

УДК 532.526.75:532.517.2

© 1989

ГОЛЬДШТИК М. А., ЯВОРСКИЙ Н. И.

ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ПОРИСТЫМ ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКОМ И ПЛОСКОСТЬЮ

Начиная с основополагающей работы Кармана [1], где было рассмотрено авто- модельное решение полных уравнений Навье – Стокса над вращающимся диском, исследованию решений этого класса посвящено огромное количество работ. В пре- красных обзорах [2, 3] можно найти изложение истории вопроса и характеристику современного состояния исследований задачи о кармановском автомоделном тече- нии между двумя непроницаемыми дисками. Одним из наиболее важных резуль- татов анализа является неединственность автомоделных решений уравнений Навье – Стокса. Вновь рождающиеся решения, как правило, характеризуются мно- гоэчайеистой структурой. Однако и одноэчайеистые решения могут обнаруживать не- единственность. Неединственность режимов течения между непроницаемыми дисками была подвергнута экспериментальной проверке, которая показала, что для опреде- ленной экспериментальной установки существует только один режим течения, хотя тип его может быть разным в опытах на разных установках. Значительное число работ (см. [2, 3]) посвящено численному исследованию задачи, в которых найдено большое количество решений. Определение всего множества решений при произ- вольно заданных угловых скоростях вращения дисков встречает заметные вычис- лительные трудности. Они обусловлены тем, что все многоэчайеистые решения не возникают вследствие бифуркаций одноэчайеистого решения, а рождаются изолиро- ванными парами.

В работе Бэтчелора [4] решения кармановского типа были распространены на течения между бесконечными вращающимися дисками, на которых задан равно- мерный вдув или отсос. Наличие дополнительных параметров вдува или отсоса значительно усложняет задачу. Обзор полученных здесь результатов содержится в [5].

Чтобы сделать решение обозримым и доступным для анализа в целом, далее рассматривается только задача о течении жидкости между вращающимся пори- стым диском и неподвижной плоскостью. Эта задача качественно моделирует те- чение под телом на воздушной подушке и поэтому может быть интересна с прак- тической точки зрения. В этом случае течение определяется двумя параметрами: числом Рейнольдса $Re = Vh/\nu$, построенным по скорости вдува или отсоса, и пара- метром крутки $K = \Omega h/V$, где h – расстояние между дисками, Ω – угловая скорость пористого диска. Выбор параметра K вместо традиционно используемых вращатель- ного числа $Re_\omega = \Omega h^2/\nu$ или числа Экмана $Ek = Re_\omega^{-1}$ применительно к диску на воздушной подушке с вращением более удобен, поскольку характеризует только геометрию устройства, закручивающего поток [6]. В общем случае необходимы еще два параметра: отношение угловых скоростей дисков и отношение скоростей вдува или отсоса.

Ниже установлено, что в случае отсоса вязкой несжимаемой жидкости через неподвижный пористый диск при определенном числе Рейнольдса имеет место возникновение самопроизвольного вращения жидкости, что согласуется с резуль- татами специально поставленного опыта. Другой необычный результат – существо- вание многоэчайеистых режимов, отвечающих отсосу, когда сила, действующая на пористый быстро вращающийся диск, является подъемной и к тому же аномально большой. Построены карты возможных стационарных режимов течения, среди ко- торых выделены устойчивые. В случае достаточно интенсивных отсоса и вращения обнаружен устойчивый автоколебательный режим. В пределе исчезающе малой вязкости установлены необычные свойства пограничных слоев, проявляющиеся при отсосе.

1. Постановка задачи. Пусть координата $z=0$ соответствует неподвижной не- проницаемой плоскости, а $z=h$ – вращающемуся пористому диску, через который осуществляется равномерный вдув или отсос жидкости. Разыскивая осесимметрич- ное автомоделное решение кармановского типа (обозначения стандартные) $v_z =$

$=v_z(z, t)$, $v_\varphi=r\omega(z, t)$, $v_r=-(1/2)rv_z'$ и используя уравнения Навье - Стокса, получаем систему

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2} \alpha^2 \delta r \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial t} = \nu v_z''' + \frac{1}{2} v_z'^2 - v_z v_z'' - 2\omega^2 - \alpha^2 \delta \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \omega'' - v_z \omega' + v_z' \omega \quad (1.3)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z , $\delta = \pm 1$, α - искомая постоянная, для исключения которой достаточно продифференцировать (1.2)

$$\partial v_z'' / \partial t = \nu v_z^{IV} - v_z v_z''' - 4\omega \omega' \quad (1.4)$$

Для системы уравнений (1.3) - (1.4), кроме начальных, ставятся краевые условия прилипания

$$v_z(0) = v_z'(0) = \omega(0) = 0, \quad v_z(h) = V, \quad v_z'(h) = 0 \quad (1.5)$$

$$\omega(h) = \Omega$$

Количество условий (1.5) соответствует порядку системы (1.3), (1.4). По определению числа $Re = Vh/\nu$, значениям $Re > 0$ соответствует отсос, а $Re < 0$ - вдув.

Даже в стационарном случае нелинейная краевая задача (1.3) - (1.5) трудна как для исследования, так и для численного решения. Для изучения всего множества возможных решений стационарную краевую задачу целесообразно свести к задаче Коши, для чего вводятся новые переменные

$$v_z = \sqrt{\alpha \nu} W(x), \quad v_r = -\frac{1}{2} \alpha r W'(x), \quad v_\varphi = \alpha r \gamma(x), \quad x = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} z \quad (1.6)$$

Тогда стационарные уравнения (1.2), (1.3) запишутся в форме, не содержащей параметров

$$W''' = WW'' - \frac{1}{2} W'^2 + 2\gamma^2 + \delta; \quad \gamma'' = W\gamma' - \gamma W' \quad (1.7)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x . Заметим, что, согласно (1.6), величина α имеет размерность c^{-1} , так что переменные x , W и γ безразмерны. Для системы (1.7) ставится задача Коши

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad W'' = P, \quad \gamma = 0, \quad \gamma' = Q \quad (1.8)$$

Она содержит всего два параметра P и Q , что и позволяет провести полное исследование отдельно для $\delta = +1$ и -1 . Перебирая параметры $-\infty < P < \infty$, $0 \leq Q < \infty$, можно получить все семейство решений исходной краевой задачи со всеми допустимыми значениями Re и K .

Связь задачи Коши (1.7) - (1.8) с исходной краевой осуществляется путем интегрирования системы уравнений до такого значения $x = x_m$, где выполнено предпоследнее условие (1.5), т. е. $W'(x_m) = 0$. По значениям $W_m = W(x_m)$ и $\gamma_m = \gamma(x_m)$ с помощью (1.6) нетрудно определить физические параметры задачи

$$\alpha = x_m^2 \nu / h^2, \quad Re = W_m x_m, \quad K = \gamma_m x_m / W_m \quad (1.9)$$

Задача Коши (1.7) - (1.8) для каждого набора P , Q , δ имеет единственное аналитическое решение, которому могут соответствовать одно, несколько или ни одного значений $x_m > 0$, где $W' = 0$. При помощи решения задачи Коши можно получить выражение для подъемной силы, действующей на диск радиуса $R \gg h$

$$F = \frac{1}{8} \pi \rho \nu^2 (R/h)^4 x_m^4 \delta [1 + O(h^2/R^2)] \quad (1.10)$$

Поставленную задачу проще всего решать численно, оставив аналитическое исследование лишь для предельных случаев.

2. Физический анализ задачи. Для качественного исследования решений полезно рассмотреть на физическом уровне предельные случаи $\nu \rightarrow \infty$ и $\nu \rightarrow 0$, исходя непосредственно из постановки стационарной задачи для уравнений (1.3) - (1.4). В случае $\nu \rightarrow \infty$ элементарные вычисления дают

$Re = -\frac{1}{3}P^4\delta$, $K = 6Q/P$. Без ограничения общности можно считать, что $\Omega > 0$ и $Q > 0$. Тогда знак P совпадает со знаком V , так что в случае отсоса $P > 0$, а в случае вдува $P < 0$. Все эти свойства вполне согласуются со здравым смыслом: при вдуве под диском формируется зона повышенного давления ($\delta = \pm 1$), при отсосе, наоборот, — зона разрежения ($\delta = -1$).

Рассмотрим теперь стационарное «невязкое» решение, положив в (1.2) и (1.3) $v = 0$. В этом случае уравнение (1.3) легко интегрируется [7]

$$\omega = \frac{1}{2}Av_z, \quad A = \text{const} \quad (2.1)$$

С учетом (2.1) уравнение (1.2) принимает вид

$$v_z v_z'' - \frac{1}{2}v_z'^2 + \frac{1}{2}A^2 v_z^2 + \alpha^2 \delta = 0 \quad (2.2)$$

Нетрудно также получить общий интеграл уравнения (2.2)

$$v_z = B/A + \sqrt{B^2 + 2\alpha^2 \delta/A} \sin A(z + z_0) \quad (2.3)$$

где B , z_0 — произвольные постоянные. Из (2.2) при (2.3) следует, что для обращения v_z в нуль необходимо иметь $\delta = +1$. При $\delta = -1$, как это видно из (2.2), существует особое решение $v_z = \text{const}$, соответствующее твердотельному вращению $\omega^2 = \alpha^2/2$.

Выражения (2.2) и (2.3) описывают четырехпараметрический класс вихревых движений идеальной жидкости. Выбором параметров A , B , z_0 , α в принципе можно удовлетворить четырем из шести условий (1.5). Одним из важных физических требований при определении этих параметров является отсутствие пограничных слоев на участках втекания жидкости [8]. Однако следует иметь в виду, что в процессе предельного перехода $v \rightarrow 0$ в результате образования пограничных слоев физические граничные условия (1.5) могут «стираться». Анализ и численные расчеты показывают, что так и происходит, при этом могут стираться не только условия прилипания, но и непроницаемости! В таком случае параметры решения (2.3) должны определяться путем детального рассмотрения предельного перехода $v \rightarrow 0$ в полном вязком решении.

Достаточно полный анализ в случае непроницаемых дисков изложен в упомянутых выше обзорах [2, 3]. В случае вращающихся пористых дисков с равномерным вдувом или отсосом ситуация меняется качественно. Прежде всего заметим, что невязкое решение (2.1), (2.3) способно удовлетворить пяти условиям из шести (1.5). В случае вдува такое решение единственно и имеет вид

$$v_z = V \sin\left(K \frac{z}{h}\right) \sin\left(K \left(2 - \frac{z}{h}\right)\right) / \sin^2 K, \quad \omega = \left(\frac{K}{h}\right) v_z; \\ K = \frac{Ah}{2} = \frac{\Omega h}{V} \quad (2.4)$$

Решение (2.4) из всех условий (1.5) не удовлетворяет лишь условию прилипания $v_z'(0) = 0$. Следовательно, естественно допустить, что при $v \rightarrow 0$ в вязком решении на непроницаемой стенке $z = 0$ возникает классический пограничный слой. На непроницаемом диске, поскольку рассматривается случай втекания, пограничный слой должен отсутствовать, что обеспечивается выполнением условия $v_z'(h) = 0$ для решения (2.4).

Решение (2.4) знакопостоянно лишь при $K \leq \pi/2$. Замечательно, что при $K = \pi/2$ условие прилипания $v_z'(0) = 0$ также выполняется, так что решение (2.4) в этом случае заведомо является точным пределом из вязкого решения при $v \rightarrow 0$. Существенно отметить, что на этом решении параметр $\alpha = 0$, т. е. согласно (1.1), $\partial p / \partial r = 0$. Это видно и из соотношения

$$\alpha^2 \delta = 2(V/h)^2 K^2 \text{ctg}^2 K \quad (2.5)$$

которое получается подстановкой решения (2.4) в уравнение (2.2). Если $K > \pi/2$, то решение (2.4) меняет знак и описывает многоячейный ре-

жим. Однако аналитическое решение (2.4) в окрестности точки z_0 , такой, что $v_z(z_0)=0$, не пригодно. Это непосредственно следует из стационарного уравнения (1.3)

$$v\omega'' = v_z\omega' - v_z'\omega \quad (2.6)$$

На аналитическом решении (2.4) оба слагаемых правой части (2.6) имеют нуль первого порядка, тогда как $\omega''(z_0) \neq 0$. Следовательно, в окрестности точки z_0 вязкий член отбрасывать нельзя. Сказанное означает, что предельное решение при $\nu \rightarrow 0$ следует строить как составное из невязких решений, различных по разные стороны точки z_0 , где возникает внутренний пограничный слой. Ситуация здесь такая же, как и в теории гидродинамической устойчивости, когда в результате вырождения дифференциального уравнения возникает критический слой [9]. Наиболее естественно искомое составное решение строится из физических соображений, если допустить, что при $K > \pi/2$ величина $\alpha = 0$. Согласно (2.5), увеличение величины K от 0 до $\pi/2$ приводит к падению градиента давления $\alpha^2\delta$ до нуля. Дальнейшее увеличение вращения должно вызвать повышение давления вблизи оси, что физически представляется неприемлемым. Но если $\alpha = 0$ при $K > \pi/2$, то в зоне $z_0 < z < h$ решение имеет вид

$$v_z = V \sin^2\left(K \frac{z-z_0}{h}\right), \quad \omega = \frac{K}{h} v_z; \quad z_0 = h\left(1 - \frac{\pi}{2K}\right) \quad (2.7)$$

Решение (2.7) характеризуется тем, что при $z=z_0$ не только $v_z=\omega=0$, но и $v_z'=0$, т. е. в этой точке жидкость покоится. В таком случае и во всей зоне $0 \leq z \leq z_0$ допустим покой. Такая возможность составного решения не единственная. Например, в зоне $0 \leq z \leq z_0$ допустимо «собственное» движение с полем скорости

$$v_z = C \sin^2\left(\pi \frac{z}{z_0}\right), \quad \omega = \frac{\pi}{z_0} v_z; \quad C = \text{const} \quad (2.8)$$

Следует отметить, что собственное решение (2.8) не является единственно возможным нетривиальным решением в области $0 \leq z \leq z_0$. Эту область можно разбить на сколько угодно большое количество подобластей так, что в каждой полученной зоне осуществляется «собственное» движение типа (2.8).

Решения вида (2.7), (2.8) являются предельными для вязкого решения при $\nu \rightarrow 0$ [2]. Величина C в (2.8) может быть получена методом сращиваемых асимптотических разложений [7], который в данном случае сводится к следующему. В уравнении (2.6) принимается $v_z = A(z-z_0)^2$, где $A < 0$ в рассматриваемом случае вдува. Решение линейного уравнения (2.6) получается аналитически в виде функции Куммера $U(-2/3, 2/3, A(z-z_0)^3/(3\nu))$, имеющей различное асимптотическое поведение при $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$, так что

$$\omega''(+\infty)/\omega''(-\infty) = -2$$

Это соотношение справедливо лишь при условии, что движение имеет по обе стороны границы $z=z_0$. Из него следует, что при переходе через границу вращение жидкости изменяется на противоположное. Этот анализ показывает, что у сращиваемых решений при $z=z_0$ непрерывны $v_z, v_z', v_z'', \omega, \omega'$, а более высокие производные имеют разрыв. Разрывность функции ω'' в точке z_0 при условии непрерывности v_z'' предопределяет скачок константы k в соотношении $\omega = kv_z/h$. Пусть в области $z < z_0$ $k = k_1$, тогда в соответствии с $\omega''(+\infty) = -2\omega''(-\infty)$ имеем $k_1/K = -1/2$. Записывая условия непрерывности в терминах составного невязкого решения (2.7) и определенного в некоторой области $z_1 \leq z \leq z_0$ собственного решения вида

$$v_z = V_1 \sin^2\left(k_1 \frac{z-z_1}{h}\right), \quad \omega = \frac{k_1}{h} v_z; \quad z_1 = z_0 - \frac{h\pi}{|k_1|} \quad (2.9)$$

получаем соотношения

$$k_1 = -1/2K, \quad k_1^2 V_1 = K^2 V \quad (2.10)$$

Эти соотношения ограничивают произвол в выборе подобластей с собственными решениями, в частности, сопоставляя (2.10) и (2.9), с учетом (2.7) имеем $z_1 = h(-5\pi/(2K))$. Поскольку должно быть $z_1 > 0$, собственная циркуляционная зона может возникнуть лишь при $K > 5\pi/2$. Если $\pi/2 < K < 5\pi/2$, то в области $z \leq z_0$ осуществляется покой. Заметим, что и при $K > 5\pi/2$ допустимо решение с $v_z = 0$ при $z \leq z_0$, так что имеет место неединственность предельных невязких режимов. Число подобных решений возрастает с ростом K . Обобщая соотношения (2.10), можно записать

$$k_i = -1/2 k_{i-1}, \quad k_i^2 V_i = k_{i-1}^2 V_{i-1}, \quad k_0 = K, \quad V_0 = V < 0 \quad (2.11)$$

где $i=1, 2, \dots$ — порядковый номер внутреннего пограничного слоя, отсчитываемый от вращающегося пористого диска. Нетрудно видеть, что местоположение i -го внутреннего пограничного слоя определяется выражением

$$z_i = z_{i-1} - h\pi/|k_i| \quad (2.12)$$

В силу ограничения $z_i \geq 0$ получаем, что количество дополнительных зон с собственным движением определяется величиной числа K . Так, в соответствии с (2.11), (2.12) в области изменения параметра $2\pi(2^{n+1}-1) > K - \pi/2 \geq 2\pi(2^n-1)$, $n=1, 2, 3, \dots$, возможно существование n дополнительных зон. При этом в окрестности плоскости $z=0$, если ее не занимает собственная зона, должен быть покой. Поэтому число возможных решений составляет $n+1$. Заметим, что при переходе к непроницаемым дискам, когда $K \rightarrow \infty$, число решений неограниченно возрастает.

В случае отсоса ($V > 0$) решения (2.7), (2.9) также являются допустимыми. Однако метод сращиваемых асимптотических разложений, примененный в окрестности вращающегося пористого диска $z=h$, при условии непрерывности нормальной скорости дает $k_0=0$. Действительно, пусть в малой окрестности $z=h$ скорость имеет вид $v_z = V + O((h-z)^2)$, $v_r = O(h-z)$. Из (2.6) найдем $\omega = \Omega \exp[V(z-h)/\nu] [1 + O(z-h)]$. В пределе при $\nu \rightarrow 0$ величина $\omega \rightarrow 0$ для всех $z < h$. В этом случае решение во внутренней области течения имеет вид

$$v_z = Vz^2/h^2, \quad \omega = 0; \quad 0 \leq z < h \quad (2.13)$$

а при $z=h$ существует тонкий пограничный слой. Однако при наличии отсоса ($\delta = -1$), как уже упоминалось, существует особое невязкое решение $x_z = \text{const}$. Оно не может удовлетворить условию непротекания на плоскости, но уравнения Навье — Стокса допускают существование неклассического пограничного слоя, на внешней границе которого дана нормальная скорость $v_z \sim 1$. Для такого пограничного слоя стандартным образом можно получить оценки

$$\delta_0 \sim \nu; \quad v_r, v_\varphi, \alpha \sim 1/\nu \quad (2.14)$$

где δ_0 — толщина пограничного слоя. Оценки (2.14) обуславливают существование интенсивных приграничных течений с большими касательными скоростями. В частности, весь радиальный поток сосредоточен вблизи стенок $z=0$ и $z=h$. Эти пограничные слои совместимы с особым решением $v_z = \text{const}$, поэтому наряду с решением (2.13) существуют решения вида

$$\omega_{1,2} = \pm \alpha/\sqrt{2}, \quad v_z = \text{const}; \quad \alpha \sim 1/\nu \quad (2.15)$$

Решение (2.15) необычно в двух отношениях. Во-первых, оно характеризуется разрывами нормальной скорости v_z на границах $z=0$ и $z=h$. Во-вторых, внутреннее вращение становится сколько угодно сильным

при $\nu \rightarrow 0$ независимо от заданного значения $\omega(h) = \Omega$, что свидетельствует о генерации вращения внутри области течения. Но тогда можно ожидать такой генерации и при $\Omega = 0$. Если это так, то должно найтись число Re^* , при котором подобное самовращение возникает впервые, поскольку при малых Re решение единственно. Явление прямой бифуркации сопровождается потерей устойчивости исходного режима [10], поэтому для нахождения предполагаемой точки бифуркации применим энергетический метод.

Рассмотрим задачу об отсосе через верхний покоящийся диск при произвольных Re . Эта задача имеет единственное решение в предположении $v_\varphi = 0$ [11]. Умножая уравнение (1.3) на ω и интегрируя по z от 0 до h , приходим к энергетическому равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \frac{\omega^2}{2} dz = -\nu \int_0^h \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{3}{2} \int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} \omega^2 dz \quad (2.16)$$

где произведено интегрирование по частям с учетом граничных условий прилипания $\omega(t, 0) = \omega(t, h) = 0$. Если при уменьшении ν правая часть (2.16) становится положительной, исходное движение теряет устойчивость по отношению к вращению. Это заведомо произойдет, если второе слагаемое положительно, а первое обращается в нуль при $\nu \rightarrow 0$. Для оценки потери устойчивости достаточно ограничиться случаем малых ω , когда основное течение описывается решением без вращения, которое при $\nu \rightarrow 0$ на верхней стенке переходит в (2.13) с образованием обычного пограничного слоя. Поэтому при малых вязкостях первый член в правой части (2.16) можно оценить, используя традиционные оценки теории пограничного слоя

$$\nu \int_0^h \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dz \sim \nu \frac{\omega_0^2}{\delta_\omega^2} \delta_\omega \sim \omega_0^{5/2} \nu^{1/2} \quad (2.17)$$

где $\delta_\omega \sim (\nu/\omega_0)^{1/2}$ — толщина пограничного слоя по скорости v_φ , а ω_0 — некоторая характерная угловая скорость вращения. Таким образом, при $\nu \rightarrow 0$ вклад этого интеграла пренебрежимо мал.

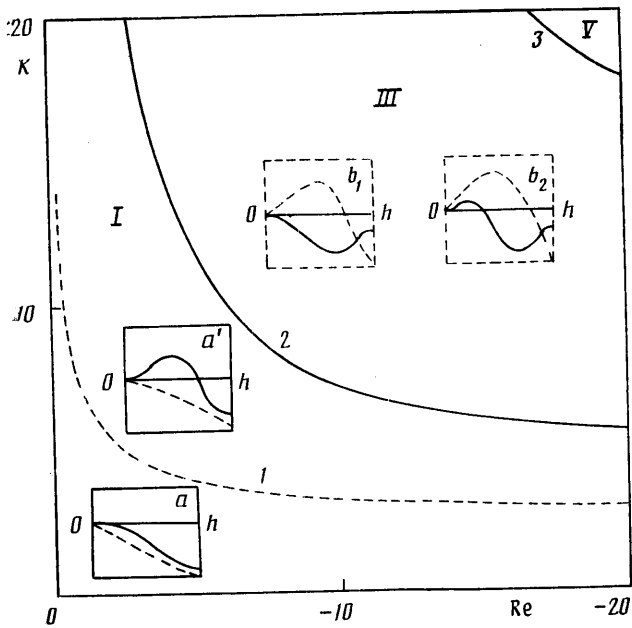
Используя результаты [11], можно показать, что решение задачи без вращения ($\omega = 0$) монотонно: для отсоса $\partial v_z / \partial z > 0$, а для вдува $\partial v_z / \partial z < 0$ при $0 < z < h$ для всех значений вязкости ν . В частности, в случае отсоса невязкий предел имеет вид (2.13). Поэтому второе слагаемое в правой части (2.16) положительно.

Итак, решение с отсосом без вращения при достаточно больших числах Re неустойчиво относительно вращательного движения. В случае вдува из (2.16) следует затухание вращения при всех ν .

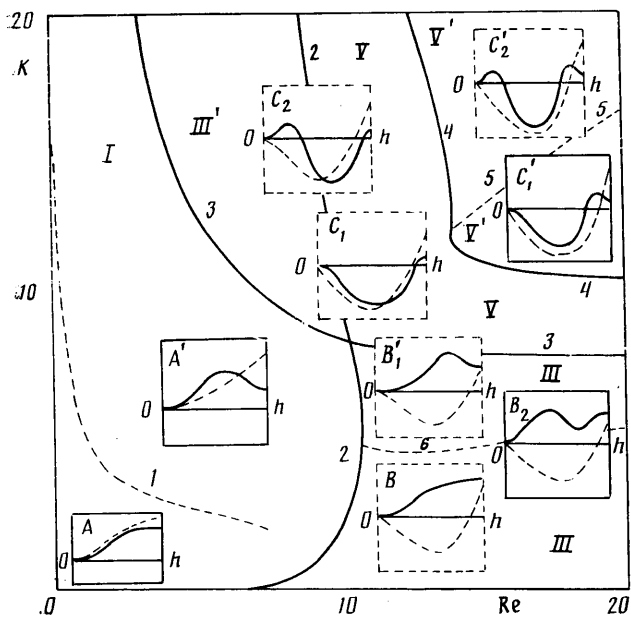
Как уже указывалось, возникновение вращательной неустойчивости с ростом числа Рейнольдса, которая имеет место при отсосе через верхний диск, является признаком бифуркации стационарного решения. Исходя из уравнения (2.16), можно оценить число Рейнольдса, при котором происходит эта бифуркация. Для этого используем известное неравенство Куранта [12]

$$\int_0^h \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dz \geq \frac{\pi^2}{h^2} \int_0^h \omega^2 dz \quad (\omega(0) = \omega(h) = 0)$$

в виде оценки, где знак больше или равно заменен на знак по порядку величины. Второй интеграл в правой части уравнения (2.17) оценим,



Фиг. 1



Фиг. 2

учитывая что величина $\partial v_z / \partial z$ не меняет знака, в следующем виде:

$$\int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} \omega^2 dz \sim \frac{V}{h} \int_0^h \omega^2 dz$$

где V — скорость отсоса через верхний диск. Отсюда найдем, что критическое число Рейнольдса, при котором правая часть (2.16) обращается в ноль, имеет значение $Re^* \sim 2\pi^2/3 \approx 6,5$. Оказывается, что, несмотря на грубость приведенной оценки, точный расчет значения критического числа Рейнольдса приводит к величине, очень близкой к значению 6,5.

3. Результаты численных расчетов. Решение сформулированной ранее задачи Коши (1.7)–(1.8) позволяет рассчитать все режимы течения. Для случая вдува карта режимов представлена на фиг. 1, где в рамках показано характерное поведение скоростей v_z (сплошные линии) и $v_\phi \sim \omega$ (штриховые). В областях I, III, V и т. д. существуют соответственно одно, три, пять и т. д. решений. Эти решения различаются топологически как по числу ячеек, так и по наличию противовращения. В области I решение имеет одну или две ячейки и знакопостоянное вращение. В области III помимо указанного решения имеется еще два. Оба имеют знакопеременное вращение, но первое — одноячейковое, а второе — двухъячейковое. В области V добавляется еще два решения, оба характеризуются знакопеременным вращением.

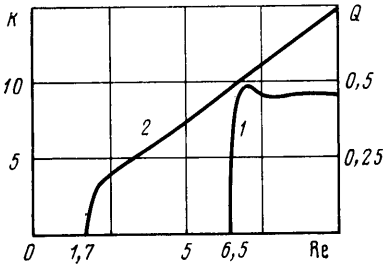
Возможная качественная картина поведения решений при $Re \rightarrow \infty$ ($v \rightarrow 0$) в случае вдува была представлена в предыдущем разделе, где было отмечено, что дополнительные решения возможны лишь при $K > 5\pi/2$. Этому факту на первый взгляд противоречит наличие решений типа b_1 в области III на фиг. 1. Данные решения имеют максимум скорости v_z внутри области течения, чего не может быть для решения (2.7). Численные расчеты показывают, что при увеличении числа Re внутреннее движение усиливается в гораздо большей степени, чем течение вблизи границы $z=h$, так что в пределе решение становится близко к «собственному», соответствующему решению (2.4) при $K \rightarrow \infty$. Следовательно, решения типа b невязкого предела не имеют. Возможно, именно этим объясняются затруднения при численных расчетах, когда для таких решений удается достигнуть значений чисел Рейнольдса, не превышающих 50, тогда как число Рейнольдса, построенное по максимуму скорости, составляет в этих случаях $\sim 10^3$. Изложенные выше характерные особенности течения ставят вопрос о строгом математическом анализе потери существования некоторых стационарных решений при $v \rightarrow 0$. Впрочем, как показано ниже, все такие решения неустойчивы и физического интереса не представляют.

Решения, возникающие в области V, имеют невязкие пределы, соответствующие составным решениям (2.7), (2.9), (2.10). Это подтверждается свойствами численных решений при больших значениях Re . Так, величина $k = v_z(z)/(h\omega(z))$ является в случае малых вязкостей адиабатическим инвариантом, изменяющимся скачком при переходе через внутренних пограничный слой по закону $k_i = -1/2 k_{i-1}$, $V < 0$, совпадающему с (2). Таким образом, результат $\omega''(+\infty)/\omega''(-\infty) = -2$, полученный методом сращиваемых асимптотических разложений, получил численное подтверждение на полном вязком решении.

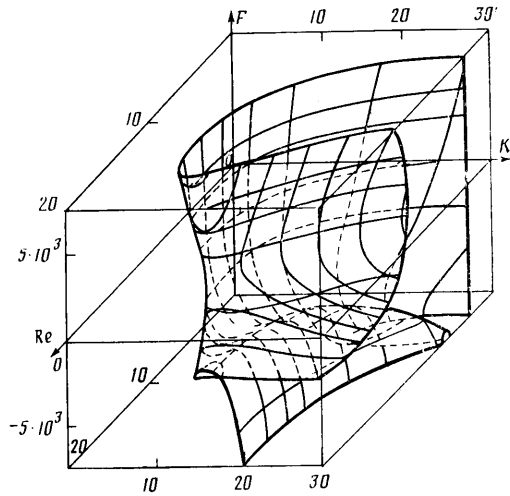
Карта режимов для течения с отсосом представлена на фиг. 2. В случае отсоса асимптотически возможны только три типа решений (см. разд. 2). На фиг. 2 их больше. Дело в том, что, как и в случае вдува, не все решения имеют невязкий предел. Таковыми на фиг. 2 являются решения типа C , хотя следует отметить, что при конечных Re некоторые из них устойчивы. Граница 2 начинается в точке $K=0$, $Re=Re^*=6,5$, так что решения в области III своим происхождением обязаны наличию бифуркации вращения в этой точке. Зависимость интенсивности самовращения $Q(Re)$ при $K=0$ показана на фиг. 3 кривой 1. Кривая 2 соответствует зависимости, характеризующей самовращение при условии скольжения $\omega'(h)=0$, или, что то же, относится к случаю свободного диска, значение для которого вырабатывается спонтанно.

В случае вдува течение между дисками моделирует поток под телом, подвешенным на воздушной подушке. Интересно проследить влияние вращения пористого диска (тела) на величину подъемной силы F . На первый взгляд вращение должно уменьшать подъемную силу, действующую на пористый диск. Это действительно так для одноячейковых решений. Для многоячейковых решений ситуация резко меняется.

Поверхность в трехмерном пространстве F , Re , K , отвечающая решениям с двумя-тремя ячейками, представлена на фиг. 4 для случая отсоса. Она имеет довольно сложный вид. Интересно, что положительная подъемная сила возникает в задаче об отсосе, а ее величина более чем на порядок превышает значение подъемной силы в задаче о вдуве с одноячейковыми решениями при тех же $|Re|$ и $|K|$. Парадоксальным оказывается поведение дополнительных решений и при вдуве, который приводят к очень большой топящей силе. Если упомянутые решения с отсосом



Фиг. 3



Фиг. 4

окажутся устойчивыми, то их было бы заманчиво использовать на практике для получения высоких значений подъемной силы для тела на воздушной подушке. Поразительно, что для этих целей необходимо организовать отсос (!), а не вдув.

4. Устойчивость. Рассмотрим проблему устойчивости в узком смысле автомодельной эволюции путем решения нелинейной начальнокраевой задачи (1.3)–(1.5). Уравнения (1.4), (1.3) и граничные условия (1.5) можно записать в безразмерной форме в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \theta'' - u\theta' - 4\omega\omega', \quad u'' = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \omega'' - u\omega' - u'\omega$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow z/h, \quad u(z) = v_z/|V|, \quad \omega(z) \rightarrow \omega h/|V|, \quad \text{Re} = |V|h/\nu \\ \omega(0) = 0, \quad \omega(1) = K, \quad u(0) = u'(0) = 0 \\ u(1) = \pm 1, \quad u'(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где знак плюс отвечает отсосу, а минус — вдуву через пористый диск. В терминах величины θ два последних условия (4.2) можно записать в интегральном виде

$$\int_0^1 \theta dz = 0, \quad \int_0^1 z\theta dz = \mp 1 \quad (4.3)$$

Начальные условия для функций u , θ , ω должны удовлетворять (4.2)–(4.3), а в остальном произвольны.

Расчеты проводились по явной схеме конечно-разностным методом второго порядка точности, причем интегральные условия (4.3) выполнялись алгебраически точно с использованием формулы трапеций. Эти условия служат для вычисления граничных значений $\theta(0)$ и $\theta(1)$ по внутренним значениям функции $\theta(z)$, что позволяет для уравнения (4.1) на каждом временном шаге использовать граничные условия первого рода.

Прежде всего была исследована устойчивость течения, отвечающего спонтанной закрутке жидкости между неподвижными дисками. Решение без вращения потеряло устойчивость при отсосе, когда число Рейнольдса превысило критическое значение $\text{Re}^* = 6,5$ и эволюционировало к ранее найденному стационарному решению с вращением. При этом до чисел $\text{Re} \sim 9$ эволюция носила монотонный характер, а при больших — осцилляционный.

Результаты анализа устойчивости отражены на фиг. 1 и 2: устойчивым режимам отвечают сплошные рамки, неустойчивым — штриховые.

В случае вдува устойчивы только одно-двух ячейные режимы течения типа a (фиг. 1), азимутальная скорость которых нигде в области $0 \leq z \leq 1$ знака не меняет. Эти режимы существуют при всех значениях чисел Re и K . Все дополнительные решения, отвечающие знакопеременной функции $\omega(z)$, неустойчивы. Расчеты показали, что с ростом $|Re|$ устойчивые решения стремятся к невязкому пределу (2.4) или (2.7), если $K > \pi/2$. В последнем случае реализуются решения с внутренним пограничным слоем. Таким образом, для любых заданных Re и K в случае вдува устойчивое решение единственно.

В случае отсоса картина течения претерпевает существенные изменения. Необходимо отметить, что наличие нескольких стационарных устойчивых режимов течения (фиг. 2). Так, кроме одноячейных решений типа A со знакопостоянной азимутальной скоростью существуют устойчивые одноячейные решения типа B_2 и C_1' со знакопеременной $\omega(z)$. Наличие нескольких устойчивых стационарных решений тесно связано с упоминавшейся ранее бифуркацией вращения. Кривая 2 на фиг. 2, ограничивающая область существования дополнительного устойчивого решения B_2 , начинается в точке $K=0$, $Re=Re^*=6,5$. В области правее кривой 2 решения бистабильны. В зависимости от начального условия ($\omega_0(z)$ знакопостоянна или меняет знак внутри области течения) эволюция приводит к тому или иному стационарному решению. Отметим, что правее кривой 2 появляется два дополнительных стационарных решения, но только одно из них устойчиво. Выше кривой 3 появляются еще два новых неустойчивых стационарных решения. При переходе через кривую 4 одно из этих решений C_1 становится устойчивым, при этом его топологическая структура несколько меняется. Это решение имеет две ячейки и знакопеременное вращение. Оно отвечает большим подъемным силам, действующим на пористый вращающийся диск.

Таким образом, решения с большой подъемной силой, о которых шла речь в предыдущем разделе, в некотором диапазоне параметров Re , K оказываются устойчивыми, а точнее — метастабильными. Им соответствует фронтальная часть поверхности с $F > 0$ на фиг. 3. К этим решениям, в частности, эволюционируют двух-трехячейные распределения скорости $v_z(z)$ со знакопеременной $\omega(z)$. Однако при $Re > 20$ стационарное решение с большой подъемной силой все же теряет устойчивость и возникает периодическое по времени решение, т. е. рождается устойчивый предельный цикл. Например, для случая $Re=30$, $K=20$ решение является периодическим с безразмерным периодом $T=0,4$. При дальнейшем увеличении зависимость от времени усложняется.

Такое поведение решения краевой задачи (4.1)–(4.3) качественно напоминает поведение решений динамических систем, в частности системы Лоренца. Поэтому не исключено, что существует критическое число $Re^{cr}(K)$, при котором притягивающее множество нестационарных решений обретет черты странного аттрактора и решение станет стохастическим. К сожалению, исследование поведения решения нестационарной краевой задачи (4.1)–(4.3) эволюционным путем с ростом Re становится все более затруднительным, а наличие дополнительного параметра K еще больше усложняет задачу. Поэтому возникновение стохастичности для точных решений уравнений Навье — Стокса, каковыми являются рассматриваемые автомодельные решения, требует дополнительных аналитических и численных исследований.

Другим нетривиальным свойством решений с отсосом является неклассический невязкий предел при $Re \rightarrow \infty$. Как уже указывалось в разд. 2, при наличии пограничного слоя на пористом диске при $z=1$, который реализуется лишь в случае отсоса, невязкое решение может вести себя весьма нестандартным образом (см. (2.15)). Для указанного реше-

ния не выполняются не только условия прилипания, но и условия непротекания (1). Численные расчеты при больших Re показали, что именно этот невязкий предел оказывается устойчивым в смысле автомодельной эволюции. Характерные профили скоростей представлены на фиг. 5 при $Re=100$, $K=2$. К этому пределу стремятся оба неустойчивых одноячейстых решения A' и B_2 (фиг. 2), причем бистабильность течения сохраняется и при $Re \gg 1$, что согласуется с (2.15).

Проблема устойчивости решений рассмотрена лишь в классе произвольных автомодельных возмущений. В общем случае она весьма обширна и должна стать предметом самостоятельных исследований.

5. Обсуждение результатов. Хотя в первоначальной постановке задача об автомодельных решениях формулируется в бесконечной области, все результаты сохраняют силу и для диска конечного радиуса R , если при $r=R$ поставить следующие однородные условия:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (5.1)$$

Совместимые с кармановской автомодельностью (разд. 1) условия (5.1) не являются стандартными для гидродинамики. Второе из них выражает требование отсутствия вращательного касательного напряжения

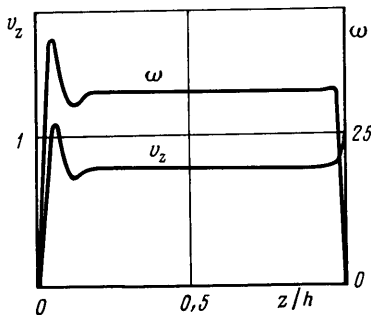
$$\tau_{r\varphi} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v_r}{r} \right) \right] \quad (5.2)$$

Для двух других интерпретация затруднительна. Поэтому практическая значимость класса автомодельных решений зависит от того, осуществляется ли в течении переход от достаточно произвольных условий при $r=R$ к условиям (5.1) на некотором радиусе $r_0 < R$. Но этого мало. Если при $r=R$ поставить условие $v_\varphi=0$, то самовращение окажется невозможным, несмотря на то, что условие (5.2) его допускает. Это следует из уравнения (1.3), записанного для циркуляции

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2}$$

Поскольку уравнение не содержит самой величины Γ , для него справедлив двухсторонний принцип максимума [13]: максимум и минимум достигаются на границе области. Значит, если на границе $\Gamma=0$, то произвольное начальное возмущение будет затухать. Но этот безусловно верный вывод относится лишь к течениям, «закрепленным» на границе условием $\Gamma=0$, что для реальных течений, вообще говоря, не выполняется.

Одним из путей приближенной экспериментальной реализации условия (5.2) является задание надлежащего внешнего вращения при $r=R$. Но тогда проблема бифуркации вращения приобретает иной смысл и должна быть переформулирована. Пусть на границе $r=R$ дано распределение $\omega_0(z)$. Тогда при $Re < Re^* = 6,5$ стационарное автомодельное решение $\omega_\alpha(z) \equiv 0$. В этих условиях следует ожидать возникновения неавтомодельной зоны, где вращение быстро затухает и в автомодельном ядре течения практически отсутствует. В случае $Re > Re^*$ $\omega_\alpha(z) \neq 0$, так что вращение должно проникать в ядро и достигать там вполне определенной величины, зависящей лишь от значения Re , но не от ω_0 ! С точки



Фиг. 5

зрения приведенных рассуждений бифуркация вращения означает качественную перестройку потока при $Re=Re^*$, что допускает экспериментальную проверку.

С этой целью были поставлены специальные опыты, где в качестве пористого диска была использована жесткая, но довольно редкая металлическая сетка, на которой скорее выполнялись условия скольжения, нежели прилипания. Для того чтобы результаты экспериментов можно было сопоставить с теорией, была рассчитана задача с условиями скольжения на пористом диске, которые в переменных (1.6) имеют вид

$$W''(x_m)=0, \gamma'(x_m)=0 \quad (5.3)$$

В этом случае также имеет место бифуркация вращения одноячейстого решения. Критическое число Рейнольдса составляет $Re_s^*=1,7$.

В опытах для обнаружения вращения на внешней границе дисков создавалась достаточно большая постоянно действующая закрутка течения, без которой вращение не наблюдалось. При помощи визуализации подкрашенными струйками было обнаружено, что при $Re < 1,7$ в приосевой области течение остается незакрученным при всех доступных в опыте внешних закрутках. При $Re \approx 1,7 \pm 0,1$ происходит перестройка течения с возникновением вращения вблизи оси, не зависящего от величины внешнего вращения. Тем самым проведенные эксперименты подтверждают существование бифуркации вращения и говорят об устойчивости вращательного режима течения.

Таким образом, утверждение об устойчивости вторичного режима с вращением относительно автомодельных возмущений, полученного численно эволюционным путем (разд. 4), оказывается верным и для любых возмущений. Это позволяет надеяться, что решения с большой подъемной силой, устойчивые относительно автомодельных возмущений, можно реализовать экспериментально, хотя следует иметь в виду, что в условиях неединственности они могут оказаться метастабильными с неизвестным «запасом» устойчивости.

Для экспериментальной реализации двухъячейстых течений с большими подъемными силами типа C_1' на фиг. 2 граничные условия при $r=R$ должны соответствовать двухъячейстой структуре течения. Практически это означает необходимость сильного периферийного вдува с интенсивной закруткой. С этой точки зрения представляется совершенно естественным возникновение больших подъемных сил в случае отсоса с противовращением, что, по всей вероятности, стабилизирует течение с зоной высокого давления под диском. Данные соображения было бы интересно подвергнуть экспериментальной проверке.

Все результаты получены для ламинарных течений. Но, поскольку найденные решения характеризуются объемными градиентами и внутренними пограничными слоями, можно предположить, что турбулентность будет носить характер свободной турбулентности. При этом результаты анализа сохраняют силу, если ввести постоянную турбулентную вязкость [6]. Эти соображения дают основание для более глубокого экспериментального исследования рассматриваемого движения с целью не только его изучения, но и возможных практических приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karman Th.* Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. В. 1. Н. 4. S. 232–252.
2. *Parter S. V.* On the swirling flow between rotating coaxial disks: A survey // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1982. V. 942. P. 258–280.
3. *Zandberger P. J., Dijkstra D.* Von Karman swirling flows // Annual Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 465–491.
4. *Batchelor G. K.* Note on a class of solutions of the Navier (Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1951. V. 4. Pt. 1. P. 29–41.

5. Гольдштик М. А., Яворский Н. И. Течение между пористым вращающимся диском и плоскостью: Препринт № 152. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1987. 42 с.
6. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
7. Dijkstra D. On the relation between adjacent inviscid cell type solutions to the rotating-disk equations // J. Eng. Math. 1980. V. 14. № 2. V. 133-154.
8. Юдович В. И. О задаче протекания идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. № 3. С. 561-564.
9. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
10. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. Elcrat A. R. On the Radial Flow of a Viscous Fluid between Porous Disks // Arch. Rational Mech. Anal. 1976. V. 61. № 1. P. 91-96.
12. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 589 с.
13. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2: Пер. с нем. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 554 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
19.IV.1988