

УДК 533.7

© 1989

РУДЯК В. Я.

ОСНОВНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

В настоящее время наиболее популярным методом численного решения задач динамики разреженного газа является метод прямого статистического моделирования. В этом методе используется схема расщепления и задача решается в два этапа. На первом разыгрывается столкновение молекул, а на втором осуществляется их перенос. Как показано в [1, 2], моделирование столкновений при этом сводится к построению монте-карловского алгоритма, описывающего N -частичное основное кинетическое уравнение Каца [3]. Использование этой модели позволяет избежать вычисления сложного интеграла столкновений уравнения Больцмана, что приводит к построению высокоэффективной процедуры. Вместе с тем известно, что уравнение Каца переходит в уравнение Больцмана лишь в пределе $N \rightarrow \infty$ и предположении молекулярного хаоса. С другой стороны, в расчетах обычно используется сравнительно небольшое число частиц N . В связи с этим особую актуальность приобретают вопросы о связи основного кинетического уравнения Каца с уравнением Лиувилля и о характере зависимости решения уравнения Каца от N . Не ясно также, можно ли вывести уравнение, аналогичное уравнению Каца для пространственно неоднородных систем. Выяснению поставленных вопросов и посвящена настоящая работа.

Исходя из уравнения Лиувилля, выведено основное кинетическое уравнение разреженного газа как для пространственно однородных, так и пространственно неоднородных систем. Исследована связь полученного уравнения с уравнением Больцмана и характер зависимости решений основного кинетического уравнения от числа частиц в системе.

1. Динамика N -частичной системы классических биоструктурных частиц описывается функцией распределения $F_N = F_N(x_1, \dots, x_N, t)$, которая удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial F_N}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{j>i}^N \theta_{ij} F_N = 0, \quad \theta_{ij} = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right) \quad (1.1)$$

где Φ_{ij} — межмолекулярный парный потенциал взаимодействия; $x_i = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}$; $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$ — соответственно координата и импульс частицы i .

Эволюция же пространственно однородной системы определяется N -частичной функцией распределения $\rho_N = \rho_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$. Имея это в виду, введем функцию распределения

$$\rho_N^{(s)} = V^s \int d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{r}_N F_N, \quad s=0, 1, 2, \dots$$

так что функция $\rho_N^{(0)}$ совпадает с ρ_N (V — объем системы). Чтобы получить уравнение для ρ_N , проинтегрируем (1.1) по координатам всех N частиц. Тогда, предполагая обращение в нуль функции распределения на границах системы, находим

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = \frac{1}{V^2} \sum_{j>i}^N \iint d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j \theta_{ij} \rho_N^{(2)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (1.2)$$

Это уравнение не замкнуто относительно функции ρ_N . Для короткодействующих потенциалов вклад в интеграл столкновений уравнения (1.2) дает функция $\rho_N^{(2)}$ для конфигураций $|\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \leq r_0$, где r_0 — эффективный радиус действия межмолекулярных сил. Уравнение для $\rho_N^{(2)}$ получается интегрированием (1.1) по координатам всех частиц, за исключением i и j

$$\frac{\partial \rho_N^{(2)}}{\partial t} + \frac{p_i}{m} \frac{\partial \rho_N^{(2)}}{\partial r_i} + \frac{p_j}{m} \frac{\partial \rho_N^{(2)}}{\partial r_j} - \theta_{ij} \rho_N^{(2)} = \frac{1}{V} \sum_{m \neq i, j}^N \int dr_m (\theta_{mj} + \theta_{mi}) \rho_N^{(3)} + \frac{1}{V^2} \sum_{\substack{l > m \\ l, m \neq i, j}}^N \int dr_m dr_l \theta_{ml} \rho_N^{(4)}$$

Нетрудно убедиться, что в приближении разреженного газа интегральные члены в этом уравнении следует опустить. Решая затем полученное таким образом уравнение, находим, что $\rho_N^{(2)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t) = S_{-(t-t_0)}^{(ij)} \rho_N^{(2)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t_0)$, где $S_{\tau}^{(ij)} \equiv S_{\tau}^{(2)}$ — динамический оператор сдвига по траектории двух частиц. Кроме того, необходимо учесть, что в рассматриваемом приближении следует пренебречь эффектами памяти и пространственной нелокальности взаимодействия молекул, а оператор $S_{\tau}^{(2)}$ можно заменить волновым оператором $\Omega^{(2)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} S_{-\tau}^{(ij)} S_{\tau}^{(i)} S_{\tau}^{(j)}$ [4]. В результате функция $\rho_N^{(2)}$ принимает вид $\rho_N^{(2)}(x_i, x_j, t) = \Omega^{(2)} \rho_N^{(2)}(x_i, x_j, t)$. Подставляя ее в уравнение (1.2), получим

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = \frac{1}{V} \sum_{j > i}^N \iint d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j \theta_{ij} \Omega^{(2)} \rho_N^{(2)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)$$

Переходя теперь в подынтегральном выражении этого уравнения к системе координат центра масс, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2$, \mathbf{r}_{ij} , и выполняя интегрирование по \mathbf{r} , находим

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = \frac{1}{V} \sum_{j > i}^N \int d\mathbf{r}_{ij} \theta_{ij} \Omega^{(2)} \rho_N^{(1)}(\mathbf{r}_{ij}, t) \quad (1.3)$$

Дальнейшие преобразования интеграла столкновений уравнения (1.3) выполняются стандартным образом [5]. Необходимо только учесть, что $\Omega^{(2)} \rho_N^{(1)}(\mathbf{r}_{ij}(z, b, \epsilon), t)$ в разреженном газе равняется функции $\rho_N(t)(z, b, \epsilon)$ — цилиндрические координаты с осью z , направленной вдоль вектора $\mathbf{p}_{ji} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$; b — прицельный параметр; ϵ — азимутальный угол). Таким образом, уравнение (1.3) приводится к уравнению Каца [3]

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} = \frac{1}{V} \sum_{j > i}^N \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} d\epsilon db b v_{ij} [\rho_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i', \dots, \mathbf{p}_j', \dots, \mathbf{p}_N, t) - \rho_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_N, t)] = J, \quad |v_{ij}| = |\mathbf{p}_{ij}|/m \quad (1.4)$$

где \mathbf{p}_i' — значение импульса частицы после столкновения с частицей j .

Легко убедиться, что интеграл столкновений основного кинетического уравнения (1.4) обладает такими же свойствами симметрии, что и интеграл столкновений уравнения Больцмана [6]. Отсюда, в частности, следует, что в рассматриваемой системе макроскопические переменные сохраняются во времени. Сохраняются и моменты второго порядка $\langle \varphi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) \rangle$ (угловые скобки означают усреднение с функцией ρ_N), если функции

$\varphi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ удовлетворяют условию $\varphi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \varphi(\mathbf{p}'_i, \mathbf{p}'_j)$. Этому условию удовлетворяет функция $\varphi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ и любая ее степень.

Энтропия системы $S = -k \langle \ln \rho_N \rangle$ не убывает и обращается в нуль в состоянии равновесия, в котором система движется по гиперповерхности, заданной полными значениями импульса и энергии. Естественно, для систем с разным числом частиц эти состояния будут различны.

2. Введем s -частичные функции распределения

$$\rho_s(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s, t) = \left(\frac{N}{V}\right)^s \int d\mathbf{p}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N \rho_N$$

Интегрируя уравнение (1.4) по фазовым переменным $N-1$ частиц, находим, что одночастичная функция распределения ρ_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{N-1}{N} \iint d\Omega d\mathbf{p}_2 v_{12} (\rho_2' - \rho_2), \quad d\Omega = d\epsilon dbb \quad (2.1)$$

Отсюда, если перейти к пределу $N \rightarrow \infty$ и предположить мультипликативность функции ρ_2 , получим уравнение Больцмана. В общем же случае уравнение (2.1) существенно отличается от уравнения Больцмана, так как зависит от изменения двухчастичной парной корреляционной функции $g = \rho_2 - \rho_1 \rho_1$. В системе конечного числа частиц эта функция при $t > t_0$ всегда отлична от нуля даже в том случае, если $g(t_0) = 0$. В самом деле, из (1.4) следует, что g в пределе разреженного газа удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= -\frac{v}{N} g + \frac{1}{N} Kg - \frac{1}{N} L(\rho_1) \\ v &= \frac{N}{V} \int d\Omega v_{12}, \quad Kg = \frac{N}{V} \int d\Omega v_{12} g', \quad L(\rho_1) = \frac{N}{V} \int d\Omega \left\{ v_{12} (\rho_1' \rho_1' - \rho_1 \rho_1) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{i=1,2 \\ j \neq i}} \int d\mathbf{p}_3 v_{i3} [\rho_1'(\mathbf{p}'_i) \rho_1(\mathbf{p}_j) \rho_1'(\mathbf{p}'_3) - \rho_1 \rho_1 \rho_1] \right\} \end{aligned}$$

Если проинтегрировать последнее уравнение по времени, получим для g интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решение которого можно записать с помощью резольвентного оператора $\Gamma(t, t_1)$ [7]

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0(t) + \frac{1}{N} \int_{t_0}^t \Gamma(t, t_1) g_0(t_1) dt_1 \quad (2.2) \\ g_0(t) &= e^{-v(t-t_0)/N} g(t_0) - \frac{1}{N} \int_{t_0}^t e^{-v(t-t_1)/N} L(\rho_1) dt_1 \\ \Gamma(t, t_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(t, t_1) \end{aligned}$$

где ядра K_{n+1} определяются рекуррентной формулой

$$K_{n+1}(t, t_1) = \int_{t_1}^t K(t, t_2) K_n(t_2, t_1) dt_2, \quad K(t, t_i) \equiv K_1(t, t_i) = \frac{1}{N} \exp\left[-\frac{v(t-t_i)}{N}\right] K$$

Из решения (2.2) видно, что при любом конечном N и $t > t_0$ двухчастичная функция не мультипликативна ни при каких начальных условиях $g(t_0)$, за исключением локально-максвелловских. В тех случаях, когда на-

чальные корреляции отсутствуют, эволюция функции $g(t)$ определяется членами, содержащими оператор L . Отсюда, в частности, очевидно, что в бесконечной системе состояние молекулярного хаоса сохраняется во времени, если функция распределения была мультипликативна в начальный момент времени.

В главном по N приближении в решении (2.2) при $g(t_0)=0$ достаточно сохранить лишь первый член. Если затем воспользоваться теоремой о среднем, то для функции $g(t)$ получим оценку

$$g(t) = L_1 \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{v(t-t_0)}{N} \right] \right\} \quad (2.3)$$

где L_1 — некоторая функция импульсов двух частиц.

Согласно (2.3), для фиксированного момента времени $\tau' = v(t-t_0)$ корреляции тем меньше, чем больше N . При малом числе частиц функция g/L становится порядка единицы за время $\tau' \lesssim 10$.

3. Ввиду чрезвычайной сложности и уравнения Больцмана, и уравнения (2.1) в общем случае не удается получить оценки, характеризующие степень отклонения решения последнего от решения уравнения Больцмана на уровне функции распределения. Однако подобную информацию на уровне моментов функции распределения получить можно. Для максвелловских молекул в случае пространственно однородного газа уравнения для моментов функции распределения, удовлетворяющей уравнению Больцмана, замыкаются и могут быть решены. В частности

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) \exp \left[- \frac{(t-t_0)}{\tau} \right], \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) \exp \left[- \frac{2(t-t_0)}{3\tau} \right], \dots \quad (3.1)$$

где \mathbf{p} и \mathbf{q} — соответственно тензор напряжений и вектор потока тепла больцмановского газа [8].

Нетрудно установить, что уравнение переноса тензора напряжений, следующее из уравнения (2.1), имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \int \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1}{m} J d\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - m\mathbf{v}$$

где J — интеграл столкновений уравнения (2.1). Если теперь воспользоваться свойствами симметрии интеграла столкновений J , то правую часть этого уравнения можно преобразовать так

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1}{m} J d\mathbf{p}_1 &= \frac{N-1}{N} \int \int \int \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1}{m} v_{12} (\rho_2' - \rho_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\Omega = \\ &= \frac{N-1}{N} \int \int \int \frac{v_{12}}{m} (\mathbf{P}_1' \mathbf{P}_2' - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1) \rho_1 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\Omega \end{aligned}$$

Перейдем здесь к системе центра масс $\mathbf{v} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)/2m$, \mathbf{v}_{12} и введем затем декартову систему координат (x, y, z) с осью x вдоль \mathbf{v}_{12} . Тогда $\mathbf{v}_{12}' = (v_{12} \cos \chi, v_{12} \sin \chi \cos \varepsilon, v_{12} \sin \chi \sin \varepsilon)$, где χ — угол поворота вектора относительной скорости после соударения молекул. В этой системе координат удается сразу провести интегрирование по ε , а затем по импульсам частиц. В результате мы приходим к уравнению переноса тензора напряжений

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = - \frac{(N-1)}{N} \frac{\mathbf{p}}{\tau} + \frac{(N-1)}{N} \frac{\mathbf{p}_g}{\tau} \quad (3.2)$$

где τ — время свободного пробега молекул, а \mathbf{p}_g — часть тензора напряжений, обусловленная учетом двухчастичной корреляционной функции

$$\mathbf{p}_g = \tau m^{-1} \int \int v_{12} (\mathbf{P}_1' \mathbf{P}_1' - \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1) g d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\Omega$$

Решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) e^{-t_0'} + \int_{t_0}^t \mathbf{p}_g(t_1) e^{-t_1'} dt_1, \quad t_{0,1}' = \frac{(N-1)(t-t_{0,1})}{\tau N}$$

Чтобы оценить временное поведение этой функции, воспользуемся для g формулой (2.3). Зависимость \mathbf{p} от времени будет тогда описываться соотношением

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) e^{-t_0'} - M \frac{N}{N-1} \left[1 - \frac{N-1}{N-2} e^{-t_0'/(N-1)} + \frac{1}{N-2} e^{-t_0'} \right] \quad (3.3)$$

где M — некоторая постоянная.

При $N \rightarrow \infty$ второй член обращается в нуль и $\mathbf{p}(t)$ становится идентичным больцмановскому выражению (3.1). Конечность числа частиц в системе двояко влияет на характер релаксации функции \mathbf{p} . Во-первых, время релаксации начальных данных увеличивается в $N/(N-1)$ раз по сравнению с временем релаксации больцмановского газа. Во-вторых, тензор напряжений содержит корреляционную часть (второй член в (3.3)), которая при $t \rightarrow \infty$ при любом фиксированном N стремится к некоторому значению M .

Таким образом, результаты численного моделирования будут тем точнее, чем большее число частиц используется в расчетах. При этом для каждого N существует некоторый интервал времени вблизи t_0 , в течение которого результаты расчетов методом прямого статистического моделирования будут хорошо согласовываться с решением уравнения Больцмана. В течение этого интервала корреляции остаются достаточно малыми, и он будет тем больше, чем больше N . Отсюда, в частности, следует, что при описании релаксации сплошной среды, когда характерное время гидродинамических процессов $t \gg \tau$, для моделирования системы необходимо использовать большое число частиц.

Точно так же, как было построено уравнение переноса тензора напряжений, можно вывести и уравнения для моментов более высокого порядка. Эти моменты релаксируют медленнее, чем тензор напряжений. Поэтому чем более высокий момент функции распределения мы хотим рассчитать, тем большее число частиц необходимо для этого использовать. При обработке результатов численных расчетов совсем нетрудно выделить корреляционную часть исследуемого момента функции распределения. Таким образом, вычисление моментов одночастичной функции распределения является хорошим тестом для оценки точности решения задачи пространственно однородной релаксации методом прямого статистического моделирования.

4. До сих пор рассматривалась эволюция пространственно однородных систем. В реальных же задачах динамики разреженного газа обычно приходится исследовать пространственно неоднородные состояния. Прежде чем выводить соответствующее уравнение, необходимо ясно представлять, о какой неоднородности идет речь, каковы ее характерные масштабы. В динамике разреженного газа молекулы считаются точечными частицами, поэтому пространственно-временные масштабы порядка r_0 и времени взаимодействия τ_0 здесь неразличимы. Чтобы получить N -частичную функцию распределения, соответствующую такому уровню описания, необходимо усреднить F_N по времени и пространству с масштабами усреднения τ' и r' , причем $\tau_0 \ll \tau' \ll \tau_\lambda$, $r_0 \ll r' \ll \lambda$, где τ_λ и λ — соответственно время и длина свободного пробега молекул. В соответствии с этим введем оператор усреднения по времени и простран-

ству, определяемый соотношением

$$f_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) = \frac{1}{\tau v} \int_0^\tau ds \int_{v^N} d\mathbf{R}_N F_N(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1', \dots, t + s) \equiv P F_N, \\ d\mathbf{R}_N = d\mathbf{r}_1' \dots d\mathbf{r}_N'$$

Действуя оператором P на уравнение (1.1), получаем

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{1}{v^2} \sum_{j>i}^N \iint d\mathbf{r}_i' d\mathbf{r}_j' \theta_{ij} f_N^{(ij)} \quad (4.1)$$

$$f_N^{(ij)} = \frac{1}{\tau v^{N-2}} \int_0^\tau \int_{v^{N-2}} d\mathbf{R}_{N-2} ds F_N(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1', \dots, t + s)$$

При выводе уравнения (4.1) учтено, что по определению операции усреднения

$$P \frac{\partial F_N}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds \frac{\partial f_N(t+s, \mathbf{r}_1, \dots)}{\partial(t+s)} = \frac{\partial f_N}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{v} \int_v d\mathbf{r}_i' \frac{\partial f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i', \dots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i')} = \frac{1}{v} \int_s f_N(\mathbf{r}_i) n dS$$

где S — поверхность, ограничивающая объем v . Но поскольку $v \ll V$ и $S \ll \Sigma$ (Σ — поверхность, ограничивающая объем V), то, переходя в правой части (4.2) к пределу $S \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$, получим $P[\partial F_N / \partial(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i')] = \partial f_N / \partial \mathbf{r}_i$.

Дальнейший вывод основного кинетического уравнения проводится так же, как и для пространственно однородного случая. Следует только учесть, что так как частицы i и j (см. уравнение (4.1)) находятся в области взаимодействия, т. е. $|\mathbf{R}_{ij}| = |\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j' - \mathbf{r}_j| \sim r_0$, то после интегрирования по пространственным фазам функции $f_N^{(ij)}$ ее i -я и j -я координаты становятся неразличимыми. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{1}{V} \sum_{j>i}^N \int d\Omega v_{ij} [f_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \dots \\ \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_j', \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) - f_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t)]$$

В заключение отметим, что подобное уравнение феноменологически было выведено М. А. Леонтовичем [9] задолго до того, как это было сделано Кацем [3] для пространственно однородного случая.

Автор признателен М. С. Иванову за многочисленные стимулирующие дискуссии и Д. Н. Зубареву, Е. Г. Колесниченко, В. Е. Яницкому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. II. Вычислительные аспекты метода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 6. С. 1553–1567.
2. Иванов М. С., Рогозинский С. В. О связи метода прямого статистического моделирования с уравнением Больцмана // Статистическая механика. Численные методы в кинетике. Теории газов. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1986. С. 17–27.

3. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике: Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 407 с.
4. *Колесниченко Е. Г.* Кинетические уравнения теории химически реагирующих газов. М.: Изд-во МГУ, 1983. 148 с.
5. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 119 с.
6. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
7. *Ловинт У. В.* Линейные интегральные уравнения: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1957. 266 с.
8. *Grad H.* On the kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2, № 4, P. 331-407.
9. *Леонтович М. А.* Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // ЖЭТФ. 1935. Т. 5, № 3-4, С. 211-231.

Новосибирск

Поступила в редакцию
12.II.1988