

УДК 532.529:537.8:612.13

© 1989

КИЗИЛОВА Н. Н.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕДАНИЯ ЭРИТРОЦИТОВ КРОВИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Процессы агрегации эритроцитов приводят к тому, что их оседание неустойчиво по отношению к малым изменениям однородного распределения клеток в горизонтальной плоскости седиментационной трубки. В предположении осесимметричного распределения клеток система уравнений оседания эритроцитов в плазме крови свелась к двумерной и рассмотрение этой системы как в пренебрежении вязкими слагаемыми и инерционными членами, так и с учетом этих слагаемых показало, что система неустойчива к малым возмущениям [1]. Неустойчивость оседания может иногда приводить к тому, что широко используемый в медицинской практике тест РОЭ будет определяться не только реологическими характеристиками крови, измененными, например, в ходе заболевания. Случайное встряхивание капилляра с кровью либо иное механическое воздействие может вызвать образование в верхней части трубки крупного агрегата, что приведет к резкому ускорению всего процесса оседания.

Ранее была построена одномерная модель седиментации эритроцитов с учетом агрегации и запираания части жидкости внутри агрегатов [2]. В работе [3] рассматривалось обобщение модели на случай оседания эритроцитов с учетом агрегации в осесимметричном магнитном поле соленоида. Было показано, что для достаточно длинного соленоида и тонкого капилляра при помещении капилляра вдоль оси соленоида, наличие горизонтальной составляющей магнитного поля практически не влияет на ход оседания. Однако при постановке экспериментов зачастую используются более короткие соленоиды, где неоднородность распределения горизонтальной составляющей магнитного поля вдоль трубки существенна. Следовательно, предполагая, что единственным механизмом действия постоянного магнитного поля на оседание является намагничивание эритроцитов [3], необходимо учесть наличие горизонтальной силы, действующей на эритроциты в радиальном направлении.

Ниже изучается устойчивость оседания при наличии поперечной составляющей пондеромоторной силы.

Рассмотрим оседание суспензии эритроцитов как двухфазной среды во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  в предположении слабой намагничиваемости эритроцитов. Система уравнений, описывающая движение суспензии, есть [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}^1 C &= 0, \quad \operatorname{div} [\mathbf{v}^1 C + \mathbf{v}^2 (1-C)] = 0 \\ \rho_s C \left( \frac{\partial \mathbf{v}^1}{\partial t} + (\mathbf{v}^1 \nabla) \mathbf{v}^1 \right) &= -C \nabla p + \rho_s C g \mathbf{e}_z - DC (\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) + \frac{1}{2} \chi_s C \nabla H^2 \\ \rho_f (1-C) \left( \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + (\mathbf{v}^2 \nabla) \mathbf{v}^2 \right) &= \\ = -(1-C) \nabla p + \rho_f (1-C) g \mathbf{e}_z + DC (\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) + \frac{1}{2} \chi_f (1-C) \nabla H^2 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C$  — объемная концентрация эритроцитов,  $\mathbf{v}^1$  и  $\mathbf{v}^2$  — скорости фаз эритроцитов и плазмы,  $\rho_s$  и  $\rho_f$  — истинные плотности фаз,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в вертикальном направлении,  $\chi_s$  и  $\chi_f$  — магнитные восприим-

чивости фаз,  $D(C)$  — феноменологический коэффициент стокаса сопротивления частиц.

Будем рассматривать двумерную задачу, к которой система (1) может быть сведена при некоторых конфигурациях внешнего магнитного поля, например, в плоской кювете ( $z \in [0; L]$ ,  $x \in [0; R]$ ,  $y \in [0; h]$ ,  $R/h \ll \ll 1$ ,  $R/L \ll 1$ ), где ось  $z$  направлена вертикально вниз. Если оседание происходит в соленоиде круглого сечения, то задача также сводится к двумерной.

В пренебрежении ускорением частиц и силами инерции по сравнению с вязкими невозмущенное решение для вертикального оседания имеет вид [3]

$$w = v_{z_0} = \frac{(1-C)^2}{D} \left[ g(\rho_s - \rho_f) + \frac{\chi_s - \chi_f}{2} \frac{\partial}{\partial z} H_z^2 \right] \\ C = C_0 = \text{const} \quad (2)$$

Полагая, что возмущенное решение есть сумма невозмущенного и волны  $\exp[i(kx + lz - \omega t)]$  с соответствующей амплитудой, для амплитуд  $v^{*i} = (v_x^{*i}, v_z^{*i})$ ,  $i=1; 2$ ,  $C = C^*/C_0$ ,  $p^*$  возмущенного движения получим систему

$$\begin{aligned} (\rho_s \Omega_1 - iD) v_x^{*1} + iD v_x^{*2} + k p^* + i \chi_s \Psi_x C &= 0 \\ (\rho_s \Omega_1 - iD) v_z^{*1} + iD v_z^{*2} + l p^* + i(\chi_s \Psi_z - w D F (1+r)) C &= 0 \\ ir D v_x^{*1} + (\rho_f \Omega_2 - ir D) v_x^{*2} + k p^* - ir \chi_f \Psi_x C &= 0 \\ ir D v_z^{*1} + (\rho_f \Omega_2 - ir D) v_z^{*2} + l p^* - ir[\chi_f \Psi_z - D(1+r)(1+r+F)w] C &= 0 \\ kv_x^{*1} + lv_z^{*2} + \Omega_1 C &= 0 \\ kv_x^{*1} + kv_x^{*2}/r + lv_z^{*1} + lv_z^{*2}/r + lw(1+r) C &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Omega_1 = lw - \omega, \quad \Omega_2 = -rlw - \omega \\ r = \frac{C}{1-C}, \quad F = \frac{C}{D} \frac{dD}{dC}, \quad \Psi_x = \frac{\partial H^2}{\partial x 2}, \quad \Psi_z = \frac{\partial H^2}{\partial z 2}$$

Условием существования решения системы (3) является равенство нулю определителя из коэффициентов при соответствующих переменных. Определитель представляется в виде произведения двух полиномов, поэтому условием равенства его нулю является выполнение одного из двух условий

$$\omega^2 + [r - 1 + id(\rho r + 1)] \omega_0 \omega - r[1 + id(\rho - 1)] / \omega_0^2 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (r + \rho) \omega^2 + [2(r^2 - \rho) + id\rho(r + 1)^2] \omega_0 \omega + \\ + [r^3 + \rho + id\rho(r + 1)^2(2r - 1 + F - \mu)] \omega_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\kappa = \frac{(\chi_s - \chi_f) \Psi_z}{(\rho_s - \rho_f) g}, \quad \omega_0 = \frac{lg(\rho_s - \rho_f)(1 + \kappa)}{D(1 + r)^2}, \quad \rho = \frac{\rho_s}{\rho_f} \\ d = \frac{D}{\rho_s \omega_0}, \quad \mu = \frac{(\chi_s + r\chi_f)(k\Psi_x + l\Psi_z)}{D\omega_0(1 + r)^2}$$

При  $\Psi_x = 0$ ,  $\Psi_z = 0$  (4) и (5) совпадают с соответствующими условиями из [1].

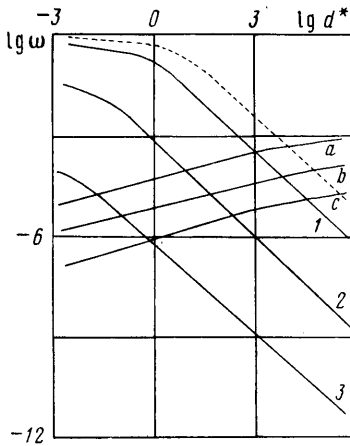
Движение, определяемое системой (1), устойчиво, если  $\text{Im } \omega < 0$ . Для уравнения (4) всегда  $\text{Im } \omega < 0$ . Для уравнения (5) всегда имеется одно решение с  $\text{Im } \omega > 0$ . Исследуем положительное решение  $\omega_a = \text{Im}(\omega/\omega_0)$  уравнения (5).

Анализ показывает, что инкремент неустойчивости уменьшается по сравнению с инкрементом гравитационного оседания, если

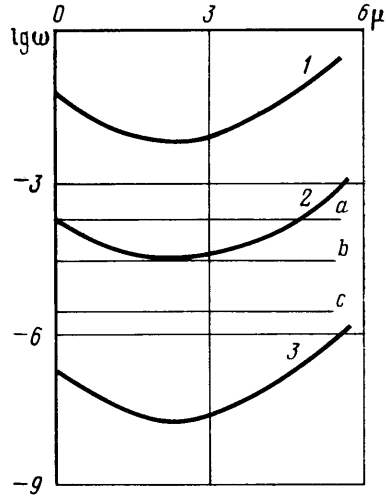
$$\frac{\kappa}{1 + \kappa} < 0, \quad \mu[2\mu^* - \mu] > 0, \quad \mu^* = 2r - 1 + F + \frac{\rho^2 - r}{\rho + r}$$

Таким образом, при оседании частиц в поле продольной попереромоторной силы  $\Psi_x=0$ ,  $\Psi_z \neq 0$  стабилизация будет происходить при  $\kappa \in ]-1; 0[$ . Воздействие поперечной попереромоторной силы  $\Psi_x \neq 0$  будет стабилизировать оседание при  $\mu \in ]0; 2\mu^*[$ .

Будем считать, что оседание практически устойчиво, если при любых значениях  $k$  и  $l$  характерное время оседания  $t^* \leq 2\pi/\omega_a$ . Поскольку эксперименты по седиментации и численные расчеты проводились для квази-



Фиг. 1



Фиг. 2

одномерной модели оседания в длинной трубке кругового сечения [2, 3], то и оценку  $t^*$  проведем, основываясь на этой модели.

Положим  $t^*=t_b$  — время достижения максимальной скорости оседания. При  $t < t_b$  имеется зона квазиодномерного оседания агрегатов, а при  $t > t_b$  становится значительней влияние дна и в зоне оседания происходят процессы уплотнения агрегатов и фильтрации запертой жидкости, рассмотрение которых выходит за рамки поставленной задачи.

Имея в виду лишь качественное исследование влияния магнитного поля на оседание, будем считать, что  $\Psi_x = \text{const}$ ,  $\Psi_z = \text{const}$ . Для времени  $t_b$ , среднего объема агрегата  $\delta$  и объемной концентрации агрегатов в зоне квазиодномерного оседания имеем ( $t < t_b$ ) [3]

$$t_b = \left[ \left( \frac{10K}{27(1+\kappa)(1-C)^{3,5}} + 1 \right)^{0,6} - 1 \right] \frac{L}{KCu_0} \quad (6)$$

$$\delta = \delta_0 \left[ 1 + \frac{KCu_0 t_a}{L} \right], \quad C = C_0 \quad (7)$$

где  $\delta_0$  — средний объем эритроцита,  $u_0$  — характерная скорость оседания одиночного эритроцита,  $t_a$  — время, в течение которого эритроциты агрегируют, после чего происходит их квазиодномерное оседание,  $K$  — безразмерный параметр, характеризующий скорость агрегации.

Для феноменологического коэффициента  $D$  получено выражение [2].

$$D = \eta \delta^{-2/3} (1-C)^{-2,5} \quad (8)$$

Чтобы волна возмущения взаимодействовала с системой, должны выполняться условия  $2\pi/l \ll L$ ,  $2\pi/k \ll R$ . С другой стороны, разумно ограничить значения волновых чисел условиями  $2\pi/l \gg a$ ,  $2\pi/k \gg a$ , где  $a$  — гидродинамический радиус эритроцита.

Для численных расчетов примем  $C_0 = 0,4$ ,  $\eta = 15 \cdot 10^{-3}$  км/м·с,  $\rho_s = 1080$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_f = 1030$  кг/м<sup>3</sup>,  $\chi_s = 10^{-6}$ ,  $\chi_f = 10^{-7}$ ,  $a = 5 \cdot 10^{-6}$  м,  $L = 0,1$  м,  $R =$

$=10^{-3}$  м,  $u_0=8 \cdot 10^{-7}$  м/с,  $\delta_0=0,87 \cdot 10^{-16}$  м<sup>3</sup>. Примем  $t_a=5$  мин, а  $K \in [10^3, 10^3]$  [2]. Для  $k$  и  $l$  получим  $10 \leq l \leq 10^3$ ,  $10^2 \leq k \leq 10^3$ .

На фиг. 1 приведены зависимости величины  $\omega = \omega_a(1+\kappa)$  от безразмерного параметра  $d^* = D(1+\kappa)/d$  для гравитационного оседания  $\kappa=0$ ,  $\mu=0$  (штриховая линия) и оседания в магнитных полях  $\mu=\mu^*=2,352$ ,  $\kappa=0$  (кривая 1),  $\mu=\mu^*$ ,  $\kappa=-0,95$  (кривая 2),  $\mu=\mu^*$ ,  $\kappa=-0,999$  (кривая 3). Кривые  $a, b, c$  — зависимости  $\omega_b(d^*)=2\pi/t_b$  при  $\mu=\mu^*$ ,  $\kappa=0, -0,95, -0,999$  соответственно. Под каждой из кривых  $a, b, c$  находится область значений  $\omega$ , определяющих устойчивое оседание для соответствующего значения  $\kappa$ , а над кривой — неустойчивое. Значения  $d^*$  определялись по заданным  $K$  из (7) и (8).

На фиг. 2 показана параболическая зависимость  $\omega$  от параметра  $\mu$  при  $d^*=52,5$  и различных значениях  $\kappa$ . Прямые  $a, b, c$  — значения  $\omega_b$  при  $\kappa=0, -0,95, -0,999$  соответственно — делят всю область на зоны устойчивости и неустойчивости. Минимальное значение  $\omega$  при каждом фиксированном  $\kappa$  достигается при  $\mu=\mu^*$ .

Все расчеты проводились при  $l=10^3$ . Поскольку при других значениях  $l$  из выбранного промежутка значения  $\omega$  для всех  $d^*$  будут меньше, чем соответствующие при  $l=10^3$ , то гравитационное оседание при  $d^* > 1,38 \cdot 10^4$  (соответственно  $K < 7,2 \cdot 10^4$ ) практически устойчиво (фиг. 1). Путем наложения внешнего магнитного поля эту область значений  $K$  можно расширить. Как показано на фиг. 2, максимальное расширение при фиксированном  $\kappa$  может быть получено при  $\mu=\mu^*$ .

При действии пондеромоторной силы только в поперечном направлении  $\Psi_z=0$ ,  $\Psi_x \neq 0$  ( $\kappa=0$ ,  $\mu=\mu^*$ ) оседание устойчиво для  $d^* > 1,38 \cdot 10^3$  ( $K < 4,07 \cdot 10^5$ ) (фиг. 1). При действии пондеромоторной силы только в продольном направлении такой стабилизирующий эффект не достигается. Максимальное расширение промежутка устойчивых значений  $K$  в этом случае осуществляется при  $\kappa=-0,37$ ,  $\mu=-0,7$ . При этом оседание устойчиво для  $d^* > 6,01 \cdot 10^3$  ( $K < 1,34 \cdot 10^5$ ).

По мере приближения  $\kappa$  к значению  $\kappa=-1$  диапазон значений  $\mu$ , обеспечивающих устойчивое оседание, расширяется (фиг. 2). Путем подбора параметров  $\kappa$  и  $\mu$  оседание в магнитном поле можно сделать устойчивым для достаточно больших значений скорости агрегации  $K$ . Так, оседание устойчиво для  $d^* > 52,5$  ( $K < 4,74 \cdot 10^6$ ) при  $\kappa=-0,95$ ,  $\mu=\mu^*$ , для  $d^* > 0,53$  ( $K < 1,5 \cdot 10^8$ ) при  $\kappa=-0,999$ ,  $\mu=\mu^*$  (фиг. 1). Если положить, что поле сил  $\Psi_x$  и  $\Psi_z$  может быть задано с точностью до  $10^{-3}$ , то следует считать, что для  $K > 1,5 \cdot 10^8$  стабилизировать оседание с помощью внешнего магнитного поля нельзя.

Имеется зависимость устойчивости оседания от величины начальной концентрации эритроцитов. Максимальное увеличение промежутка значений  $K$ , при которых гравитационное оседание устойчиво, достигается для  $C_0=0,32$ . При этом оседание устойчиво для  $d^* > 6,31 \cdot 10^3$  ( $K < 1,29 \cdot 10^5$ ).

Таким образом, неустойчивость процесса гравитационного оседания эритроцитов по отношению к малым возмущениям для довольно широкого диапазона значений константы агрегации  $K$  может стать причиной необъяснимых разнонаправленных сдвигов теста РОЭ. Как было показано выше, при проведении РОЭ в магнитном поле можно добиться устойчивости процесса для довольно малых значений скорости агрегации, что повысит диагностическую точность теста. Так, стабилизация достигается для  $K < 1,5 \cdot 10^8$  в случае  $\kappa=-0,999$ ,  $\mu=\mu^*$ . Этому соответствует внешнее магнитное поле со средними значениями  $\Psi_x \sim 10^{12}-10^{13}$  А<sup>2</sup>/м<sup>3</sup> и  $|\Psi_z| \leq 3 \cdot 10^{13}$  А<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>, что можно получить на практике.

В случае, если  $\Psi_x$  и  $\Psi_z$  являются функциями координат, численные расчеты величин  $\omega$  и  $\omega_b$  должны проводиться при заданных распределениях  $\Psi_x(x, z)$  и  $\Psi_z(x, z)$ .

Для расчетов брались значения  $K$ , которые получаются практически во всех экспериментах с кровью человека при гравитационной седимента-

ции [2]. Для ббльшей точности расчетов необходима постановка экспериментов по седиментации в магнитном поле с целью определить значения  $t_a$  и  $K$ , поскольку возможна зависимость константы скорости агрегации от величины внешнего магнитного поля.

Автор выражает глубокую признательность С. А. Региреру за внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Thacker W. C., Lavelle J. W.* Stability of settling of suspended sediments // *Phys. Fluids*. 1978. V. 21. № 2. P. 291–292.
2. *Лосев Е. С.* Моделирование оседания агрегирующих частиц // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1983. № 3. С. 71–78.
3. *Сивакова Н. Н.* Влияние магнитного поля на оседание агрегирующих слабонамагничивающихся частиц // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1987. № 5. С. 77–85.

Харьков

Поступила в редакцию  
11.X.1988