачи.

Введем безразмерные переменные $\xi_i=2r/d_i$ и $y_i=T_i/\langle T_i \rangle$, где d_i — диаметр частиц. Тогда, по определению средней температуры, имеем

$$\int_0^1 y_i \xi_i^2 d\xi_i = \frac{1}{3} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.8) при такой замене переменных преобразуется к виду

$$\frac{\Gamma_i}{\varphi_{T_i}} \frac{\partial y_i}{\partial x} + k_i y_i - \frac{1}{\xi_i^2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\xi_i^2 \frac{\partial y_i}{\partial \xi_i} \right) = 0 \quad (1.11)$$

$$\Gamma_i = \frac{\rho_s c_s d_i^2 \varphi_{T_i} V_i}{4\lambda_s}, \quad k_i = \Gamma_i \left(\frac{T_g}{\langle T_i \rangle} - y_i(1) \right) \quad (1.12)$$

Из выражений для φ_{T_i} , приведенных в [1], следует, что при прочих равных условиях $\varphi_{T_i} \sim d_i^{-2}$ и, следовательно, $\varphi_{T_i} \rightarrow \infty$ при $d_i \rightarrow 0$, в то время как величины Γ_i , согласно (1.12), остаются ограниченными. Поэтому в случае достаточно мелких частиц первым слагаемым в уравнении (1.11)

можно пренебречь по сравнению с двумя другими, в результате чего (1.11) приводится к виду

$$k_i y_i - \frac{1}{\xi_i^2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\xi_i^2 \frac{\partial y_i}{\partial \xi_i} \right) = 0 \quad (1.13)$$

Решение уравнения (1.13), удовлетворяющее первому граничному условию (1.9) и нормированное согласно (1.10), имеет вид

$$y_i(\xi_i) = \frac{k_i \operatorname{sh} \xi_i \sqrt{k_i}}{3 \xi_i (\sqrt{k_i} \operatorname{ch} \sqrt{k_i} - \operatorname{sh} \sqrt{k_i})}, \quad k_i \geq 0 \quad (1.14)$$

$$y_i(\xi_i) = \frac{k_i \sin \sqrt{|k_i|}}{3 \xi_i (\sqrt{|k_i|} \cos \sqrt{|k_i|} - \sin \sqrt{|k_i|})}, \quad k_i \leq 0$$

Если во второе соотношение (1.12) подставить значение $y_i(1)$, полученное по формуле (1.14) при $\xi_i=1$, придем к трансцендентному уравнению относительно k_i

$$k_i = \frac{T_g}{\langle T_i \rangle} - \frac{k_i \operatorname{sh} \sqrt{k_i}}{3(\sqrt{k_i} \operatorname{ch} \sqrt{k_i} - \operatorname{sh} \sqrt{k_i})} \Gamma_i, \quad k_i \geq 0 \quad (1.15)$$

$$k_i = \frac{T_g}{\langle T_i \rangle} - \frac{k_i \sin \sqrt{|k_i|}}{3(\sqrt{|k_i|} \cos \sqrt{|k_i|} - \sin \sqrt{|k_i|})} \Gamma_i, \quad k_i \leq 0$$

Нетрудно показать, что при всех значениях Γ_i , T_g , $\langle T_i \rangle$, допустимых с физической точки зрения, уравнение (1.15) всегда имеет единственный корень. Подставив найденное значение k_i в (1.14) при заданных Γ_i , T_g , $\langle T_i \rangle$ и $\xi_i=1$, можно найти $y_i(1)$, а затем температуру поверхности T_{iw} по формуле

$$T_{iw} = \langle T_i \rangle y_i(1)$$

Соответствующий алгоритм нахождения T_{iw} по заданным значениям Γ_i , T_g , $\langle T_i \rangle$, очевидно, можно использовать совместно с любым методом численного решения системы дифференциальных и конечных уравнений (1.1)–(1.6).

Рассмотренный выше подход эквивалентен по существу учету первых двух членов в асимптотическом разложении задачи (1.8)–(1.9) по обратным степеням членов с $(\varphi_{T_i})^{-1}$ в нулевой и первой степени. Учитывая, что $k_i \sim \varphi_{T_i}^{-1}$, используя первые два члена разложения правой части (1.14), по степеням $\varphi_{T_i}^{-1}$ и оставаясь в рамках того же приближения, вместо (1.14) получим

$$y_i(\xi_i) = 1 + \frac{5\xi_i - 3}{30} k_i \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) во второе соотношение (1.12) и полагая $\xi_i=1$, получим линейное относительно k_i уравнение, решение которого записывается в явном виде. Подставляя его в (1.16) и полагая $\xi_i=1$, найдем $y_i(1)$, а затем и T_{iw}

$$T_{iw} = \frac{15\langle T_i \rangle + \Gamma_i T_g}{15 + \Gamma_i} \quad (1.17)$$

Уравнение (1.5) при подстановке в них (1.17) преобразуются к виду

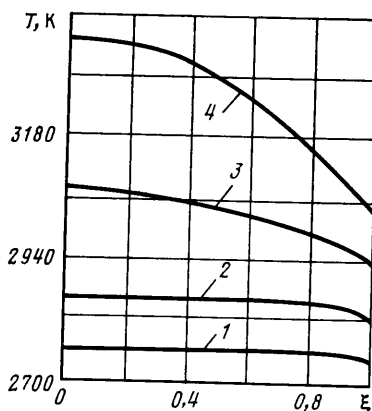
$$\frac{d\langle T_i \rangle}{dx} = \varphi_{T_i} \left(1 + \frac{\Gamma_i}{15} \right)^{-1} (T_g - \langle T_i \rangle), \quad i=1, \dots, N \quad (1.18)$$

Сравнивая (1.18) с аналогичными уравнением, которое получается из (1.5) при условии (1.7), заключаем, что эффект неравномерности прогре-

ва сводится в случае достаточно малых частиц к изменению их эффективного коэффициента теплообмена. Согласно (1.18), можно полагать $\Phi_{T_i}^{eff} = \Phi_{T_i} (1 + \Gamma_i/15)^{-1}$.

С целью проверки предлагаемых приближенных методов решения задачи о неравномерном прогреве частиц результаты расчетов, полученные с их помощью, сравнивались с результатами численного решения нестационарных уравнений теплопроводности (1.8). Для численного решения задачи (1.8), (1.9) использовались неявная разностная схема Кранка – Николсона второго порядка по обоим переменным и равномерная разностная сетка, содержащая 21 узел. Сравнение проводилось для сопел с диаметрами критических сечений $d^* = 50-400$ мм при давлении и температуре в камере сгорания соответственно 30–50 атм и 3000–4000 К. Рассматривались течения продуктов сгорания традиционных топлив [6], содержащих частицы Al_2O_3 размером до 20 мкм. Скорость и температура всех частиц на входе в сопло полагались равными скорости и температуре газа.

В результате показано, что квазистационарные профили температуры, описываемые уравнениями (1.14) и (1.16), устанавливаются за характерное время $\tau \sim (\Phi_{T_i} V_i)^{-1}$, причем их отличие друг от друга и от точного профиля в дальнейшем, как правило, не превышает 2% от полного перепада температуры внутри частицы, а соответствующие различия приближенных и точных значений среднемассовых температур $\langle T_i \rangle$ на порядок меньше. Характерные распределения температуры внутри частиц различных размеров в области критического сечения сопла представлены на фиг. 1 (кривая 1, соответствует $d=1,3$ мкм; 2 – $d=3,2$ мкм; 3 – $d=8$ мкм; 4 – $d=20$ мкм). В данном масштабе приближенные профили температур (1.4) и (1.6) совпадают с «точным» решением. Сказанное выше подтверждает правомерность использования приближенных методов для учета неравномерности прогрева частиц.



Фиг. 1

Анализ результатов расчета показал также, что неравномерность прогрева частиц незначительно влияет на интегральные параметры двухфазного потока, в частности соответствующее изменение удельного импульса во всех случаях не превышает нескольких сотых долей процента. Однако неравномерность прогрева

необходимо учитывать при определении момента начала кристаллизации.

Максимальная неравномерность профилей температуры наблюдается в районе критического сечения сопла. Однако к моменту начала кристаллизации неравномерность значительно уменьшается и перепад температур внутри даже крупных частиц не превышает 20 К. Поэтому при построении приближенных моделей процесса кристаллизации частиц конденсата в соплах можно, по-видимому, пренебречь неравномерностью прогрева.

2. Рассмотрим две математические модели процесса кристаллизации частиц конденсата в соплах, отличающиеся друг от друга различной степенью детализации физических эффектов, определяющих его протекание. Эти модели согласованы между собой в том смысле, что более общая переходит в менее общую при определенных допущениях относительно характера протекания физических процессов.

В обеих моделях используются те же предположения, что и в разд. 1, и, кроме того, делаются следующие: давление внутри частицы в процессе кристаллизации равняется давлению в газе; температура внутри частицы и на поверхности постоянна и равна средней температуре; граница раздела фаз представляет собой сферу, центр которой совпадает с центром частицы и которая в ходе кристаллизации движется от поверхности к центру.

В рамках сделанных предположений в системе уравнений (1.1)–(1.6) вместо уравнений (1.4), (1.5) необходимо использовать следующие:

$$(1 - \alpha) \left(c_p T_g + \frac{1}{2} V_g^2 \right) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[c_s \langle T_i \rangle - (1 - \xi_i^3) L^0 + \frac{1}{2} V_i^2 \right] = H_0$$

(2.1)

$$\xi_{f_i} = \frac{2r_{f_i}}{d_i}$$

$$\frac{d\langle T_i \rangle}{dx} = \varphi_{T_i}(T_g - \langle T_i \rangle) - \frac{3L^\circ}{c_s} \xi_{f_i}^2 \frac{d\xi_{f_i}}{dx}, \quad i=1, \dots, N \quad (2.2)$$

Здесь r_{f_i} — сферическая координата границы раздела фаз внутри частицы i -й фракции; L° — удельная скрытая теплота кристаллизации.

До начала процесса кристаллизации частиц i -й фракции $\xi_{f_i} \equiv 1$, после окончания $\xi_{f_i} \equiv 0$, таким образом, до начала и после окончания процесса кристаллизации уравнение (2.2) совпадает с уравнением (1.5). Очевидно, что уравнения (1.4) и (1.1) также совпадают, если все $\xi_{f_i} \equiv 1$.

В процессе кристаллизации частиц i -й фракции координата фронта ξ_{f_i} изменяется от единицы до нуля. Поэтому для замыкания уравнений необходимо добавить еще N уравнений для определения ξ_{f_i} .

В первой модели (равновесной кристаллизации) предполагается, что в ходе процесса температура частицы остается равной температуре равновесного фазового перехода при соответствующем давлении

$$\langle T_i \rangle = T_{cr}^\circ \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$\xi_{f_i}^2 \frac{d\xi_{f_i}}{dx} = \frac{c_s}{3L^\circ} \left[\varphi_{T_i}(T_g - T_{cr}^\circ(p)) - \frac{dT_{cr}^\circ}{dp} \frac{dp}{dx} \right] \quad (2.4)$$

Легко показать, что вторым слагаемым в правой части (2.4) можно, как правило, пренебречь по сравнению с первым и, следовательно, темп кристаллизации в первой модели лимитируется в основном скоростью отвода в газовую фазу тепла, выделяющегося при кристаллизации.

Таким образом, расчет по модели равновесной кристаллизации сводится к численному интегрированию системы уравнений (1.1)–(1.3), (1.6); (2.1), (2.2), дополненной следующей системой соотношений:

$$\xi_{f_i} \equiv 1 \quad (\langle T_i \rangle > T_{cr}^\circ(p)) \quad (2.5)$$

$$\langle T_i \rangle = T_{cr}^\circ(p) \quad (0 < \xi_{f_i} < 1)$$

$$\xi_{f_i} \equiv 0, \quad (\langle T_i \rangle < T_{cr}^\circ(p))$$

При выполнении первого или третьего условий (2.6) уравнение (2.2) используется для нахождения температуры частиц, а при выполнении второго условия (2.5) оно в форме (2.4) используется при нахождении ξ_{f_i} .

Во второй модели (неравновесной кристаллизации), предложенной в [3], приближенно учитывается кинетика формирования и распространения фронта кристаллизации с помощью полуэмпирической формулы для скорости движения границы раздела фаз и специально подобранного коэффициента переохлаждения β , который учитывает наличие некоторого уровня переохлаждения, необходимого для завершения процесса формирования границы раздела фаз.

Таким образом, расчет по модели неравновесной кристаллизации сводится к численному интегрированию системы уравнений (1.1)–(1.3), (1.6), (2.1), дополненной следующей системой соотношений:

$$\xi_{f_i} \equiv 1 \quad (\langle T_i \rangle > \beta T_{cr}^\circ(p))$$

$$\frac{d\xi_{f_i}}{dx} = \frac{2A}{V_i d_i} \left| T_{cr}^\circ(p) - \langle T_i \rangle \right|^{n-1} (\langle T_i \rangle - T_{cr}^\circ(p)) \quad (0 < \xi_{f_i} < 1)$$

$$\xi_{fi} = 0, \quad (\xi_{fi} = 0, \langle T_i \rangle < T_{cr}^{\circ}(p)) \quad (2.6)$$

где A и n — параметры модели $i=1, \dots, N$.

Отличие от первой модели заключается в том, что, во-первых, для нахождения ξ_{fi} на участке кристаллизации частиц соответствующей фракции используется второе соотношение (2.6) вместо (2.4), во-вторых, момент начала кристаллизации определяется при $\beta < 1$ с учетом переохлаждения, необходимого для образования поверхности раздела фаз, что всегда приводит к задержке начала развитой кристаллизации.

Строгое аналитическое исследование поведения решений систем уравнений вида (2.2), (2.6), детали которой в данной статье не приводятся, показало, что неравновесная модель кристаллизации асимптотически переходит в равновесную при $A \rightarrow \infty$. В частности, установлено, что при условии

$$\Pi_i = \frac{6L^{\circ}A(T_{cr}^{\circ}(p) - T_g)^{n-1}}{c_s V_i d_i \varphi_{T_i}} \gg 1 \quad (2.7)$$

после завершения процесса формирования раздела фаз, что обеспечивается выполнением условия $\langle T_i \rangle = \beta T_{cr}^{\circ}(p)$, наступает стадия очень быстрой кристаллизации, которая сопровождается возрастанием температуры. При этом за время порядка $[\varphi_{T_i} V_i (1+n\Pi_i)]^{-1} \xi_{fi}$ изменяется от 1 до ξ_{fi}^e , а $\langle T_i \rangle$ — соответственно от βT_{cr}° до своего квазиравновесного значения $\langle T_i^e \rangle$.

Практически вся последующая кристаллизация протекает при температуре $\langle T_i^e \rangle$, а точнее, это имеет место до тех пор, пока произведение $\xi_{fi}^2 \Pi_i$ не станет величиной порядка единицы, после чего температура частицы начнет уменьшаться, постепенно приближаясь к кривой охлаждения полностью затвердевшей частицы.

Первые члены асимптотического разложения величин ξ_{fi}^e и $\langle T_i^e \rangle$ имеют следующий вид:

$$\xi_{fi}^e = \xi_{fi}^{(0)} + \epsilon_i \xi_{fi}^{(1)} + o(\epsilon_i), \quad \epsilon_i = \Pi_i^{-1/n} \quad (2.8)$$

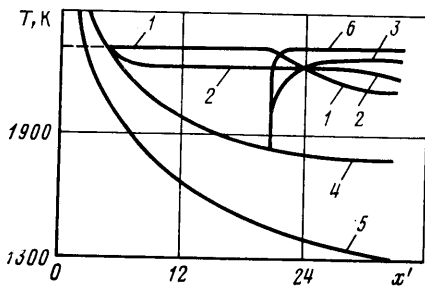
$$\langle T_i^e \rangle = T_{cr}^{\circ} - (T_{cr}^{\circ} - T_g) [\epsilon_i y_i^{(1)} + o(\epsilon_i)] \quad (2.9)$$

$$y_i^{(1)} = \left(1 + \frac{1}{\varphi_{T_i}} \frac{dT_{cr}^{\circ}}{(T_{cr}^{\circ} - T_g) dx} \right)^{1/n} (\xi_{fi}^{(0)})^{-2/n} \quad (2.10)$$

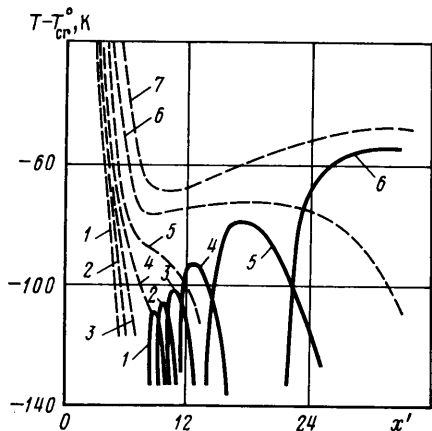
$$\xi_{fi}^{(0)} = \left[1 - (1-\beta) \frac{c_s T_{cr}^{\circ}}{L^{\circ}} \right]^{1/3}, \quad \xi_{fi}^{(1)} = \frac{c_s (T_{cr}^{\circ} - T_g)}{3L^{\circ} (\xi_{fi}^{(0)})^2} y_i^{(1)} \quad (2.11)$$

Подстановка формул (2.8) и (2.9) во второе уравнение (2.6) приводит к выражению для скорости кристаллизации $d\xi_{fi}/dx$, совпадающему с (2.4) с точностью до членов более высокого порядка малости, чем ϵ_i . Следовательно, выражение (2.4) является первым, не исчезающим при $\epsilon_i \rightarrow 0$ членом асимптотического разложения скорости кристаллизации. На основании этого заключаем, что модель равновесной кристаллизации, описываемая соотношениями (2.4), (2.5), является предельным случаем модели неравновесной кристаллизации при $\Pi_i \rightarrow \infty$, если $\beta = 1$, если же $\beta < 1$, то в предельном случае при $\Pi_i \rightarrow \infty$ неравновесная кристаллизация протекает следующим образом.

После завершения процесса формирования поверхности раздела фаз, что обеспечивается выполнением условия $\langle T_i \rangle = \beta T_{cr}^{\circ}$, происходит мгновенная кристаллизация доли вещества частицы, равной $1 - (\xi_{fi}^{(0)})^3$, причем выделившаяся при этом теплота не успевает отводиться в газовую фазу и почти вся целиком расходуется на нагрев частицы до температуры $\langle T_i \rangle =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$=T_{cr}^{\circ}$. После этого вся последующая кристаллизация протекает уже равновесно.

3. Рассматривались течения в соплах двухфазных смесей газа и частиц Al_2O_3 . Для численного моделирования возможной кристаллизации частиц Al_2O_3 использовались описанные выше математические модели. Некоторые типичные результаты соответствующих расчетов представлены на фиг. 2, 3. Все результаты получены при следующих значениях теплофизических параметров частиц Al_2O_3 и газа [6]: $\rho_s = 2610 \text{ кг/м}^3$; $c_s = 1600 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$; $T_{cr}^{\circ} = 2325 \text{ К}$; $L^{\circ} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ [7]; $\kappa = 1,32$; $c_p = 852,5 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$; $\alpha_s = 0,35$.

Значения коэффициентов вязкости и теплопроводности газа выбирались согласно рекомендациям [6]. Эмпирические константы A и n в законе движения поверхности раздела фаз (2.6) были выбраны согласно [3]: $A = 0,75 \cdot 10^{-6}$, $n = 1,8$.

На фиг. 2 приведены графики изменения температуры частиц по длине сопла, полученные с помощью различных моделей кристаллизации: 1 — соответствует модели равновесной кристаллизации, 2 — неравновесной с $\beta = 1$; 3 — неравновесной с $\beta = 0,8$. Для сравнения здесь же приведены графики температуры частиц и газа в случае отсутствия кристаллизации (кривые 4, 5 соответственно). На графике $x' = 2x/d_n$.

Для иллюстрации асимптотического (при $A \rightarrow \infty$) поведения температуры частиц здесь же приведена кривая 6, которая отличается от кривой 3 в 10^3 раз искусственно завышенным значением константы A . Следует отметить хорошее совпадение численных результатов с асимптотикой (2.8), (2.9).

Фигура 3 иллюстрирует влияние размеров частиц на характер изменения их температуры по длине сопла в рамках модели неравновесной кристаллизации. Сплошные кривые соответствуют $\beta = 0,8$, штриховые — $\beta = 1$ (кривая 1 — $d = 1,0 \text{ мкм}$, 2 — $d = 1,38$, 3 — $d = 1,9$; 4 — $d = 2,74$, 5 — $d = 4,0$; 6 — $d = 6,3$; 7 — $d = 8,9 \text{ мкм}$).

Наличие максимума на графике температуры частиц в тех случаях, когда кристаллизация начинается после достижения достаточно больших переохлаждений ($\beta = 0,8$), обусловлено следующими обстоятельствами. На начальной стадии процесса скорость выделения тепла за счет кристаллизации может превышать скорость отвода тепла во внешнюю среду, поэтому температура частиц увеличивается. На заключительной стадии процесса имеет место противоположная ситуация, поскольку, согласно (2.2), скорость выделения тепла за счет кристаллизации стремится к нулю, если $\xi_j \rightarrow 0$. Таким образом, максимумы сплошных кривых на фиг. 2 отражают характерное свойство используемой модели неравновесной кристаллизации, которое проявляется тем сильнее, чем больше размер частиц и чем больше начальное переохлаждение.

В целом это подтверждает вывод, непосредственно следующий из асимптотики (2.8)–(2.11): более крупные частицы кристаллизуются с меньшими отклонениями от фазового равновесия по сравнению с мелкими, причем этот эффект имеет место как при $\beta = 1$, так и при $\beta = 0,8$. На фиг. 2, 3 видна довольно сильная зависимость результатов от значений β . В частности, выбор $\beta = 0,8$ приводит, во-первых, к существенной задержке начала процесса кристаллизации по сравнению со случаем $\beta = 1$, а во-вторых, к существенно различному характеру протекания процесса на его начальной стадии.

Однако если результаты расчетов при $\beta = 1$ и $0,8$ нанести на фазовую плоскость параметров $\langle T_i \rangle$, ξ_{fi} , то обнаруживается следующая интересная закономерность в поведении соответствующих фазовых траекторий: сначала они быстро сближаются

по мере уменьшения ξ_{fi} , где-то при $\xi_{fi}=0,7-0,8$ пересекаются и затем начинают медленно расходиться, так что в конце процесса кристаллизации (при $\xi_{fi}=0$) это расхождение не превышает 20–30%. Этот факт имеет место несмотря на то, что почти совпадающие участки фазовых траекторий описывают кристаллизацию, происходящую в сечениях сопла, значительно удаленных друг от друга, а следовательно, и при существенно отличных условиях теплообмена с газовой фазой. Объяснить это можно тем, что асимптотика (2.8)–(2.11), по-видимому, довольно хорошо описывает кристаллизацию частиц Al_2O_3 в соплах, хотя условие ее применимости (2.7), строго говоря, уже не выполняется.

Из сказанного выше следует, что запаздывание процесса образования фронта кристаллизации является главным фактором, лимитирующим кристаллизацию частиц окиси алюминия в соплах. Это подтверждают также результаты расчетов [4]. Обычно предполагается, что соответствующее время запаздывания приблизительно равно промежутку времени, в течение которого частицы достигают некоторого уровня переохлаждения, необходимого для образования фронта кристаллизации [3, 4]. Поскольку указанный фактор оказывает наиболее сильное влияние на потерю удельного импульса [4], то вопрос о реальной кинетике образования твердой корки на поверхности жидких частиц требует более детального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
2. *Старков В. К., Стернин Л. Е., Тишин А. П., Худяков В. А.* О некоторых особенностях двухфазных течений в соплах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 50–57.
3. *Хендерсон Р.* Влияние кинетики процесса кристаллизации на энергетические характеристики ракетного двигателя // Ракетотехника и космонавтика. 1977. № 4. С. 183–185.
4. *Волков В. А., Маслов Б. Н., Муслаев А. В., Пирумов У. Г.* Зависимость потерь удельного импульса сопла Лавала от характера протекания кристаллизации частиц конденсата // Течение разреженного газа с неравновесными физико-химическими процессами: Тр. VIII Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов. М.: МАИ, 1987. С. 15–20.
5. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Течения газа в соплах. М.: Изд-во МГУ, 1978. 351 с.
6. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания: Справочник/ Под ред. Глушко В. П. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 10. 396 с.
7. *Маурац М. А., Мигин Б. С.* Жидкие тугоплавкие окислы. М.: Металлургия, 1979. 287 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.1986