УДК 533.951:537.84

КОРСУНСКИЙ С. В., СЕЛЕЗОВ И. Т.

УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА — ДЕ ВРИЗА В ТЕОРИИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Распространение поверхностных волн в электропроводных жидкостях при действии магнитного поля представляет интерес при анализе астрофизических процессов, в магнитной гидродинамике, металлургии. В последнее время значительное внимание уделяется изучению нелинейных волн в такого рода средах.

Волны бесконечно малой амплитуды на поверхности слоя электропроводной жидкости исследовались в [1, 2]. Анализировались случаи, когда приложенное магнитное поле имело только вертикальную или горизонтальные составляющие. В [3] эти результаты были обобщены на нелинейный случай. Вывод уравнения типа Бенджамина – Оно для волн на поверхности идеально проводящей жидкости в горизонтальном магнитном поле рассматривался в [4]. В [5, 6] были получены нелинейные волновые уравнения типа КдВ для гравитационных волн в феррожидкости.

В настоящей работе получены уравнения, описывающие распространения длинных волн малой, но конечной амплитуды в идеальной слабопроводящей жидкости и на их основе исследовано влияние эффектов МГД-взаимодействия на характеристики уединенных волн. Вывод волновых уравнений проводится при менее жестких ограничениях на внешнее магнитное поле и параметр МГД-взаимодействия, чем в [1–3]. Показано, что эволюция свободной поверхности жидкости описывается уравнениями Кортевега – де Вриза – Бюргерса или КдВ с диссипативным возмущением, а скорость распространения уединенных волн зависит от напряженности внешнего магнитного поля.

1. Постановка задачи. Рассматривается волновое движение невязкой несжимаемой электропроводной жидкости в магнитном поле в случае изэнтропического состояния, электрической и магнитной изотропии. В качестве исходной модели принимаются уравнения магнитной гидродинамики слабопроводящей жидкости, которые записываются в виде [7]

$$\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{\mu^2\sigma}{\rho}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}_0)\times\mathbf{H}_0$$
$$\nabla\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

где ρ – плотность жидкости, μ – ее магнитная проницаемость, σ – электропроводность. В рамках этой модели учитывается влияние эффектов электропроводности на распространение нелинейных возмущений в слабопроводящей среде, подверженной действию сильного магнитного поля. Обратным влиянием гидродинамического поля на электромагнитное пренебрегается.

Плоская задача о волнах на поверхности электропроводной жидкости, находящейся в магнитном поле и в однородном поле силы тяжести, формулируется следующим образом.

Пусть $\mathbf{H}_0=(H_{01},\ 0,\ H_{03})$, $H_{01}=H_0\cos\theta$, $H_{03}=H_0\sin\theta$, $v_2=0$ и все производные по y равны нулю. Постановка краевой задачи в области $\Omega=\{(x,\ z)\,|-\infty<x<\infty,\ -d\leqslant z\leqslant\eta(x,\ t)\}$ включает уравнения движения жидкости (1.1) и граничные условия на свободной поверхности и на жестком дне

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\alpha v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+\alpha v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+N\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\sqrt{\beta}\,v_3-\sin^2\theta\,v_1\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t}+\alpha v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}+\alpha v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial P}{\partial z}+N\left(\frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{\beta}}v_1-\cos^2\theta\,v_3\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_3}{\partial z}=0 \tag{1.4}$$

$$v_3=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\alpha v_1\frac{\partial\eta}{\partial x};\quad P=\eta,\quad z=\alpha\eta \tag{1.5}$$

$$v_3=0,\quad z=-1 \tag{1.6}$$

В (1.2) – (1.6) введены безразмерные переменные по формулам (звездочки опущены)

$$x^*=\frac{x}{\lambda},\quad z^*=\frac{z}{d},\quad \eta^*=\frac{\eta}{a}$$

$$t^*=t\frac{\sqrt{gd}}{\lambda},\quad v_1^*=\frac{v_1}{\alpha\sqrt{gd}},\quad v_3^*=\frac{v_3}{\alpha\sqrt{\beta}\sqrt{gd}}$$

$$P^*=\frac{P}{\alpha\rho g d},\quad N=\frac{\mu^2 H_0^2\sigma\lambda}{\rho\sqrt{gd}}$$

где λ – длина волны, a – амплитуда, $\alpha=a/d$ – параметр нелинейности, $\beta=d^2/\lambda^2$ – параметр дисперсии, N – параметр МГД-взаимодействия.

2. Вывод уравнений для длинных нелинейных волн. Следуя [8], представим v_1, v_3 и P в виде рядов, удовлетворяющих уравнению неразрывности и граничному условию на дне

$$v_1=\sum_{n=0}^{\infty}(-\beta)^n\frac{(z+1)^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{2n+1}f}{\partial x^{2n+1}}$$

$$v_3=-\sum_{n=0}^{\infty}(-\beta)^n\frac{(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+2}f}{\partial x^{2n+2}} \tag{2.1}$$

$$P=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z+1)^{2n}\beta^n$$

После подстановки разложений (2.1) в (1.2)–(1.6), усредняя по глубине и удерживая члены порядка малости не выше $O(\alpha,\beta)$, получаем

$$\begin{gathered}\eta_t+[(1+\alpha\eta)w]_x-{}^1\!/_6\beta w_{xxx}+O(\alpha\sqrt{\beta},\ \beta\sqrt{\beta})=0\\ \eta_x+w_t+N\sin^2\theta w+\alpha w w_x+{}^1\!/_{12}N\sqrt{\beta}\sin 2\theta w_x-\\ -{}^1\!/_2\beta(w_{xxt}+N\cos^2\theta w_{xx}-{}^1\!/_3N\cos 2\theta w_{xx})+O(\alpha\sqrt{\beta},\ \beta\sqrt{\beta})=0\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $w=f_x$. Пренебрегая в (2.2) членами $O(\alpha,\ \beta)$, находим линейное уравнение

$$\eta_{xx}-\eta_{tt}-N\sin^2\theta\eta_t-{}^1\!/_{12}N\sqrt{\beta}\sin 2\theta\eta_{xt}=0 \tag{2.3}$$

которое в частных случаях сводится к известным волновым уравнениям [3, 9]

$$\theta=0,\ \pi:\quad \eta_{xx}-\eta_{tt}=0$$

$$\beta\to 0:\quad \eta_{xx}-\eta_{tt}-N\sin^2\theta\eta_t=0$$

Диссипативным слагаемым в уравнении (2.3) можно пренебречь при условии $\theta\ll 1$, $\sin\theta\sim\theta$. В этом случае получаем

$$\eta_{xx}-\eta_{tt}-\frac{1}{6}N\sqrt{\beta}\,\theta\eta_{xt}+O(\theta^2)=0$$

и, следовательно, в рассматриваемой системе волны распространяются с фазовыми скоростями

$$c_p=\pm 1+\frac{1}{12}N\sqrt{\beta}\,\theta+O(\theta^2)$$

Эволюционные уравнения типа КдВ могут быть получены из системы (2.2) с учетом различных дополнительных предположений. Пусть, например, $N=O(\beta)$. Тогда, удерживая в (2.2) члены порядка малости не выше $O(\alpha,\beta)$ и используя метод Уизема, получаем возмущенное уравнение КдВ

$$\eta_t+\left(1+\frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}=-\frac{1}{2}N\sin^2\theta\eta \tag{2.4}$$

При $\theta=0$, π из (2.2) следует эволюционное уравнение КдВ – Бюргерса

$$\eta_t+\left(1+\frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}=\frac{1}{6}\beta N\eta_{xx} \tag{2.5}$$

В случае $N=O(\sqrt{\beta})$, что соответствует более сильному влиянию МГД-эффектов, эволюционное уравнение типа КдВ получаем в виде

$$\eta_t+\left(c_0+\frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}+\frac{1}{2}N\sin^2\theta\eta+\frac{1}{8}N^2\sin^4\theta\int\limits_{-\infty}^{x}\eta\,dx=0$$

$$c_0=1+\frac{1}{24}\sqrt{\beta}N\sin 2\theta \tag{2.6}$$

Рассмотрим в рамках уравнений (2.2) случай $\theta\ll 1$, не делая дополнительных предположений о величине параметра N. Полагая при этом $\sin\theta\sim\theta$, $\cos\theta\sim 1$ и ограничиваясь удержанием членов $O(\theta)$, получаем из (2.2) уравнение КдВ – Бюргерса

$$\eta_t+\left(c_0+\frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}=\frac{1}{6}\beta N\eta_{xx} \tag{2.7}$$

где $c_0=c_p$. С помощью замены переменных $\tau=\beta t/6$, $\xi=x-c_0t$ уравнение (2.7) приводится к стандартному виду

$$\eta_\tau+\alpha_1\eta\eta_\xi+\eta_{\xi\xi\xi}-N\eta_{\xi\xi}=0 \tag{2.8}$$

где $\alpha_1=9\mathrm{Ur}$, $\mathrm{Ur}=\alpha/\beta$ – число Урселла.

3. Анализ решений уравнений КдВ — Бюргерса. При $N=0$ стационарное решение уравнения (2.8) записывается в виде уединенной волны

$$\eta_0=a_0\,\mathrm{sech}^2 z_0,\quad z_0=\frac{1}{2}\sqrt{u}(\xi-u\tau),\quad u=\frac{1}{3}a_0\alpha_1$$

Прямое асимптотическое разложение для (2.8) при $N\ll 1$ $\eta=\eta_0+N\eta_1+\ldots$ приводит в первом порядке к выражению, не ограниченному при $z_0\to\pm\infty$ [10]. Корректное асимптотическое решение уравнения (2.8) может быть построено методом Крылова – Боголюбова – Митропольского. Такого рода решение уравнения КдВ – Бюргерса было получено в [11] и имеет вид

$$\eta=a(\tau)\,\mathrm{sech}^2 z_1$$

$$z_1=\left(\frac{a(\tau)\alpha_1}{12}\right)^{1/2}\left(\xi-\frac{\alpha_1}{3}\int\limits_0^\tau a(\tau)\,d\tau\right),\quad a(\tau)=a_0\left(1+\frac{4\alpha_1a_0}{45}N\tau\right)^{-1}$$

Точное решение уравнения КдВ – Бюргерса находится с помощью преобразований Бэклунда, установленных в [12]. Это решение типа «кинк» представляется в виде

$$\eta=-\frac{3N^2}{25\alpha_1}e^\chi\,\mathrm{sech}^2\frac{\chi}{2},\quad \chi=\frac{N}{5}\left(\xi+\frac{6N^2}{25}\tau\right)$$

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Распространение волн малой, но конечной амплитуды на поверхности электропроводной жидкости при малых магнитных числах Рейнольдса описывается при различных предположениях эволюционными уравнениями Кортевега – де Вриза – Бюргерса или возмущенным уравнением КдВ. Влияние эффектов электропроводности и приложенного магнитного поля сводится к уменьшению амплитуд уединенных волн и изменению скорости их распространения. В проводящей среде возможно существование слабых ударных волн типа «кинк», амплитуда которых пропорциональна квадрату параметра МГД-взаимодействия. Кроме того, наличие диссипации может приводить к появлению уединенных волн с осциллирующей структурой типа боры [8, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fraenkel L. E.* A shallow-liquid theory in magnetohydrodynamics // J. Fluid Mech. 1960. V. 7. № 1. P. 81–107.
2. *Shercliff J. A.* Anisotropic surface waves under a vertical magnetic force // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. № 2. P. 353–364.

3. *Hofman M.* Nonlinear waves on the free surface of an electrically conducting liquid // Wave motion. 1983. V. 5. № 2. P. 115–124.
4. *Данов К. Д., Рудерман М. С.* Нелинейные волны на мелкой воде в присутствии горизонтального магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 110–115.
5. *Баштовой В. Г., Фойгель Р. А.* Уединенные и кноидальные волны в намагничивающейся жидкости // Магнит гидродинамика. 1983. № 2. С. 55–60.
6. *Шишкин Л. А., Слатинский Н. Д.* Влияние магнитного поля на уединенные гравитационные волны в феррожидкости // Магнит. гидродинамика. 1980. № 1. С. 51–54.
7. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.
9. *Корсунский С. В.* Нестационарные волновые задачи динамики электропроводной жидкости // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев: КГУ, 1987. 23 с.
10. *Johnson R. S.* A non-linear equation incorporating damping and dispersion // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. № 6. P. 49–60.
11. *Ott E., Sudan R. N.* Damping of solitary waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 6. P. 1432–1434.
12. *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса – КдФ // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 342–345.

Киев

Поступила в редакцию 10.VI.1988