

УДК 532.529.5:532.135

© 1989

БАБКИН В. А.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРГИРОВАННОЙ ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ НЕМАЛОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Под волокнистой суспензией обычно понимается двухфазная среда, одну фазу которой составляет несжимаемая жидкость, а другую — взвешенные в ней волокна [1, 2]. В покоящейся суспензии при концентрациях c , больших концентрации седиментации c_s (для волокон, применяемых в целлюлозно-бумажной промышленности массовая концентрация c_s порядка 0,5% [3]), волокна, взаимодействуя между собой, образуют структуру (так называемую сеть волокон) которая обладает свойствами твердого тела — упругостью и прочностью [1–3]. В целом волокнистая суспензия представляет собой насыщенную пористую среду с упругим скелетом. В таком состоянии ее называют структурированной [2].

При достаточной внешней нагрузке сеть волокон разрушается, и по своим механическим свойствам суспензия становится аналогична жидкости, вообще говоря, неньютоновской [1, 2]. Такая суспензия называется диспергированной [2]. Суспензии, концентрация которых меньше концентрации седиментации, очевидно, всегда диспергированные. Как и для любой жидкости, для диспергированной суспензии можно выделить ламинарный, турбулентный и переходный режимы течения.

Определяющие уравнения разбавленных суспензий удлиненных жестких частиц (волокон) при ламинарном течении получены в [4–6]. Суспензия жестких волокон, между которыми нет непосредственного взаимодействия, может рассматриваться просто как однородная трансверсально-изотропная жидкость [7]. На практике, например в целлюлозно-бумажной промышленности, как правило, используются суспензии с концентрациями, большими концентрации седиментации c_s . Типичны ситуации, когда, во-первых, суспензия в одной части области течения находится в диспергированном состоянии, а в другой — в структурированном (переходное течение) и, во-вторых, диспергированная суспензия не может рассматриваться как разбавленная вследствие непосредственного взаимодействия волокон друг с другом [1, 2]. В этом случае непосредственное применение моделей [4–6] неоправданно, и требуется либо их изменение, либо построение новых моделей.

В [8] дан пример решения задачи о переходном течении волокнистой суспензии в прямой круглой трубе на базе видоизмененной модели Эриксона — Лесли [9, 10] ориентированной жидкости. Предложенная модель, имея сходство с моделями [4–6], все же заметно отличается от них. Хорошее совпадение решения с экспериментальными результатами послужило стимулом для того, чтобы в настоящей статье разработать модель в общем виде. В качестве примера решена задача о переходном течении Куэтта между соосными цилиндрами. Решение сравнивается с экспериментальными результатами [2].

1. Параметры. Уравнения. Пусть диспергированная волокнистая суспензия находится в состоянии ламинарного течения. Запишем уравнения движения и состояния суспензии, рассматривая ее как совокупность двух взаимопроникающих континуумов: континуума жидкой фазы и континуума волокон [11]. Величины, относящиеся к жидкой фазе и волокнам, будут отмечаться соответственно верхними индексами (1), (2). Система координат x^1, x^2, x^3 произвольная.

Если $\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)}$ — истинные плотности жидкой фазы и насыщенных жидкостью волокон, $m^{(\alpha)}$ — объемная доля фазы в суспензии, то эффективные плотности континуумов определяются формулами

$$\rho^{(\alpha)} = m^{(\alpha)} \rho_0^{(\alpha)}, \quad m^{(1)} + m^{(2)} = 1, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

Пусть $t_{ij}^{(\alpha)}$ — осредненные по объему напряжения в континуумах. Эффективные напряжения $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ определим формулами

$$t_{ij}^{(\alpha)} = -m^{(\alpha)} p g_{ij} + \sigma_{ij}^{(\alpha)}, \quad p = -1/3 t_s^{s(1)} \quad (1.2)$$

где g_{ij} — координаты метрического тензора, p — давление в жидкой фазе. Здесь и далее по одинаковым разновысоким индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Уравнения неразрывности и импульсов фаз имеют вид

$$\frac{\partial \rho^{(\alpha)}}{\partial t} + \nabla_s \rho^{(\alpha)} v^s(\alpha) = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho^{(\alpha)} \frac{d^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)}}{dt} = -m^{(\alpha)} \nabla_i p + \nabla_s \sigma_i^{s(\alpha)} + \rho^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)} + R_i^{(\alpha)} \quad (1.4)$$

$$\frac{d^{(\alpha)}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^s(\alpha) \nabla_s$$

где $v^{(\alpha)}$ — скорость в точке континуума, $f^{(\alpha)}$ — плотность массовых сил, $R^{(\alpha)}$ — приходящаяся на единицу объема сила, действующая со стороны одной фазы на другую.

Ограничимся изотермическими процессами и по этой причине опустим уравнения энергии.

Систему уравнений (1.3), (1.4) необходимо дополнить уравнениями состояния. В отличие от структурированного состояния для диспергированной суспензии характерно отсутствие прочной структуры. Волокна движутся друг относительно друга, взаимодействуя между собой и окружающей жидкой фазой. В потоке с поперечным градиентом жидкая фаза оказывает ориентирующее воздействие на волокна [2]. В свою очередь ориентированные волокна определяют течение жидкой фазы вблизи себя. Таким образом, и континуум волокон, и континуум жидкой фазы представляют собой анизотропные среды, в каждой точке которых свойства зависят от преимущественной ориентации волокон.

К настоящему времени для описания текучих анизотропных сред предложено несколько моделей разной степени сложности [12]. Одной из самых простых является модель ориентированной жидкости Эриксона — Лесли. Возьмем ее в качестве основы для построения модели диспергированной суспензии.

Кинематическими параметрами суспензии будем считать скорости континуумов $v^{(i)}$ в точке, которые вообще говоря, различны, а также общий для континуумов единичный вектор — ориентир \mathbf{n} .

Континуум жидкой фазы будем рассматривать как вязкую трансверсально-изотропную жидкость с вектором анизотропии \mathbf{n} , вязкие эффективные напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ в которой определяются уравнениями

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \mu_1 n^s n^t e_{st}^{(1)} n_i n_j + \mu_2 e_{ij}^{(1)} + \mu_3 (n_i n^s e_{sj}^{(1)} + n_j n^s e_{si}^{(1)}) \quad (1.5)$$

$$2e_{ij}^{(1)} = \nabla_i v_j^{(1)} + \nabla_j v_i^{(1)}$$

где n_i, n^j ($i, j=1, 2, 3$) — координаты вектора \mathbf{n} ; μ_1, μ_2, μ_3 — константы, зависящие от сорта волокон и концентрации.

Уравнения (1.5), а не более поздние его обобщения [6, 10] обеспечивают наблюдаемый в экспериментах логарифмический профиль скоростей диспергированной суспензии при переходном течении в трубе [8].

Материальными носителями ориентации в суспензии являются волокна, поэтому уравнения, описывающие изменение вектора-ориентира \mathbf{n} , будем рассматривать как уравнения ориентированного континуума волокон.

В качестве таковых примем уравнения модели Эриксона — Лесли [9, 10]

$$I \frac{d^{(2)}}{dt} \left(\frac{d^{(2)} n_i}{dt} \right) = \nabla_s \mu_i^s + g_i + G_i \quad (1.6)$$

где I — постоянная, характеризующая инерционные свойства среды при повороте вектора-ориентира; μ_{ij} — обобщенные напряжения, g_i , G_i — соответственно внутренние и внешние объемные силы, вызывающие изменение вектора-ориентира. Величины μ_{ij} , g_i задаются с помощью определяющих уравнений.

При формулировке определяющих уравнений континуума волокон учтем неоднородность полей плотности $\rho^{(2)}$ и вектора \mathbf{n} , а также взаимодействие волокон при их относительном перемещении. Считая, что неоднородность поля \mathbf{n} в ориентированных средах сказывается сходным образом, определяющие уравнения континуума волокон введем, следуя [9, 10]:

$$\sigma_{ij}^{(2)} = -p^{(2)} g_{ij} - \rho^{(2)} \frac{\partial F}{\partial (\nabla^j n^s)} \nabla_i n^s + \tau_{ij} \quad (1.7)$$

$$\mu_{ij} = \beta_j n_i + \rho^{(2)} \frac{\partial F}{\partial (\nabla^j n^i)}$$

$$g_i = \gamma n_i + \beta^s \nabla_s n_i - \rho^{(2)} \frac{\partial F}{\partial n^i}, \quad p^{(2)} = (\rho^{(2)})^2 \frac{\partial F}{\partial \rho^{(2)}}$$

$$2\rho^{(2)} F = 2\rho^{(2)} F_0(\rho^{(2)}) + k_{22} (\nabla^s n_i \nabla_s n^i - \nabla_i n^s \nabla_s n^i - n^s n^i \nabla_s n^r \nabla_r n_r)$$

где F — свободная энергия единицы массы; k_{22} — константа, зависящая от сорта волокон и концентрации суспензии; β^1 , β^2 , β^3 , γ — неопределенные функции модели Эриксона — Лесли, обеспечивающие непротиворечивость модели при условии $|\mathbf{n}| = 1$.

Свободная энергия F здесь определена с учетом условий, обеспечивающих логарифмический профиль скоростей при переходном течении в трубе [8]. При $\rho^{(2)} = \text{const}$ четвертое уравнение (1.7) теряет смысл и величина $p^{(2)}$ должна определяться при решении задачи.

По определению [10], напряжения τ_{ij} в первом уравнении (1.7) характеризуют взаимодействие волокон при их движении друг относительно друга. Принимая во внимание, что континуум волокон в диспергированной суспензии получается в результате разрушения сети волокон в структурированном состоянии, а относительное движение волокон ввиду их большой стесненности является главным образом относительным скольжением, τ_{ij} определим как напряжения при пластическом течении. Вообще говоря, условие пластического течения континуума волокон должно быть сформулировано с учетом анизотропии. Однако, считая, что наведенная анизотропия слабо влияет на скольжение волокон друг относительно друга, в качестве первого приближения можно принять условия идеально пластического течения, например классические условия Треска или Мизеса. Для среды с условиями текучести Мизеса напряжения τ_{ij} определяются формулами [13]

$$\tau_{ij} = \frac{\sqrt{2} \sigma_0 e_{ij}^{(2)}}{\sqrt{e_{st}^{(2)} e^{st(2)}}} \quad e_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j^{(2)} + \nabla_j v_i^{(2)}) \quad (1.8)$$

где σ_0 — предел текучести сети волокон при сдвиге.

Силы взаимодействия фаз $\mathbf{R}^{(\alpha)}$ определяются разностью скоростей $\mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(2)}$. Если разность скоростей невелика, то эти силы можно задать с помощью закона Дарси [11]

$$\mathbf{R}^{(1)} = -\mathbf{R}^{(2)} = k(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)})$$

где k — константа. В противном случае используются более сложные зависимости.

Из формул (1.5), (1.7) и (1.8) видно, что напряжения в континуумах определяются независимо. При некоторых условиях эти напряжения в одной и той же точке потока могут отличаться знаком. Такая ситуация наблюдается, например, при переходном течении суспензии в трубе, и тогда отмечается интересный эффект снижения сопротивления при течении суспензии по сравнению с сопротивлением жидкой фазы [8].

2. Течение Куэтта. Пусть в пространстве между бесконечными соосными цилиндрами (радиус внутреннего цилиндра R_1 , а внешнего — R_2) помещена волокнистая суспензия массовой концентрации $c > c_s$. Имея в виду сравнение с экспериментальными результатами [2], внутренний цилиндр будем считать неподвижным, внешний — вращающимся с постоянной угловой скоростью ω_2 . Пусть ω_2 такова, что суспензия находится в состоянии переходного течения. Найдем связь между скоростью ω_2 и касательными напряжениями на поверхности цилиндров.

Задачу будем решать в цилиндрической системе координат r, φ, x : ось x — по оси цилиндров, угол φ отсчитывается в сторону вращения внешнего цилиндра.

При переходном течении область, занимаемая суспензией, состоит из области, в которой волокна образуют сеть, и области, в которой сеть волокон разрушена. Поскольку наибольшие касательные напряжения возникают в области, прилегающей к внутреннему цилиндру, примем, что в области $R_1 < r < R_0$ суспензия находится в диспергированном состоянии, а $R_0 \leq r \leq R_2$ — это область с неразрушенной сетью волокон, причем $r = R_0$ — граница областей. Кроме того, будем считать, что область $R_0 \leq r \leq R_2$ вращается вместе с подвижным цилиндром с той же угловой скоростью ω_2 . В пользу этих предположений говорит анализ возможных стержневых течений Куэтта между соосными цилиндрами, приведенный в [14].

Для описания движения диспергированной суспензии в области $R_1 < r < R_0$ воспользуемся моделью разд. 1, сделав некоторые упрощающие предположения. Если пренебречь силами тяжести, то с учетом симметрии течения кинематические параметры можно искать в виде

$$v_r^{(\alpha)} = v_x^{(\alpha)} = 0, \quad v_\varphi^{(\alpha)} = v_\varphi^{(\alpha)}(r), \quad p = p(r) \quad (2.1)$$

$$n_r = \sin \theta(r), \quad n_\varphi = \cos \theta(r), \quad n_x = 0 \quad (2.2)$$

где θ — угол между вектором-ориентиром и линией тока, $\alpha = 1, 2$.

Подставляя формулы (2.1) в уравнения состояния (1.5), (1.7), (1.8), полагая при этом для удобства $v_\varphi^{(1)} = r\omega(r)$, где $\omega(r)$ — неизвестная функция, получим

$$\sigma_{rr}^{(1)} = (\mu_1 \sin^2 \theta + \mu_3) r \omega' \sin \theta \cos \theta, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = (\mu_1 \cos^2 \theta + \mu_3) r \omega' \sin \theta \cos \theta \quad (2.3)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(1)} = \sigma_{\varphi r}^{(1)} = (\mu_0 + \mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) r \omega'$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(2)} = \sigma_{\varphi x}^{(1)} = \sigma_{x\varphi}^{(1)} = \sigma_{xr}^{(1)} = \sigma_{rx}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{\varphi r}^{(2)} = \sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sigma_0 \operatorname{sgn} e_{\varphi r}^{(2)}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \sigma_{xx}^{(2)} = \sigma_{xr}^{(2)} = \sigma_{rx}^{(2)} = \sigma_{\varphi x}^{(2)} = \sigma_{x\varphi}^{(2)} = 0$$

$$\mu_{rr} - \beta_r \sin \theta = \beta_\varphi \cos \theta - \mu_{\varphi\varphi} = \Phi \sin \theta \cos \theta$$

$$\mu_{r\varphi} = \beta_\varphi \sin \theta - \Phi \sin^2 \theta, \quad \mu_{\varphi r} = \beta_r \cos \theta + \Phi \cos^2 \theta$$

$$\mu_{rx} = \beta_x \sin \theta, \quad \mu_{\varphi x} = \beta_x \cos \theta, \quad \mu_{xx} = \mu_{x\varphi} = \mu_{x r} = 0$$

$$g_r = \gamma \sin \theta + (\beta_r \cos \theta - \Phi) \theta' - \beta_\varphi (\cos \theta) / r, \quad g_\varphi = \gamma \cos \theta - \beta_r \theta' \sin \theta + (\beta_\varphi \sin \theta + \Phi) / r, \quad g_x = 0$$

$$\mu_0 = 1/2 (\mu_2 + \mu_3), \quad \Phi = k_{22} (\cos \theta / r - \theta' \sin \theta)$$

Положим, что оба континуума несжимаемы, т. е. $\rho^{(\alpha)} = \text{const}$. Тогда уравнения неразрывности скоростями (2.1) удовлетворяются тождественно. Из уравнений импульсов не обращаются тождественно в нуль уравнения в проекциях на r и φ . Из этих уравнений ограничимся уравнениями в проекциях на φ , поскольку лишь эти уравнения потребуются для определения профилей скоростей континуумов и касательных напряжений на стенках цилиндров. Тогда

$$\frac{d\sigma_{\varphi r}^{(\alpha)}}{dr} + \frac{2\sigma_{\varphi r}^{(\alpha)}}{r} + (-1)^\alpha k(v_\varphi^{(1)} - v_\varphi^{(2)}) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.4)$$

Подстановка соответствующих выражений (2.3) в уравнения (1.6) дает два уравнения для определения угла θ . Чтобы эти уравнения совпадали, необходимо, чтобы $\beta_r = \beta_\varphi = \beta_x = 0$. Поскольку при этом величина γ может быть произвольной, то положим также $\gamma = 0$. Тогда, если пренебречь массовыми силами G_i , получим следующее уравнение для угла θ :

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \\ + 5 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\cos^2 \theta}{r^2} = \frac{I v_\varphi^{(2)^2}}{k_{22} r^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система уравнений (2.4), (2.5) довольно сложна для получения точно-го аналитического решения. Ограничимся предельным случаем течения, когда влияние наведенной анизотропии на течение диспергированной суспензии мало, т. е. $\mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \ll \mu_0$. Проведенное ниже сравнение с экспериментальными результатами показывает, что такой случай течения действительно реализуется. Итак, положим $\sigma_{\varphi r}^{(1)} = \mu_0 r \omega'$. Интегрирование системы (2.4) дает

$$\sigma_{\varphi r} = \tau_1 R_1^2 / r^2, \quad \sigma_{\varphi r} = \sigma_{\varphi r}^{(1)} + \sigma_{\varphi r}^{(2)} \quad (2.6)$$

где τ_1 — касательное напряжение на поверхности цилиндра $r = R_1$.

Подставляя в формулу (2.6) выражения для $\sigma_{\varphi r}^{(2)}$ из (2.3) и $\sigma_{\varphi r}^{(1)} = \mu_0 r \omega'$, получим

$$\mu_0 r \omega' + \tau_0 = \tau_1 R_1 / r^2, \quad \tau_0 = \sigma_0 \operatorname{sgn} e_{\varphi r}^{(2)} \quad (2.7)$$

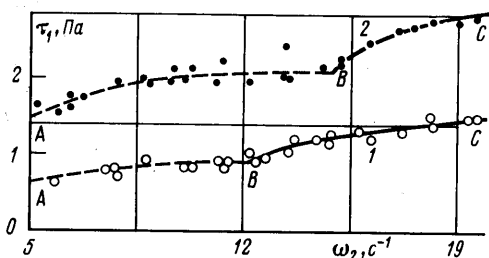
При движении суспензии воло́кна не прилипают к твердой стенке [2], поэтому между твердой стенкой и континуумом волокон существует тонкий слой чистой жидкой фазы, которая не может быть отнесена к ориентированному континууму жидкой фазы. Если пренебречь толщиной этого слоя и поставить граничное условие при $r = R_1$, то естественно принять $\omega(R_1) = \omega_*$, где ω_* — эмпирическая константа. Интегрируя уравнение (2.7) с этим условием, найдем

$$\omega = \omega_* + \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\tau_1}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) + \tau_0 \ln \frac{R_1}{r} \right] \quad (2.8)$$

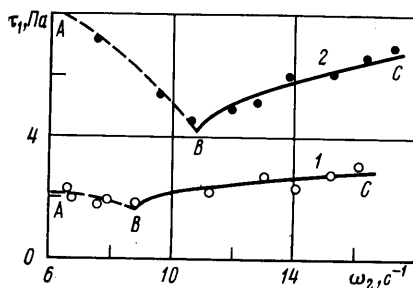
Очевидно, $\omega_2 = \omega(R_0)$. Величина R_0 определяется из условия равенства моментов касательных напряжений на поверхностях $r = R_0$ и $r = R_1$: $\sigma_0 R_0^2 = \tau_1 R_1^2$. Подставляя R_0 в формулу (2.8), получим искомую зависимость $\tau_1(\omega_2)$ в виде

$$\omega_2 = \omega_* + \frac{\tau_1}{2\mu_0} \left[\left(1 - \frac{\sigma_0}{\tau_1} \right) + \frac{\tau_0}{\tau_1} \ln \frac{\sigma_0}{\tau_1} \right] \quad (2.9)$$

На фиг. 1, 2 приведены экспериментальные точки зависимости $\tau_1(\omega_2)$ для суспензий белой сульфитной целлюлозы, охватывающей стержневое и переходное



Фиг. 1



Фиг. 2

течения в окрестности точки перехода, в ротационном вискозиметре с внешним вращающимся цилиндром [2]. Радиусы цилиндров: $R_1=0,119$ м, $R_2=0,130$ м. На фиг. 1 степень помола волокна 25° ШР, кривые 1, 2 соответствуют $c=0,5$ и 0,8%. На фиг. 2 степень помола 20° ШР, кривые 1, 2 — $c=1$ и 2%. Для наглядности эмпирические точки стержневого течения осреднены штриховой дугой АВ.

Дуга ВС (сплошная линия) — результат расчета по формуле (2.9) при $\tau_0=\sigma_0$ и при следующих значениях параметров: $\omega_2=12,2; 15; 8,8; 10,9$ с $^{-1}$, $\sigma_0=0,92; 2,1; 1,7; 4,1$ Па; $\mu_0=0,008; 0,012; 0,018; 0,043$ Па·с для $c=0,5; 0,8; 1,0; 2,0\%$ соответственно. Согласно теоретических и экспериментальных результатов хорошее. Следует отметить, что по порядку величины значения μ_0 совпадают со значениями вязкости суспензий длинных эллипсоидов вращения [15].

Безусловно, для решения рассмотренной здесь задачи Куэтта можно было обойтись простой моделью вязкопластической среды. Однако для описания переходного течения в трубе такой модели уже недостаточно. Как показано в [8], в развитом переходном течении в трубе в противоположность рассмотренному случаю в диспергированной суспензии реализуется неравенство $\mu_0 \ll \mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$. Моделью, которая охватывает оба предельных случая переходного течения, а также и его промежуточные состояния, является модель, предложенная выше в разд. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Norman B. G., Moller K., Ek R., Duffy G. G. Hydrodynamics of paper making fibres in water suspension // Fibre-water interactions in paper making. Trans. Symp., Oxford, 1977. V. 1. London: Tech. Sect. Brit. Paper and Board Makers Assn, 1978.
2. Терентьев О. А. Гидродинамика волокнистых суспензий в целлюлозно-бумажном производстве. М.: Лесн. пром-сть, 1980. 248 с.
3. Thalen N., Wahren D. Shear modulus and ultimate shear strength of some paper pulp fibre networks // Svensk Papperstidn. 1964. V. 67. № 7. P. 259–264.
4. Покровский В. Н. Напряжения, вязкость и оптическая анизотропия движущейся суспензии жестких эллипсоидов // Успехи физ. наук. 1971. Т. 105. Вып. 4. С. 625–643.
5. Batchelor G. K. The stress generated in a non-dilute suspension of elongated particles by pure straining motion // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. Pt. 4. P. 813–829.
6. Hinch E. J., Leal L. G. Constitutive equations in suspension mechanics. Pt. 1. General formulation // J. Fluid Mech. 1975. V. 71. Pt. 3. P. 481–495.
7. Ericksen J. L. Transversely isotropic fluids // Kolloid – Zeitschrift. 1960. V. 173. № 2. S. 117–122.
8. Бабкин В. А. Переходное течение волокнистой суспензии в трубе как течение анизотропной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 91–98.
9. Ericksen J. L. Conservative laws for liquid crystals // Trans. Soc. Rheol. 1961. V. 5. № 1. P. 23–34.
10. Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1968. V. 28. № 4. P. 265–283.
11. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
12. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н. Гидромеханика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 7. М.: ВИНТИ, 1973. С. 106–113.
13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
14. Бабкин В. А. Стержневое течение Куэтта волокнистой суспензии между сооснымы цилиндрами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 29–36.
15. Хатпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.