МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1989

УДК 532.526:536.25

АГРАНАТ В. М., МИЛОВАНОВА А. В.

ТЕПЛООБМЕН И ТРЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

В настоящее время имеется значительное количество численных исследований ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине в условиях приближения Буссинеска и постоянной температуры поверхности (см. библиографию в [1]). Наиболее полными и основополагающими из них являются работы [1–4]. В [5, 6] получены аналитические формулы для коэффициентов трения и теплообмена. Однако, как справедливо отмечается в [4], метод возмущений, используемый в [5, 6], не позволяет получить удовлетворительные результаты для области изменения параметра плавучести $\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^{5/2}$ от 0,1 до 1, где наиболее существенно проявляется взаимное влияние свободной и вынужденной конвекции. В настоящей работе при помощи асимптотического метода [7, 8] получены по аналогии с [9, 10] приближенные формулы для коэффициентов трения и теплообмена при ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине в приближении Буссинеска для параметра плавучести $\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^{5/2}\leq 1$ и числа Прандтля $\mathrm{Pr}\sim 1$ и исследованы критические значения параметра плавучести, при которых происходит «разрушение» пограничного слоя [1] и модель пограничного слоя становится неприменимой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плоской горизонтальной полубесконечной пластины с постоянной температурой поверхности T_w вязким теплопроводным потоком газа, имеющим вдали от пластины постоянные скорость u_∞ и температуру T_∞. Термогравитационные силы, обусловленные неоднородностью поля температуры, индуцируют продольный градиент давления. Уравнения ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине в безразмерном виде имеют вид [1–6]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\pm\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^{5/2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_y^\infty \theta\,dy\right]$$

$$\mathrm{Pr}\left(u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

Здесь $\mathrm{Gr}=g(T_w-T_\infty)\beta L^3/\nu^2$ – число Грасгофа, $\mathrm{Re}=u_\infty L/\nu$ – число Рейнольдса, $\theta=(T-T_\infty)/(T_w-T_\infty)$ – безразмерная температура. Верхний и нижний знаки в уравнении движения относятся к течениям над и под пластиной соответственно.

В качестве характерных значений при обезразмеривании приняты следующие величины: для продольной координаты – L, для поперечной – $L/\sqrt{\mathrm{Re}}$, для продольной компоненты скорости – u_∞, для поперечной – $u_\infty/\sqrt{\mathrm{Re}}$.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &y=0:\quad u=v=0,\quad \theta=1\\ &y=\infty:\quad u=1,\quad \theta=0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Расчет трения и теплообмена. Введем функцию тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению неразрывности, и новую квазиавтомодельную переменную η, выбор которой должен отражать поведение толщины пограничного слоя.

В связи с этим отметим, что автомодельное решение задачи о смешанной конвекции на горизонтальной пластине может существовать только при определенной связи между изменениями скорости внешнего потока u_∞ и температуры стенки T_w [4]. Если предположить, что скорость $u_\infty(x)$ и температура $T_w(x)$ изменяются по степенным законам с показателями m и n соответственно, то для существования автомодельного решения необходимо выполнение следующего соотношения [4]:

$$n=\frac{5m-1}{2}$$

В рассматриваемом случае, когда T_w=const и u_∞=const [1—6], т. е. при $n=m=0$, задача не приводится к автомодельной постановке. Поэтому попытаемся при помощи новой переменной η привести задачу к такой постановке, локально-автомодельное решение которой максимально приближено к неавтомодельному.

Заметим, что при выборе $\psi\sim\sqrt{x}$ и $\eta\sim x^{-1/2}$ в [1—4] было получено, что в локально-автомодельной постановке член, отвечающий за плавучесть, содержит параметр $\xi=|\mathrm{Gr}_x|/\mathrm{Re}_x^{5/2}$ порядка $\sqrt{x}$. С ростом x этот член существенно изменяется, вследствие чего пренебрежение производными по ξ [2] приводит к тому, что расчет трения в локально-автомодельной постановке дает значительную погрешность относительно локально-неавтомодельного решения. Поэтому остановим свой выбор на таких зависимостях ψ и η от x, чтобы, во-первых, было удовлетворено условие u_∞=const, т. е. $\psi\sim x^{1/2}$ [1—4], и, во-вторых, член с плавучестью в локально-автомодельной постановке не содержал явной зависимости от x.

Исходя из сказанного выше, введем ψ и η по формулам

$$\psi(x,y)=A\sqrt{2x}f(x,\eta),\qquad u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$\eta=\frac{Ayx^{-3/8}}{\sqrt{2}},\qquad A=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^{5/2}}\right)^{1/5} \tag{2.1}$$

Тогда уравнения движения и энергии (1.1) и соответствующие им граничные условия (1.2) примут вид

$$f'''_{\eta\eta\eta}+x^{-1/8}ff_{\eta\eta}''=\Phi(x,\eta)\equiv\frac{1}{4}x^{-1/8}(f_\eta')^2+$$
$$+2x^{7/8}(f_\eta'f_{x\eta}''-f_x'f_{\eta\eta}'')\pm\int_\eta^\infty\left(\theta_\eta'\eta-\frac{8}{3}\theta_x'x\right)d\eta$$
$$\theta_{\eta\eta}''+\mathrm{Pr}\,x^{-1/8}f\theta_\eta'=2\,\mathrm{Pr}\,x^{7/8}(f_\eta'\theta_x'-f_x'\theta_\eta') \tag{2.2}$$
$$\eta=0:\quad f_\eta'=f=0,\quad \theta=1$$
$$\eta=\infty:\quad f_\eta'=A^{-2}x^{-1/8},\quad \theta=0$$

В уравнении движения (2.2) и ниже верхний знак соответствует первому типу смешанной конвекции, а нижний — второму (силы плавучести соответственно способствуют или препятствуют вынужденной конвекции [2]). Первый случай реализуется при обтекании нагретой ($T_w>T_\infty$) пластины сверху или холодной ($T_w<T_\infty$) пластины снизу, а второй — в противоположных ситуациях.

Заметим, что в новых переменных выражение для безразмерной продольной скорости u имеет вид

$$u=A^2x^{1/8}f_\eta'$$

и условие $f_\eta'|_{\eta=\infty}=x^{-1/8}A^{-2}$ соответствует постоянной скорости внешнего потока.

Цель дальнейшего анализа — найти в областях $0<\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^{5/2}\leqslant 1$, $\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^{5/2}<0$ приближенные аналитические формулы для безразмерных коэффициентов трения и теплообмена $a=f_{\eta\eta}''(x,0)$ и $b=\theta_\eta'(x,0)$, с помощью которых определяются напряжение трения τ_w и плотность теплового потока q_w на стенке

$$\tau_w=\sqrt{\frac{u_\infty^3\rho\mu}{2x'}}A^3x^{1/4}a$$
$$q_w=-\lambda(T_\infty-T_w)\sqrt{\frac{u_\infty}{2\nu x'}}Ax^{1/8}b \tag{2.3}$$

где x' — расстояние от передней кромки пластины.

Рассмотрим систему (2.2) в локально-автомодельной постановке, т. е. примем, что f_x', $f_{\eta x}''$, θ_x' равны нулю. Из первого уравнения (2.2) и граничных условий, следуя [7—10], получим интегральное соотношение

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^{-1/8}a\eta^3}{6}-\frac{x^{-1/8}\Phi(x,0)\eta^4}{24}-\ldots\right)\Big(a+\Phi(x,0)\eta+$$
$$+\Phi_\eta'(x,0)\frac{\eta^2}{2}+\ldots\Big)d\eta=A^{-2}x^{-1/8} \tag{2.4}$$

Используя [7], выразим из второго уравнения (2.2) величину $\Phi(x,0)$ в первом приближении

$$\Phi(x,0)\equiv\pm\int_0^\infty\theta_\eta'\eta\,d\eta\simeq\mp\frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(4/3)}\left(\frac{\mathrm{Pr}\,x^{-1/8}a}{6}\right)^{-1/3}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Подставляя $\Phi(x,0)$ в (2.4) и ограничиваясь двумя членами разложения, приходим к уравнению пятой степени

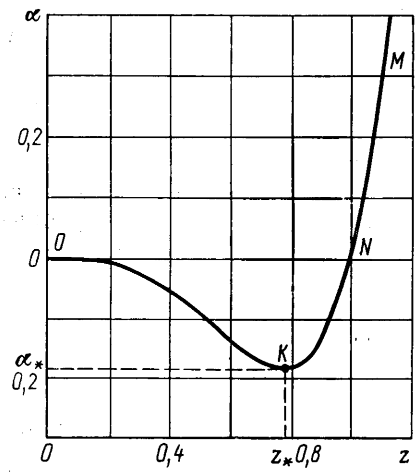
$$z^5-z^3=C\xi\,\mathrm{Pr}^{-1/3}\equiv\alpha,\qquad z=\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/3}$$
$$a_0\simeq A^{-3}x^{-1/4}\left[6\Gamma^3\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{-1/2},\qquad C=\pm\frac{3^{5/3}}{4}\Gamma^2\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma^{1/3}\left(\frac{4}{3}\right)\approx\pm3{,}0009 \tag{2.5}$$

Здесь a_0 — значение a при $\xi=0$, т. е. a_0 соответствует напряжению трения τ_{w0} для вынужденной конвекции несжимаемого газа на горизонтальной пластине [11, 12].

Уравнение (2.5) связывает неизвестную величину z, характеризующую относительное изменение напряжения трения в пограничном слое вследствие наличия естественной конвекции, с определяющим безразмерным параметром α. Для качественного анализа решений полученного алгебраического уравнения рассмотрим представленный на фигуре график функции $\alpha=\alpha(z)\equiv z^5-z^3$ для $z>0$. На графике точка $N=(1,0)$ соответствует случаю чисто вынужденной конвекции ($a=a_0$). Смешанной конвекции первого типа ($C>0$) отвечают положительные α и, следовательно, участок кривой NM, где значения $z>1$ ($a>a_0$). Принимая во внимание (2.3), получаем, что смешанная конвекция первого типа приводит к росту напряжения трения по сравнению с вынужденной конвекцией.

Двигаясь по участку NK кривой $\alpha=\alpha(z)$ от точки N в сторону отрицательных α, попадаем в область смешанной конвекции второго типа ($C<0$), которой соответствуют значения $z<1$. Следовательно, напряжение трения при смешанной конвекции второго типа меньше, чем при вынужденной. С уменьшением α от 0 до α_* коэффициент трения изменяется от a_0 до некоторого отличного от нуля значения $a_*=a_0 z_*^3$, причем при приближении к критической точке $K=(z_*, \alpha_*)$ величина $d\alpha/dz\to+0$, а $dz/d\alpha\to\infty$, т. е. $a_\xi'\to-\infty$, так как $\operatorname{sign}\alpha=-\operatorname{sign}\xi$.

Как указывается в [1], такое резкое исчезновение трения на стенке при $\xi\to\xi_*$ приводит к неограниченному росту толщины пограничного слоя и к его разрушению. В предотрывной области $x\leqslant x_*$, соответствующей значениям ξ, близким к ξ_*, происходит нарушение условий применимости уравнений (1.1) пограничного слоя [11]. Участок KO кривой на фигуре, соответствующий отрезку $[0, z_*]$, физически нереальный, так как на нем при $C<0$ с ростом ξ величина a растет, а не убывает. При сверхкритических значениях параметра $\alpha<\alpha_*=\alpha(z_*)$, как видно из фигуры, уравнение (2.5) не имеет положительных корней. Это свидетельствует о неприменимости модели пограничного слоя при $\alpha<\alpha_*$. Значение $\alpha_*=\alpha(z_*)$ является бифуркационным и находится из условия $d\alpha/dz=0$ при $z=z_*$. При $\alpha_*<\alpha<0$ необходимо учитывать неединственность решений уравнения (2.5), которая, по-видимому, связана с описанными в [2] сложностями численного решения задачи в указанной области. Все выводы, полученные из проведенного качественного анализа кривой (2.5), согласуются с известными теоретическими результатами [1—6]. Поэтому обратимся к количественному анализу этого уравнения.



Поскольку аналитически точно найти корни уравнения пятой степени (2.5) не удается, в соответствии с [2, 4] предположим, что $|z-1|\ll 1$ для $\xi\leqslant 1$, и перейдем от (2.5) к биквадратному уравнению относительно $(a/a_0)^{2/3}$, которое при $\xi\,\mathrm{Pr}^{-1/3}C>-1/4$ имеет единственный положительный корень. Этому корню соответствует значение

$$\frac{a}{a_0}\simeq\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4C\xi\,\mathrm{Pr}^{-1/3}}\right)\right]^{3/2},\qquad C\simeq\pm 3{,}0009 \tag{2.6}$$

Следует отметить, что для $C>0$ всегда существует решение (2.6), а для отрицательного C (для смешанной конвекции второго типа) при $\xi>\xi_*$ формула (2.6) приводит к комплексным значениям a. При этом

$$\xi_*=\frac{1}{4}\mathrm{Pr}^{1/3}|C|^{-1}\simeq\frac{1}{12}\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{2.7}$$

Критическое значение $\xi=\xi_*$ соответствует точке, при достижении которой модель пограничного слоя становится непригодной.

Сравнение формулы (2.6) с результатами локально-неавтомодельного решения [2] при $\mathrm{Pr}=0{,}7$ дает погрешность до 3% для $\mathrm{Gr}_x/\mathrm{Re}_x^{5/2}\in[-0{,}03, 1]$ (для всей области, исследованной в [2]). Следует заметить, что параметр плавучести входит в формулу (2.6) только с сомножителем $\Pr^{-1/3}$. Таким образом, увеличение числа Прандтля приводит к снижению влияния архимедовой силы на коэффициент трения, что подтверждается результатами работ [1, 3–6].

Сопоставление значения ξ_* вычисленного по формуле (2.7), с численными результатами работы [1] дает погрешность менее 5% для чисел $\Pr=0{,}5-10$.

Для того чтобы найти безразмерный коэффициент теплообмена b, обратимся к уравнению для безразмерной температуры (2.2). Следуя [7–10], с учетом двух первых членов асимптотического разложения получим соотношение

$$-b^{-1}=\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\Pr x^{-1/8} a\eta^3}{6}\right)\left(1-\frac{\Pr \Phi(x,0)x^{-1/8}\eta^4}{24}\right)d\eta$$

из которого вытекает формула

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^{-1}=\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1/3}\pm 0{,}5002\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}\xi \Pr^{-2/3}, \qquad b_0=-x^{-1/8}A^{-1}\Pr^{1/3}\left[6\Gamma^3\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{-1/2} \tag{2.8}$$

Здесь b_0 соответствует тепловому потоку q_{w0} при $\xi=0$, т. е. случаю вынужденной конвекции несжимаемого газа на горизонтальной пластине [11, 12]. Полученная формула дает совпадение до 4,5% с численными результатами работы [2] во всем диапазоне $Gr_x/Re_x^{5/2}$, исследованном в [2]. Для различных чисел Прандтля проводилось сравнение (2.8) с численными данными [4] в точках $\xi=1, 10$. Анализ показал, что для $\Pr=0{,}7$ и 1 погрешность формулы менее 3,5%, а для $\Pr=10$ она возрастает до 8%

Необходимо отметить, что использование метода [7] для решения задачи (1.1) в локально-автомодельной постановке при выборе $\psi\sim\sqrt{x}$ и $\eta\sim x^{-1/2}$ дает удовлетворительную точность (до 6%) по сравнению с численным локально-автомодельным решением [2], но приводит к значительному отклонению от локально-неавтомодельного решения [2]. Таким образом, хорошее совпадение локально-автомодельного решения (2.6) и (2.8) с локально-неавтомодельным [2] является следствием удачного выбора (2.1) квазиавтомодельной переменной $\eta\sim x^{-3/8}$. Поэтому можно предположить, что при ламинарной смешанной конвекции на горизонтальной пластине при $u_\infty=\mathrm{const}$ и $T_w=\mathrm{const}$ толщина динамического пограничного слоя $\delta\sim x^{3/8}$. Если для сравнения взять автомодельные постановки при вынужденной конвекции на горизонтальной пластине, при свободной конвекции на вертикальной пластине [12] и при смешанной конвекции на горизонтальной пластине для $T_w=\mathrm{const}$ и $u_\infty\sim x^{1/5}$ [13], то в этих случаях толщина пограничного слоя будет соответственно порядка $x^{1/2}$, $x^{1/4}$ и $x^{2/5}$. Видно, что зависимость $\delta\sim x^{3/8}$ наиболее близка к закону $\delta\sim x^{2/5}$.

Полученные в работе формулы можно рекомендовать для расчета ламинарной смешанной конвекции на изотермической горизонтальной пластине в широких диапазонах изменения параметра плавучести и числа Прандтля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schneider W., Wasel M. G.* Breakdown of the boundary-layer approximation for mixed convection above a horizontal plate // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1985. V. 28. № 12. P. 2307–2313.
2. *Чжэнь, Спэрроу, Мукоглу.* Смешанная конвекция в пограничном слое на горизонтальной пластине // Теплопередача. 1977. № 1. С. 70–76.
3. *Рамачандран, Армали, Чжэнь.* Смешанная конвекция около горизонтальной пластины // Теплопередача. 1983. № 2. С. 177–180.
4. *Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А.* Теплообмен смешаннной конвекцией. Минск: Наука и техника, 1975. 255 с.

5. *Sparrow E. M., Minkowycz W. J.* Buoyancy effects on horizontal boundary-layer flow and heat transfer // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1962. V. 5. № 6. P. 505–511.
6. *Hieber C. A.* Mixed convection above a heated horizontal surface // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1973. V. 16. № 4. P. 769–785.
7. *Meksyn D.* New methods in laminar boundary layer theory. Oxford: Pergamon press, 1961. 294 p.
8. *Тирский Г. А.* Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 5. С. 884–902.
9. *Агранат В. М.* Об аналогии Рейнольдса в запыленном ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 160–162.
10. *Агранат В. М.* Влияние градиента давления на трение и теплообмен в запыленном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 105–108.
11. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
12. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
13. *Redekopp L. G., Charwat A. F.* Role of buoyancy and the Boussinesq approximation in horizontal boundary layers // J. Hydronaut. 1972. V. 6. № 1. P. 34–39.

Томск

Поступила в редакцию
31.X.1988