МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1989

УДК 532.526.5

ЗУБЦОВ А. В.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАСПАДА ВИХРЕВОЙ НИТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрено осесимметричное течение несжимаемой жидкости. Получено точное решение уравнений Эйлера, соответствующее распаду прямолинейной вихревой нити интенсивности Γ_0 на вихревую нить меньшей интенсивности и коническую вихревую поверхность. Показано, что за точкой распада в области, ограниченной конической вихревой поверхностью, возникают возвратные течения жидкости. Исследование задачи с учетом вязких эффектов при больших числах Рейнольдса позволило установить связи между свободными параметрами, входящими в решение уравнений Эйлера. Полученные результаты могут оказаться полезными при исследовании задачи о распаде закрученной струи, решению которой в последние годы уделяется большое внимание [1, 2].

1. Введем цилиндрическую систему координат x, r, φ. Через U, V, W обозначим осевую, радиальную и азимутальную составляющие скорости, P — статическое давление. Уравнения Эйлера допускают осесимметричное решение вида

$$U=f_1(r),\qquad V=0,\qquad W=f_2(r),\qquad P=-\int\limits_r^\infty \frac{f_2^2\,dr}{r} \tag{1.1}$$

где f_1, f_2 — произвольные функции [3].

Рассмотрим такие течения, для которых при $x\to-\infty$ заданы значение циркуляции азимутальной составляющей скорости и величина продольной составляющей потока импульса

$$\oint rW\,d\varphi=2\pi\Gamma_0,\qquad 2\pi\int\limits_0^\infty (U^2+P)\,r\,dr=I_0 \tag{1.2}$$

где Γ_0, I_0 — произвольные постоянные.

Решение (1.1), непрерывное при $r>0$ и удовлетворяющее условиям (1.2), имеет вид

$$U=\frac{\Gamma_0}{\sqrt{2}\,r},\qquad V=0,\qquad W=\frac{\Gamma_0}{r},\qquad P=-\frac{\Gamma_0^2}{2r^2} \tag{1.3}$$

Решение (1.3) соответствует гидродинамической модели прямолинейной вихревой нити, в которой сосредоточен поток продольного импульса. Вне вихревой нити суммарный поток продольного импульса равен нулю.

Найдем осесимметричное решение уравнений Эйлера, зависящее лишь от одной размерной постоянной Γ_0 и отличное от цилиндрического решения (1.3), но асимптотически совпадающее с ним при $x\to-\infty$ и $r=\text{const}$.

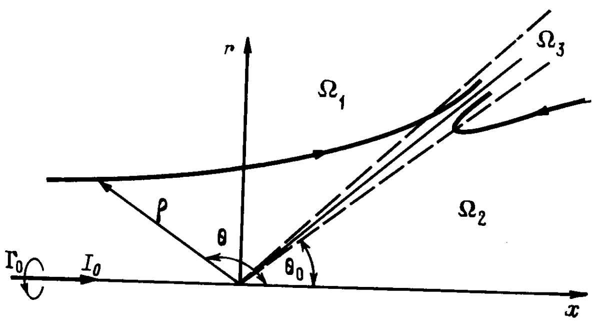
Из теории размерностей следует, что искомое решение должно быть автомодельным. В сферической системе координат ρ, θ, φ функцию тока Ψ, составляющие скорости U_ρ, U_θ, W и величину полной энергии

H представим в виде

$$\Psi=\Gamma_0\rho F(\theta),\quad u_\rho=\frac{\Gamma_0 F'(\theta)}{\rho\sin\theta},\quad u_\theta=-\frac{\Gamma_0 F(\theta)}{\rho\sin\theta}$$

$$W=\frac{\Gamma_0\gamma}{\rho\sin\theta},\quad H=\frac{\Gamma_0^4 h}{2\Psi^2}$$

где γ, h — свободные безразмерные константы, которые могут принимать различные значения в областях, разделенных поверхностями разрыва.



Фиг. 1

Функция F удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению и граничным условиям

$$F''-F'\operatorname{ctg}\theta=-\frac{h\sin^2\theta}{F^3} \tag{1.4}$$

$$F(0)=F(\pi)=0 \tag{1.5}$$

Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$F(\theta)=\pm\sqrt{A-B\cos\theta-D\cos 2\theta} \tag{1.6}$$

где свободные постоянные A, B, D связаны с величиной h

$$8D(D+A)+B^2=4h.$$

Легко видеть, что непрерывное решение уравнения (1.4) ($0<\theta<\pi$), удовлетворяющее граничным условиям (1.5), тождественно совпадает с решением (1.3). Поэтому необходимо потребовать, чтобы коэффициенты, входящие в решение (1.6), имели разрыв хотя бы на одной поверхности, которую обозначим через $\theta=\theta_0$. Для определенности будем считать, что $\theta_0<\pi/2$, а $\Psi>0$ при $\pi>\theta>\theta_0$. Через Ω_1 обозначим область течения, где $\pi>\theta>\theta_0$, а через Ω_2 — область, где $\theta_0>\theta>0$. Коэффициенты, определяющие решение задачи в областях Ω_1 и Ω_2, будем обозначать индексами 1 и 2.

Удовлетворяя граничное условие $F(\pi)=0$ и начальные условия при $x\to-\infty$ и $r=\text{const}$, получим окончательный вид решения задачи в области Ω_1

$$\Psi=\Gamma_0\rho\sqrt{\frac{\sin^2\theta-B_1(1+\cos\theta)^2}{2}},\quad W=\frac{\Gamma_0}{\rho\sin\theta}$$

$$P=-\frac{\Gamma_0^2}{2\rho^2\sin^2\theta}\left[1-B_1(1+\cos\theta)\right] \tag{1.7}$$

Из условия, что в решении (1.7) функция, стоящая под корнем в выражении для Ψ, должна быть положительной при $\pi>\theta>\theta_0$, следует ограничение на возможные значения постоянной $B_1<\operatorname{tg}^2(\theta_0/2)$.

Из граничного условия $F(0)=0$ следует соотношение $A_2=B_2+D_2$. Решение в области Ω_2 представляется в виде

$$\Psi=-\Gamma_0\rho\sqrt{2D_2\sin^2\theta+B_2(1-\cos\theta)},\qquad W=\frac{\Gamma_0\gamma_2}{\rho\sin\theta}$$

$$P=-\frac{\Gamma_0^2}{2\rho^2\sin^2\theta}[\gamma_2^2+B_2(1-\cos\theta)] \tag{1.8}$$

Решение (1.7), (1.8) можно рассматривать как предельное решение задачи ($\mathrm{Re}=\Gamma_0/\nu\to\infty$) о распаде вихревой нити с интенсивностью Γ_0 и потоком продольного импульса I_0. В точке $x=0$ вихревая нить с интенсивностью Γ_0 расщепляется на вихревую нить с интенсивностью $\Gamma_0\gamma_2$ ($\gamma_2<1$) и бесконечно тонкую вихревую коническую поверхность с интенсивностью Γ_0 $(1-\gamma_2)$. Поверхность $\theta=\theta_0$, разделяющая области прямого и возвратного течений жидкости (фиг. 1), является поверхностью стоков, интенсивность которых определяется значением функции тока при $|\theta-\theta_0|\to 0$.

2. Особый характер поведения решения уравнений Эйлера при $\theta\to\theta_0$ дает основание полагать, что в окрестности конической поверхности $\theta=\theta_0$ возникает тонкий слой смешения двух потоков жидкости (область Ω_3, фиг. 1), в котором вязкие силы оказывают при $\mathrm{Re}\gg 1$ существенное влияние на характеристики течения. Исследование уравнений движения в слое смешения позволяет получить дополнительные соотношения между свободными коэффициентами θ_0, γ_2, B_1, B_2, D_2, входящими в решение (1.7), (1.8) уравнений Эйлера.

Очевидно, что при $x<0$ и $\mathrm{Re}\gg 1$ вихревая нить с интенсивностью Γ_0 имеет собственную вихревую структуру, сформировавшуюся под влиянием сил вязкости (область Ω_0). Характерный поперечный размер области Ω_0 при $x\to -0$ обозначим через δ_0. Естественно считать, что $\delta_0\to 0$ при $\mathrm{Re}\to\infty$. В соответствии с постановкой задачи поток продольного импульса через поперечное сечение области Ω_0 есть величина, равная I_0. Поэтому порядок величины продольной составляющей скорости и расхода жидкости в области Ω_0 определяется следующим образом: $U\sim\sqrt{I_0}/\delta_0$, $Q\sim\sqrt{I_0}\delta_0$. В точке $x=0$ область Ω_0 расслаивается, часть расхода $\Delta Q\sim Q$ и часть продольного импульса $\Delta I\sim I_0$ уходят в слой смешения.

Расход жидкости, поступающей в слой смешения из внешнего невязкого потока, согласно решению (1.7), (1.8), есть величина порядка $\Gamma_0\rho\sin\theta_0$. При $\rho\gg\rho_0\sim\sqrt{I_0}\delta_0/\Gamma_0\sin\theta_0$ решение задачи в слое смешения будет в первом приближении автомодельным (область Ω_3). При $\rho\gg\rho_0$ решение для функции тока может быть представлено в виде

$$\Psi=\Gamma_0\rho[\psi_{30}(\theta,\mathrm{Re},\theta_0)+\Delta(\rho_0/\rho)\psi_{31}(\theta,\mathrm{Re},\theta_0)] \tag{2.1}$$

где $\Delta(\rho_0/\rho)\to 0$ при $\rho_0/\rho\to 0$.

Если учесть, что на характеристики течения в области Ω_3 существенное влияние оказывают силы вязкости, а расход жидкости в области Ω_3 определяется в основном поступлением ее из невязкой области течения, то составляющие скорости и статическое давление, соответствующие первому члену разложения (2.1), можно представить в виде

$$u_\rho=\frac{\Gamma_0}{\rho}\mathrm{Re}\,u_3(t,\mathrm{Re},\theta_0),\qquad u_\theta=\frac{\Gamma_0}{\rho}v_3(t,\mathrm{Re},\theta_0)$$

$$W=\frac{\Gamma_0}{\rho\sin\theta_0}w_3(t,\mathrm{Re},\theta_0),\qquad P=\frac{\Gamma_0^2}{2\rho^2\sin^2\theta_0}p_3(t,\mathrm{Re},\theta_0) \tag{2.2}$$

$$t=(\theta-\theta_0)\mathrm{Re}$$

Из уравнений Навье — Стокса следует, что функции u_3, v_3, w_3, p_3 должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_3''-v_3u_3'+u_3^2+\frac{u_3'}{\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0}=O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}^2\sin^2\theta_0}\right)$$

$$w_3''-v_3w_3' + \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0}(w_3'-v_3w_3) = O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}^2\sin^2\theta_0}\right) \tag{2.3}$$

$$p_3' = 2\sin^2\theta_0(v_3''+2u_3'-v_3v_3') + \frac{2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0}(w_3^2+v_3'\sin^2\theta_0) + O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}^2\sin^2\theta_0}\right)$$

$$u_3+v_3' + \frac{v_3}{\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0} = O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}^2\sin^2\theta_0}\right)$$

Граничные условия для искомых функций при $t\to\pm\infty$ можно получить из условия асимптотического сращивания решения (2.2) с решениями в областях Ω_1 и Ω_2.

Исследование решения уравнений (2.3) необходимо проводить при условии, что $\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0 \gg 1$, в противном случае области течения Ω_2 и Ω_3 становятся асимптотически неразличимыми и задача о распаде вихревой нити вырождается в задачу об определении вязкой структуры прямолинейной вихревой нити. Решение уравнений (2.3) представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $(\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0)^{-1}$

$$u_3 = u_{30} + (\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0)^{-1}u_{31} + \ldots,\quad v_3 = v_{30} + (\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0)^{-1}v_{31} + \ldots$$
$$w_3 = w_{30} + (\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0)^{-1}w_{31} + \ldots,\quad p_3 = p_{30} + (\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,\theta_0)^{-1}p_{31} + \ldots \tag{2.4}$$

Главные члены разложения (2.4) определяются из решения системы уравнений

$$u_{30}''-v_{30}u_{30}'+u_{30}^2=0,\quad u_{30}+v_{30}'=0 \tag{2.5}$$

$$w_{30}''-v_{30}w_{30}'=0,\quad p_{30}'=2\sin^2\theta_0(v_{30}''+2u_{30}'-v_{30}v_{30}') \tag{2.6}$$

$$u_{30}\to 0,\qquad v_{30}\to -\frac{\sqrt{\sin^2\theta_0-B_1(1+\cos\theta_0)^2}}{\sqrt{2}\sin\theta_0}$$
$$w_{30}\to 1,\ p_{30}\to -1+B_1(1+\cos\theta_0),\ t\to\infty$$
$$u_{30}\to 0,\qquad v_{30}\to \frac{\sqrt{2D_2\sin^2\theta_0+B_2(1-\cos\theta_0)}}{\sin\theta_0} \tag{2.7}$$
$$w_{30}\to\gamma_2,\ p_{30}\to -\gamma_2^2-B_2(1-\cos\theta_0),\ t\to-\infty$$
$$v_{30}=0,\ t=0$$

Из уравнений (2.5) следует, что функция v_{30} удовлетворяет уравнению Риккати

$$v_{30}' - \frac{1}{2}v_{30}^2 = C_1 t - \frac{C_2^2}{2}$$

Из уравнений и граничных условий для функций v_{30}, p_{30} следует, что

$$C_1=0,\ \sin^2\theta_0-B_1(1+\cos\theta_0)^2=2[2D_2\sin^2\theta_0+B_2(1-\cos\theta_0)] \tag{2.8}$$
$$1-B_1(1+\cos\theta_0)=\gamma_2^2+B_2(1-\cos\theta_0)$$

С учетом соотношений (2.8) решение уравнений (2.5), (2.6), удовлетворяющее граничным условиям (2.7), представляется в виде

$$u_{30}=\frac{2C_2^2e^\xi}{(1+e^\xi)^2},\qquad v_{30}=\frac{C_2(1-e^\xi)}{1+e^\xi},\qquad w_{30}=\frac{\gamma_2+e^\xi}{1+e^\xi}$$

$$p_{30}=-1+B_1(1+\cos\theta_0)+2\sin^2\theta_0\left[u_{30}(\xi)+\frac{1}{2}(v_{30}^2(\infty)-v_{30}^2(\xi))\right]$$

$$\xi=C_2t,\qquad C_2=\sqrt{\frac{\sin^2\theta_0-B_1(1+\cos\theta_0)^2}{2\sin^2\theta_0}} \tag{2.9}$$

Используя решение (2.9), можно определить поток продольного импульса через поперечное сечение слоя смешения

$$I(\Omega_3)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}u_\rho{}^2\rho^2\sin\theta_0\,dt\,d\varphi=\frac{4\pi C_2{}^3}{3}\Gamma_0{}^2\,\mathrm{Re}\sin\theta_0$$

На большом расстоянии $\rho\gg\rho_0$ продольная составляющая скорости u_ρ в слое смешения определяется в первом приближении величиной потока продольного импульса, источником которого для области Ω_3 является область Ω_0. При этом расход жидкости, подсасываемой через верхнюю границу слоя смешения ($t\to+\infty$), равен расходу жидкости, подсасываемой через его нижнюю границу ($t\to-\infty$), а суммарный поперечный перепад давления обращается в ноль. Таким образом, построение первого приближения для решения в слое смешения при $\rho\gg\rho_0$ позволило получить два соотношения (2.8), связывающих свободные константы, входящие в решение для внешней невязкой области течения.

Построение второго приближения для составляющих скорости u_ρ, u_θ позволяет учесть влияние потока продольного импульса, поступающего в область Ω_3 через внешние границы слоя смешения. Уравнения для функций u_{31}, v_{31} имеют вид

$$u_{31}''-v_{30}u_{31}'-v_{31}u_{30}'+2u_{30}u_{31}+u_{30}'=0 \qquad (2.10)$$

$$u_{31}+v_{31}'+v_{30}=0 \qquad (2.11)$$

$$u_{31}\to\frac{[\cos\theta_0+B_1(1+\cos\theta_0)]\,\mathrm{tg}\,\theta_0}{\sqrt{2(\sin^2\theta_0-B_1(1+\cos\theta_0)^2)}},\qquad t\to+\infty \qquad (2.12)$$

$$u_{31}\to-\frac{(4D_2\cos\theta_0+B_2)\,\mathrm{tg}\,\theta_0}{2\sqrt{2D_2\sin^2\theta_0+B_2(1-\cos\theta_0)}},\qquad t\to-\infty$$

$$v_{31}=0,\ t=0$$

Из (2.10), (2.11) следует уравнение для определения функции v_{31}

$$\frac{dv_{31}}{d\xi}-\frac{1-e^\xi}{1+e^\xi}v_{31}=\beta_0+\beta_1\xi+\frac{2}{1+e^\xi} \qquad (2.13)$$

Общее решение уравнения (2.13) имеет вид

$$v_{31}=\frac{e^\xi}{(1+e^\xi)^2}[\beta_2+(\beta_0+\beta_1\xi)(e^\xi-e^{-\xi}+2\xi)-\beta_1(e^\xi+e^{-\xi}+\xi^2)+2(\xi-e^{-\xi})] \qquad (2.14)$$

где β_0, β_1, β_2 — свободные константы.

Из (2.11), (2.13) следует асимптотический предел для функции u_{31} при $\xi\to\pm\infty$

$$u_{31}\to\pm C_2(1-\beta_1),\ \xi\to\pm\infty \qquad (2.15)$$

Из граничных условий (2.12) и соотношений (2.15) следует условие, связывающее свободные константы, входящие в решение, справедливое во внешней невязкой области течения

$$\cos\theta_0+B_1(1+\cos\theta_0)=4D_2\cos\theta_0+B_2 \qquad (2.16)$$

Из уравнений (2.8), (2.16) можно найти зависимость коэффициентов B_1, B_2, D_2 от γ_2 и θ_0

$$4D_2=\gamma_2{}^2-\frac{1-\gamma_2{}^2}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{\theta_0}{2},\qquad B_1=\frac{1-\gamma_2{}^2}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\theta_0}{2},\qquad B_2=\frac{1-\gamma_2{}^2}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{\theta_0}{2} \qquad (2.17)$$

С учетом зависимостей (2.17) решение задачи в областях Ω_1 и Ω_2 представляется в виде, зависящем от двух параметров θ_0 и γ_2

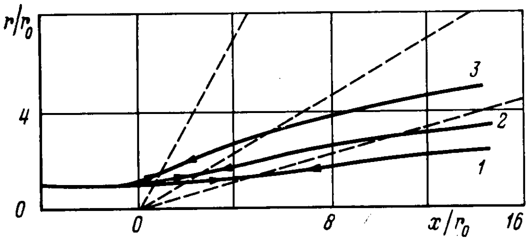
$$\Psi=\frac{\Gamma_0\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin^2\theta-\frac{1-\gamma_2^2}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta_0}{2}(1+\cos\theta)^2},\qquad W=\frac{\Gamma_0}{\rho\sin\theta}$$

$$P=-\frac{\Gamma_0^2}{2\rho^2\sin^2\theta}\left[1+\frac{\gamma_2^2-1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta_0}{2}(1+\cos\theta)\right],\qquad \pi>\theta>\theta_0$$

$$\Psi=-\frac{\Gamma_0\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{\gamma_2^2\sin^2\theta+\frac{1-\gamma_2^2}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_0}{2}(1-\cos\theta)^2},\qquad W=\frac{\Gamma_0\gamma_2}{\rho\sin\theta}$$

$$P=-\frac{\Gamma_0^2}{2\rho^2\sin^2\theta}\left[\gamma_2^2+\frac{1-\gamma_2^2}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_0}{2}(1-\cos\theta)\right],\qquad \theta_0>\theta>0$$

Уравнение поверхности тока $\Psi(\rho,\theta)=\mathrm{const}=\pm\Psi_0$ удобно предста-



Фиг. 2

вить в переменных r, θ

$$\frac{r}{r_0}=\frac{\Gamma_0\rho\sin\theta}{\sqrt{2}\Psi},\quad \theta_0<\theta<\pi;\qquad \frac{r}{r_0}=-\frac{\Gamma_0\rho\sin\theta}{\sqrt{2}\Psi},\quad \theta_0>\theta>0$$

где $r_0=\sqrt{2}\Psi_0/\Gamma_0$ — расстояние поверхности тока от оси симметрии при $\theta\to\pi$. Образующие поверхности тока для случая $\gamma_2=0$ и $\theta_0=15$, 30, 60° представлены на фиг. 2 (кривые *1*, *2*, *3*).

Отношение квадрата интенсивности вихревой нити к величине потока продольного импульса через область Ω_3 связано с параметрами γ_2, θ_0, Re соотношением

$$\frac{\Gamma_0^2}{I(\Omega_3)}=\frac{6}{\pi(1+\gamma_2^2)^{1/2}}\frac{1}{\mathrm{Re}\sin\theta_0}\tag{2.18}$$

Так как $I(\Omega_3)$ является величиной порядка I_0, то из соотношения (2.18) следует, что распад вихревой нити ($\mathrm{Re}\sin\theta_0\gg1$) при больших числах Рейнольдса может возникать, когда относительная интенсивность вихревой нити мала, $\Gamma_0^2/I_0\ll1$. Для определения механизма распада вихревой нити и зависимости $\theta_0=\theta_0(\mathrm{Re})$ при $\mathrm{Re}\to\infty$ необходимо дальнейшее исследование локальной картины течения жидкости на продольных масштабах порядка и меньше ρ_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбович С.* Распад вихря. // Механика. Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1979. Вып. 21. С. 160–196.
2. *Hall M. G.* Vortex breakdown // Ann. Rev. Fluid Mech. Palo Alto Calif., 1972. V. 4. P. 195–218.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 758 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.I.1988