

УДК 532.5.013.4

© 1989

БОГОЯВЛЕНСКИЙ А. Б.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНВЕКЦИЯ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ: ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ РЕЖИМАМИ

Изучаются стационарные конвективные движения вязкой жидкости, заполняющей сферический слой $R_1 \leq r \leq R_2$, $R_2/R_1 = 1,2$. Недеформируемые границы слоя считаются свободными от касательных напряжений. На внешней границе задана постоянная температура, на внутренней — постоянный поток тепла. Система уравнений в приближении Буссинеска решается методом Галеркина установлением по времени в предположении осевой и экваториальной симметрии. Показано, что в точке $Ra = Ra_c$ состояние механического равновесия теряет устойчивость и имеет место стационарная симметричная закритическая бифуркация. Наиболее неустойчивые в линейном смысле моды определяют форму конвекции при $Ra > Ra_c$ и не слишком большой закритичности. При числах Рэлея $Ra_c < Ra < 200Ra_c$ существует множество стационарных решений различной пространственной структуры. Реализация решений того или иного типа зависит от закритичности и начальных условий. Исследуется эволюция решений при изменении числа Рэлея. Анализируются изменения пространственных спектров кинетической энергии и интегральных потоков тепла при переходах с одной ветви решений на другую и при изменении закритичности. С увеличением закритичности, несмотря на возбуждение все новых мелкомасштабных мод, все больший вклад в суммарную энергию движения начинают давать движения больших масштабов.

Полученные результаты могут быть использованы при построении гидродинамических моделей глобальных движений в атмосферах планет-гигантов, конвективных оболочках звезд, в недрах земной мантии.

1. Постановка задачи. Линейная задача о конвективной неустойчивости покоящегося сферического слоя жидкости в поле центральной силы впервые была рассмотрена в [1]. Было показано, что критическое значение числа Рэлея Ra_c зависит от толщины слоя, и при довольно общих условиях на распределение источников тепла и вид внешнего силового поля имеет место принцип смены устойчивости. Однако окончательных выводов о том, которая из нескольких «конкурентоспособных» мод будет определять форму течения, реализующегося после потери устойчивости теплопроводным режимом, на основе линейной теории сделать не удается. Вопросу уточнения формы критической конвекции посвящены работы [2, 3], где нелинейные члены рассматривались как возмущения линейной задачи и использовался асимптотический метод разложения решения по малой амплитуде. Для некоторых частных случаев найдены решения, обладающие симметрией правильных многогранников.

Численные решения нелинейной задачи были получены в [4–6]. В предположении экваториальной симметрии для $Pr = 1$ и 5; $Ra < 5,5Ra_c$; $a = R_2/R_1 = 3,33$ и 1,67 (R_1, R_2 — радиусы внутренней и внешней сфер, Ra и Pr — числа Рэлея и Прандтля) полуспектральным методом получены как осесимметричные, так и неосесимметричные решения. Показано, что имеется интервал значений $Ra_c < Ra < Ra^*(a, Pr)$, где существуют оба типа стационарных решений, однако различие в потоках тепла при осесимметричном и неосесимметричном режимах менее 5%. С ростом Ra в слое с $a = 3,33$ происходит изменение горизонтальной структуры осесимметричного решения (уменьшение волнового числа), сопровождающееся изломом кривой $Nu(Ra)$.

В [5, 6] рассматривались осесимметричные решения, как симметричные, так и несимметричные относительно экватора для $a=2$ и $Pr=\infty$. Найдены стационарные решения с двумя, тремя и четырьмя тороидальными конвективными ячейками, указаны области их существования. Исследование показало неустойчивость этих решений по отношению к малым неосесимметричным возмущениям при малой закритичности.

Для моделирования глобальных процессов в атмосферах планет-гигантов представляют интерес конвективные модели, учитывающие широтный градиент температуры и сдвиг скорости на границах. В [7] показано, что учет любого из этих факторов ликвидирует вырождение и в широком диапазоне параметров могут реализовываться осесимметричные стационарные решения.

Вычисления показывают, что кривые $Nu(Ra)$ при большой закритичности мало различаются для конвекции в плоском слое со свободными границами и в слое с ненулевыми сдвиговыми граничными напряжениями [8]. То же можно сказать о других интегральных характеристиках.

Результаты указанных выше работ показывают, что интегральные характеристики трехмерных конвективных течений часто близки по значениям к характеристикам осесимметричных течений. Кроме того, изучению сложных трехмерных задач, учитывающих твердотельное вращение и сложные граничные условия, должно предшествовать исследование более простых течений в широких диапазонах изменения параметров. Все это свидетельствует о целесообразности рассмотрения задачи с однородными граничными условиями в осесимметричной постановке и возможности использования результатов при построении сложных астро- и геофизических моделей.

Рассмотрим в приближении Буссинеска движение вязкой жидкости, заполняющей сферический слой $R_1 \leq r \leq R_2$. Недеформируемые границы слоя считаются свободными от касательных напряжений: $v_r = \tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$ при $r=R_1$ или R_2 , где v_r — радиальная составляющая скорости, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\varphi}$ — касательные напряжения, (r, θ, φ) — сферические координаты. На внешней границе задано распределение температуры $T=T_* = \text{const}$, на внутренней — постоянный поток тепла $\partial T / \partial r = -\eta = \text{const}$.

Соленоидальное поле скоростей представим в виде $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{r}W + \text{rot}^2 \mathbf{r}S$ и применим операторы $\mathbf{r} \text{rot}$ и $\mathbf{r} \text{rot}^2$ к уравнению Навье — Стокса в форме Буссинеска. Приняв за характерные масштабы длины, времени и скорости соответственно R_1 , R_1^2/ν , χ/R_1 (ν и χ — кинематическая вязкость и температуропроводность) и представив температуру в виде $T = T_* + \eta R_1(T_0 + T_1)$, где T_1 удовлетворяет уравнению Лапласа и неоднородным граничным условиям, получим систему уравнений относительно S и T_0 (индекс ноль ниже опущен) и граничные условия в безразмерном виде¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L^2 \Delta S &= L^2 \Delta^2 S - Ra \frac{r_0^4}{r^2} L^2 T + Pr^{-1} \mathbf{r} \text{rot}^2 [(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}] \\ Pr \frac{\partial T}{\partial t} &= \Delta T - \mathbf{v} \nabla (T + T_1) \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0, \quad r=1; \quad T=S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0, \quad r=a \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$Ra = \frac{\gamma \eta (R_2 - R_1)^4 \beta}{R_1^2 \nu \chi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad a = \frac{R_2}{R_1}$$

$$r_0 = \frac{R_1}{R_2 - R_1}, \quad T_1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2}$$

¹ Задача определения W в осесимметричной постановке со свободными границами и в отсутствие вращения имеет тривиальное решение.

Здесь Δ — оператор Лапласа, γ — гравитационная постоянная, β — коэффициент теплового расширения, Ra , Pr — числа Рэлея и Прандтля.

Задача имеет три определяющих параметра a , Pr , Ra , два из которых в дальнейшем приняты постоянными: $Pr=1$, $a=1,2$, а Ra изменяется в диапазоне $Ra < 200 Ra_c$, где Ra_c — предел линейной устойчивости теплопроводного режима.

2. Метод решения. Симметричные относительно оси и экватора стационарные решения системы (1.1) получены методом Галеркина путем установления по времени. Искомые функции представлялись в виде сумм

$$S = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K a_{kl}(t) S_{kl}(r) P_{2l}(\cos \theta)$$

$$T = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K b_{kl}(t) T_{kl}(r) P_{2l-2}(\cos \theta) \quad (2.1)$$

где P_m — полиномы Лежандра, а S_{kl} , T_{kl} — элементы полной системы функций, являющихся решениями следующих задач на собственные значения:

$$D_{2l}(D_{2l} + \nu_{kl}) S_{kl} = 0, \quad (D_{2l-2} + \lambda_{kl}) T_{kl} = 0$$

$$S_{kl} = S_{kl}'' = T_{kl} = 0, \quad r=1; \quad S_{kl} = S_{kl}'' = T_{kl} = 0, \quad r=a$$

$$D_m = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \frac{m(m+1)}{r^2}$$

Функции S_{kl} , T_{kl} имеют вид

$$S_{kl}(r) = \frac{c_1^{kl}}{\sqrt{r}} J_{2l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\nu_{kl}}) + \frac{c_2^{kl}}{\sqrt{r}} J_{-2l-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\nu_{kl}}) + c_3^{kl} r^{2l} + c_4^{kl} r^{-2l-1}$$

$$T_{kl}(r) = \frac{d_1^{kl}}{\sqrt{r}} J_{2l-\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_{kl}}) + \frac{d_2^{kl}}{\sqrt{r}} J_{-2l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_{kl}})$$

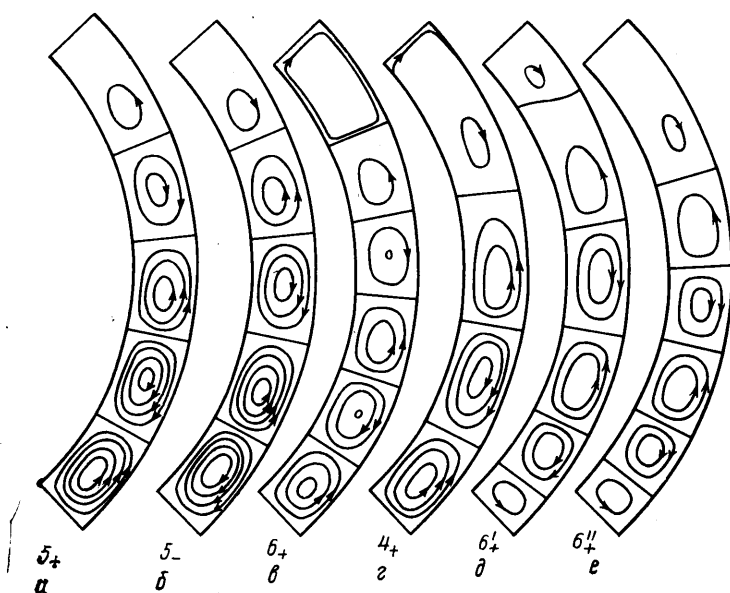
где c_i^{kl} , d_i^{kl} — постоянные коэффициенты, зависящие от ν_{kl} и λ_{kl} соответственно.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно a_{kl} , b_{kl} , полученная подстановкой (2.1) в (1.1), численно интегрировалась по времени методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Исследовалась эволюция стационарных решений при изменении числа Рэлея. При достижении критического значения Ra_c от ранее глобально устойчивого центрально-симметричного решения отщепляются два решения, каждое из которых представляет собой десять тороидальных конвективных ячеек. Эти решения различаются между собой направлением циркуляции в ячейках. С этого момента направление вдоль осей конвективных торков — назовем его азимутальным — оказывается выделенным и возникает асимметрия полюс — экватор. Указанная асимметрия делает эти решения качественно различными и приводит к различию в их эволюции с ростом Ra .

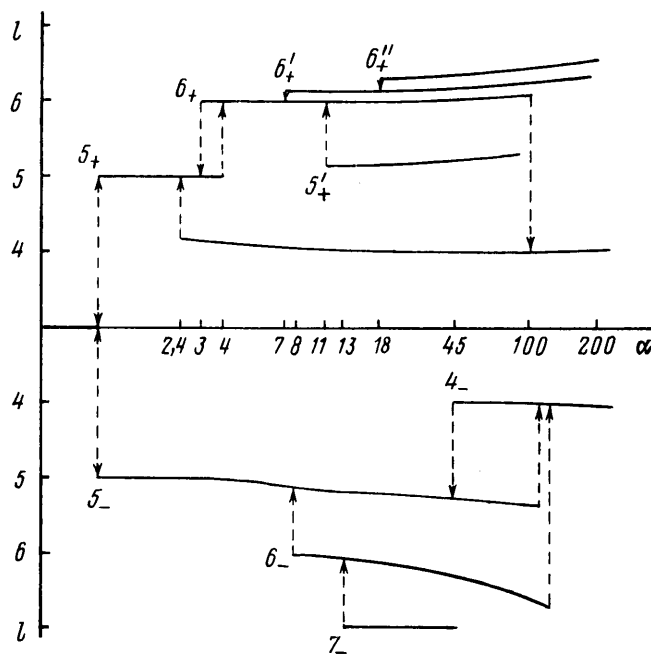
В рассматриваемой постановке для отыскания решений, принадлежащих той или иной ветви, при фиксированных значениях параметров необходимо задавать начальные условия для искомых величин. Ниже изложены соображения, на основании которых выбирался тот или иной способ задания начальных условий.

Для продвижения вдоль выделенной ветви решений и исследования типа бифуркаций часто удобно квазистатически увеличивать или уменьшать число Рэлея, т. е. в качестве начальных условий брать решения, полученные при близких значениях Ra .

В некоторых физических экспериментах удастся получить новый тип решений, изменив скачком некоторые параметры системы, причем эти



Фиг. 1



Фиг. 2

решения получить не удастся, если менять те же параметры квазистатически. Если при решении (1.1) взять в качестве начальных условий решения, полученные при сильно отличающемся значении Ra , в некоторых случаях удастся отыскать изолированные ветви решений.

В ряде случаев в область притяжения новой ветви можно попасть, поменяв знаки коэффициентов Галеркина, изменив тем самым направление циркуляции. При небольшой закритичности, например, взяв такое «исправленное» решение за начальные условия, можно при тех же значениях параметров получить решения симметричной ветви.

Часто оказывается удобно брать в качестве начальных условий реше-

ния, полученные при рассмотрении задачи с малой длиной галеркинских базиса.

Наконец, иногда удается угадать вид решений, «возбудив» в начальный момент определенные базисные моды и приравняв нулю коэффициенты при остальных.

В дальнейшем для оценок тепловых потоков будут использоваться числа Нуссельта, для характеристики пространственных масштабов движений — спектры меридиональной циркуляции, а для характеристики интенсивности меридиональной циркуляции — максимальные значения функции тока $\psi = -r \sin \theta \partial S / \partial \theta$ или суммарная кинетическая энергия меридиональных движений. Число Нуссельта определяется отношением суммарного потока тепла через внешнюю границу к потоку тепла, обусловленному теплопроводностью при той же средней разности граничных температур, и вычисляется по формуле

$$Nu = \frac{a-1}{a} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{r=1}^a T d\Sigma \right)^{-1}$$

Под спектрами меридионального движения понимается распределение по l кинетической энергии

$$U(l) = \frac{1}{2} \int_1^a (v_{rl}^2 + v_{\theta l}^2) r^2 dr$$

$$v_{rl}(r) = \frac{1}{r} \sum_k a_{kl} L^2 S_{kl}(r), \quad v_{\theta l}(r) = \frac{1}{r} \sum_k a_{kl} \frac{\partial r S_{kl}(r)}{\partial r} \quad (2.2)$$

где l — порядковый номер базисных функций, характеризующий пространственный масштаб вдоль координаты θ .

Вместо числа Рэлея часто будет использоваться параметр, характеризующий закритичность $\alpha = Ra/Ra_c$.

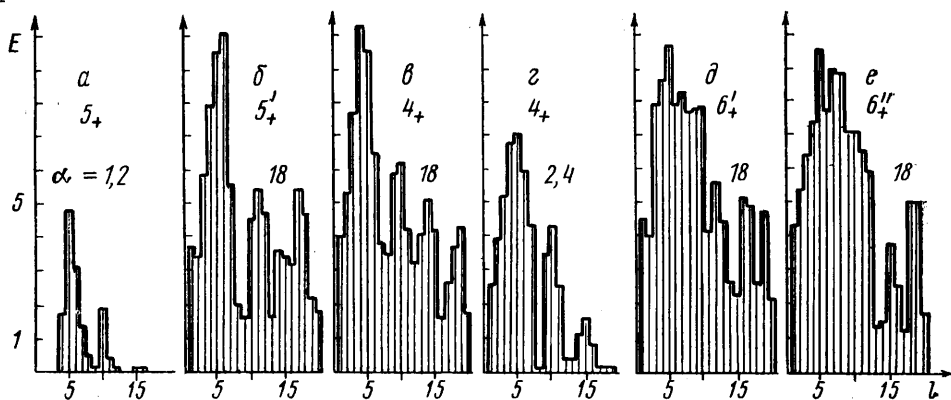
3. Результаты. Численные расчеты проводились при $L=10, 15, 20$; $K=3, 5, 7, 10$; большая часть результатов получена при $L=20, K=7$.

Анализ линеаризованных уравнений (1.1) показывает, что при $Ra = Ra_c \approx 530$ состояние покоя теряет устойчивость и в соответствии с [1] выполняется принцип смены устойчивости. Этому значению Ra отвечают две критические моды, нарастающие экспоненциально и характеризующиеся одинаковым (равным пяти для $0 \leq \theta \leq \pi/2$) числом осесимметричных тороидальных ячеек, но противоположным направлением циркуляции (фиг. 1, а, б).

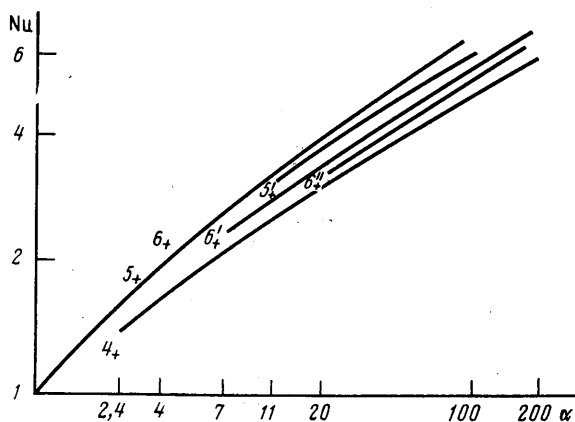
Решения нелинейной задачи (1.1) при небольшой закритичности имеют вид, предсказанный линейной теорией. При $Ra = Ra_c$ от решения, характеризованного теплопроводным режимом, отходят решения двух типов с различным направлением меридиональной циркуляции, т. е. имеет место симметричная закритическая бифуркация.

С ростом закритичности до $\alpha \approx 2,4$ качественно картина не меняется, но возникают количественные различия в числах Нуссельта и интенсивности циркуляции. Однако значения этих характеристик, а также распределение $U(l)$ практически не различаются для решений разных ветвей при одних и тех же значениях α . На фиг. 1, а, б показаны картины линий тока $\psi = \text{const}$ в меридиональной плоскости для решений обоих типов при $\alpha = 1, 2$.

Схематично перестройки решений удобно изображать с помощью диаграммы (фиг. 2), если по оси абсцисс указывать значения закритичности, а по оси ординат — количество конвективных роллов при $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Выше и ниже оси абсцисс указаны решения с противоположными направлениями циркуляции. Течения, в которых на экваторе реализуется движение



Фиг. 3



Фиг. 4

от внутренней границы к внешней и, следовательно, возникает локальный максимум потока тепла через внешнюю границу, отмечены индексом плюс, а течения с движением жидкости к центру у экватора — индексом минус. Решениям ветвей 5_+ и 5_- на фиг. 2 соответствуют картины линий тока, изображенные на фиг. 1, а, б. Стрелками на диаграмме показаны переходы с одной ветви решений на другую, происходящие при квазистатическом изменении параметра α (искривление отдельных ветвей на фиг. 2 отражает эволюцию спектров решений с изменением закритичности). Например, с ветви 5_+ можно, квазистатически увеличивая α , «жестко» перейти на ветвь 6_+ к решениям с шестью конвективными роллами (фиг. 1, в). Обратный переход $6_+ \rightarrow 5_+$ происходит при меньших значениях α ; по-видимому, здесь имеет место докритическая односторонняя бифуркация.

На фиг. 3 представлены спектры меридионального движения. По оси абсцисс отложены значения l , по оси ординат — величины $E(l) = \ln[U(l) + 1]$ (см. (2.2)). Фигуре 3, а соответствует значение закритичности $\alpha = 1$, 2 и ветвь 5_+ , фиг. 3, б, в, д, е — $\alpha = 18$ и ветви 5_+ , 4_+ , 6_+ , 6_+ соответственно, 3, г — $\alpha = 2$, 4 и ветвь 4_+ .

К решениям ветви 5_+ можно перейти с ветви 5_+ , резко увеличив α до значений $\alpha \geq 11$. Решения 5_+ характеризуются также пятью роллами в полусфере, но отличаются от 5_+ смещением максимумов спектров $E(l)$ вправо на единицу (ср. фиг. 3, а и б). Обратный переход $5_+ \rightarrow 5_+$ также требует резкого уменьшения α до $1 < \alpha \leq 4$. Напротив, квазистатическое уменьшение α от значения $\alpha \approx 11$ приводит к переходу на ветвь 6_+ .

При достаточно больших α ветвь 6_+ переходит в 4_+ , что соответствует

решениям с четырьмя конвективными роллами (фиг. 1, $г$), а решения ветви 5_+ становятся нестационарными.

При квазистатическом уменьшении α пространственные спектры решений 4_+ эволюционируют, как показано на фиг. 3, $в$, $г$, и при $\alpha \approx 2$, 4 решения этого типа переходят в решения ветви 5_+ .

Решения типа 6_+ '' (см. также фиг. 1, $д$) удалось получить, лишь задав специальные начальные условия: «возбудив» высшие по θ базисные моды. Решения 6_+ ' (см. фиг. 1, $е$) получаются в результате перехода с ветви 6_+ '' при квазистатическом уменьшении α , они отличаются от решений 6_+ и 6_+ '' меридиональными масштабами соответствующих роллов.

Характерной чертой диаграммы фиг. 2 является асимметрия относительно оси абсцисс.

При продвижении вдоль кривых 4_+ , 5_+ ', 6_+ ', 6_+ '', 7_- вправо, т. е. при квазистатическом увеличении α , растет вклад в спектры энергии высших по θ мод и возникает нестационарность решений.

Изменение числа базисных функций с 15 до 20 по θ и с 3 до 7 по $г$ качественно не меняет описанной картины, однако вопрос об определении точной границы нестационарного перехода остается открытым.

Каждой ветви решений, изображенных на фиг. 2, отвечает своя зависимость $Nu(\alpha)$, причем для соответствующих ветвей верхней и нижней частей диаграммы кривые $Nu(\alpha)$ почти совпадают.

На фиг. 4 приближенно указаны зависимости $Nu(\alpha)$, соответствующие решениям верхней части диаграммы на фиг. 2. Если сопоставить кривые на фиг. 4 с соответствующими пространственными спектрами решений на фиг. 3, то можно заметить, что преобладание в спектрах меньших пространственных масштабов соответствует меньшим значениям Nu . Гладкое сопряжение кривых $Nu(\alpha)$ на фиг. 4 в точке докритической бифуркации $5_+ \rightleftharpoons 6_+$ (ср. фиг. 2) и отсутствие скачка значений Nu в этой точке можно объяснить малой величиной скачка по отношению к погрешности вычислений.

4. Выводы. С ростом Ra в интервале между Ra_c и значениями $Ra \sim 200 Ra_c$, при которых возникают нестационарности, существует множество стационарных осесимметричных решений различной пространственной структуры.

С потерей устойчивости, теплопроводным режимом и появлением выделенного азимутального направления появляется асимметрия полюс — экватор. В связи с этим возникающие при $Ra > Ra_c$ два типа решений, различающихся направлением меридиональной циркуляции, с ростом закритичности эволюционируют не одинаково.

Разнообразие форм стационарных решений, а также наличие большого интервала значений Ra , при которых они существуют, связано с большой степенью симметрии рассматриваемой задачи.

Конкретный вид получаемого в процессе установления стационарного решения зависит от вида начальных условий. Аналогичную картину можно наблюдать в подобных физических экспериментах, когда реализация того или иного состояния (решения) зависит от исходного состояния, способа и скорости изменения параметров. При достаточно большой закритичности нет уверенности в том, что исчерпаны все возможные решения, так как могут существовать изолированные ветви решений, область притяжения которых либо достаточно мала, либо не очевидна. Кроме того, ограниченность длины галеркинского базиса может привести к тому, что решения, содержащие мелкие масштабы, при данной длине базиса получить невозможно.

Анализируя полученные результаты, можно проследить основные тенденции. Так, с ростом закритичности при небольших ее значениях первоначально возбуждаются моды меньших масштабов (переходы типа $5_+ \rightarrow 6_+$ и $5_+ \rightarrow 5_+$ '), однако с увеличением закритичности, несмотря на возбуждение все новых мелкомасштабных мод, все больший вклад в простран-

ственные спектры кинетической энергии начинают давать движения больших масштабов. Это проявляется в возникновении новых решений с преобладанием больших масштабов в спектрах (ветви $6_+''$, $6_+''$, 7_- ; см. фиг. 1, δ , e и 3, δ , e), в переходах типа $6_{\pm} \rightarrow 4_{\pm}$, $5_- \rightarrow 4_-$ (см. фиг. 2), а также в эволюции спектров отдельных ветвей решений с ростом Ra (см., например, фиг. 3, e , g).

Заметим, что при перестройках решений, связанных с изменением закрученности, направление циркуляции наиболее интенсивного экваториального ролла сохраняется. Направление меридиональной циркуляции может меняться лишь в приполярных областях (фиг. 1, a , $e-e$).

Решения, возникающие при одних и тех же значениях параметров, имеющие близкие распределения $U(l)$ и противоположные направления меридиональной циркуляции, имеют близкие интегральные тепловые потоки Nu (при малой закрученности различие менее 1%).

Решения, в которых преобладают крупномасштабные моды, имеют меньшие значения Nu , чем решения с мелкомасштабными модами при тех же значениях Ra (см. фиг. 4). Наряду с очевидной общей тенденцией роста $Nu(Ra)$ с увеличением Ra переходы от ветвей решений с меньшими значениями Nu к решениям с большими Nu не обязательны. Вопрос о том, имеет ли этот эффект физический смысл, или он связан с несовершенством предложенной модели (требованием осевой симметрии, малой длиной галеркинских базиса и т. п.), остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
2. Busse F. H. Patterns of convection in spherical shells // J. Fluid Mech. 1975. V. 72. № 1. P. 67-85.
3. Busse F. H., Riani N. Patterns of convection in spherical shells. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1982. V. 123. P. 283-301.
4. Yuong R. E. Finite - amplitude thermal convection in a spherical shell // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. № 4. P. 695-721.
5. Zebib A., Schubert G., Straus J. M. Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shell // J. Fluid Mec. 1980. V. 97. № 2. P. 257-277.
6. Zebib A., Goyal A. K., Schubert G. Convective motions in a spherical shell // J. Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 39-48.
7. Келлер Б. С., Яворская И. М. Моделирование гидродинамических процессов в атмосферах больших планет // Аэромеханика и газовая динамика. М.: Наука, 1976. С. 256-279.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1988