

УДК 533.6.011.55

© 1989

КОНОТОП Т. В.

ВЯЗКИЙ ПОДСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ОХЛАЖДЕННОГО ТЕЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Существует широкий класс течений со взаимодействием, для которых классическая теория пограничного слоя неприменима, например течения с малыми перепадами давления ($\Delta p/p \ll 1$) в окрестности угловой точки, около различного рода препятствий, задней кромки профиля крыла. Все они характеризуются быстрым изменением параметров пограничного слоя в направлении потока и продольными градиентами давления по порядку большими, чем в невозмущенном пограничном слое. Вследствие этого влияние вязкости в области взаимодействия будет сосредоточено в пристеночной части пограничного слоя.

В области взаимодействия можно выделить следующие три зоны течения в поперечном направлении: область слабо возмущенного потенциального течения 1, которая описывается уравнениями Эйлера; основную часть пограничного слоя 2 с толщиной порядка толщины набегающего пограничного слоя, в которой течение оказывается локально-невязким и справедливы уравнения Эйлера, линеаризованные при характерном возмущении давления $\Delta p/p \ll 1$; вязкий пристеночный подслей 3, который в наиболее общем случае нелинейных возмущений скорости описывается уравнениями пограничного слоя Прандтля.

Одно из различий крайних задач для вязкого подслоя и пограничного слоя состоит в том, что условие для верхней границы вязкого подслоя должно определяться из сращения с решением в нижней части области 2.

Давление, индуцированное во внешнем невязком сверхзвуковом потоке, определяется изменением толщины пограничного слоя $\Delta \delta = \Delta \delta_2 + \Delta \delta_3$, где индексы относятся к номеру зоны. При этом возможны два характерных случая. Если $\Delta \delta_3 \gg \Delta \delta_2$, то распределение давления должно определяться в процессе совместного решения уравнений Прандтля для вязкого подслоя и уравнений Эйлера для внешнего невязкого течения. При этом оказывается, что средний слой передает давление без изменения. Такая схема течения широко используется при исследовании течений со взаимодействием [1-4].

Если же $\Delta \delta_2 \gg \Delta \delta_3$, то распределение индуцированного давления определяется совместным решением крайних задач для течений в зонах 1 и 2. Подобные режимы возникают, например, при гиперзвуковом обтекании холодного тела [5]. При этом решение уравнений Прандтля в вязком подслое 3 должно проводиться при заданном распределении давления. Именно в такой постановке в работе решена задача о вязком подслое в окрестности угловой точки холодного тела.

В работе проведен асимптотический анализ поведения функций течений на верхней границе вязкого подслоя. Полученные результаты позволяют более точно сформулировать крайнюю задачу и улучшить качество численных расчетов течения в вязком подслое.

Получены распределения теплового потока и трения на поверхности тела для до- и закритического режимов взаимодействия; для течений разрежения расчетные результаты представлены в виде зависимости максимальных значений трения и теплового потока от температурного фактора и угла отклонения щитка; для практического использования предложены аппроксимационные формулы.

1. Рассматривается течение около плоской пластины длиной l с установленным за ней щитком, отклоненным на угол $|\beta| \ll 1$. Отношение энтальпии газа на стенке к энтальпии торможения гиперзвукового набегающего потока $g_w \ll 1$.

Согласно линейной теории (в предположении, что $Me|\beta| \ll 1$, $\Delta p/p_e \ll 1$)

сверхзвуковых течений при $M_e \rightarrow \infty$

$$\frac{\Delta p}{p_e} = \gamma M_e \frac{d\delta}{dx} \ll 1 \quad (1.1)$$

где x — продольная координата, направленная вдоль пластины; δ — расстояние от оси x до внешней границы пограничного слоя.

Как показано в [6], при достаточно малых значениях g_w изменения толщины слоя $2\Delta\delta_2 \gg \Delta\delta_1$ и характерные размеры области взаимодействия, расположенной в окрестности начала щитка, таковы: $\Delta x \sim \delta M_e$, $\Delta y \sim \delta$. Как упоминалось выше, течение в ней в первом приближении локально-невязкое. Величина угла β в [6] была выбрана таким образом, чтобы уравнения, описывающие течение в вязком подслое β , содержали градиентный, главный вязкий и нелинейный инерционный члены (см. (4.3)). Такой выбор угла отклонения щитка дает возможность исследования как безотрывного, так и возможного отрывного (в случае $\Delta p > 0$) режимов течения.

В [6] также получено распределение индуцированного давления в области взаимодействия. Основная особенность характеризуется функциональной зависимостью распределения возмущения давления от параметра

$$L = \int_0^{\delta} \left(\frac{1}{M^2(y)} - 1 \right) dy$$

где $M(y)$ — профиль числа Маха в невозмущенном пограничном слое, y — поперечная координата. В частности, оказалось, что при $L > 0$ увеличение давления происходит до щитка (такой режим назван докритическим), а при $L < 0$ область возмущения давления лежит за угловой точкой (закритический режим).

2. Для определения таких характеристик течения, как трение и тепловой поток, на стенке необходимо рассмотреть тонкий вязкий подслой, течение в котором в первом приближении описывается уравнениями пограничного слоя с заданным градиентом давления.

Принцип сращивания асимптотических разложений [7] в основной части пограничного слоя и пристеночной области показывает, что решение в подслое должно переходить на верхней границе в решение, соответствующее течению с такими же значениями трения и теплового потока, как и в невозмущенном пограничном слое у поверхности пластины.

Краевая задача для вязкого подслоя, подставленная в [6] с помощью введения безразмерных переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial \eta} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial \eta} + G \frac{dP}{dX} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G^{n-1} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \\ U \frac{\partial G}{\partial X} + V \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{G^{n-1}}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где, согласно [6], U и V — продольная и поперечная компоненты скорости, P — давление, G — энтальпия, X — продольная координата, индекс w относится к значениям параметров на стенке, безразмерная переменная α соответствует углу отклонения щитка β (см. ниже (4.3)), $\eta(X, Y)$ — переменная Дородницына, σ — число Прандтля, n — показатель степени в степенном законе зависимости вязкости от температуры.

Для закритического режима

$$P(X) = \alpha(1 - e^{-X}), \quad X \geq 0; \quad P(X) = 0, \quad X < 0 \quad (2.2)$$

Для докритического режима

$$P(X) = \alpha e^X, \quad X \leq 0; \quad P(X) = \alpha, \quad X > 0$$

Граничные условия:

$$\eta = 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad G = G_w \quad (2.3)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \frac{G^{n-1}}{\sigma} \frac{\partial G}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad G^{n-1} \frac{\partial U}{\partial \eta} \rightarrow 1$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad G(X \rightarrow -\infty, \eta) \rightarrow G_0(\eta) = (\sigma n \eta + G_w^n)^{1/4} \quad (2.4)$$

$$U(X \rightarrow -\infty, \eta) \rightarrow U_0(\eta) = \frac{1}{\sigma} (G_w^n + \sigma n \eta)^{1/n} - \frac{G_w}{\sigma}$$

3. Исследуем асимптотическое поведение решений краевой задачи (2.1)–(2.4) на верхней границе подслоя (при $\eta \rightarrow \infty$) и вверх по потоку от угловой точки (при $X \rightarrow -\infty$).

Из (2.4) следует, что при $\eta \rightarrow \infty$, в случае $1/2 < n \leq 1$

$$U_0(\eta) \rightarrow \eta^{1/n} (C_0 + C_1 \eta^{-1} + C_2 \eta^{-2}) - \frac{G_w}{\sigma}$$

$$G_0(\eta) \rightarrow \eta^{1/n} (K_0 + K_1 \eta^{-1} + K_2 \eta^{-2} + \dots) \quad (3.1)$$

$$C_0 = \frac{1}{\sigma} K_0, \quad C_1 = K_0 (\sigma n)^{-2}$$

$$C_2 = \frac{1-n}{2n} \frac{K_0}{(\sigma n)^3} G_w^{2n}$$

$$K_0 = (\sigma n)^{1/n}, \quad K_1 = \frac{G_w^n}{\sigma n^2} K_0$$

$$K_2 = K_0 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{G_w^{2n}}{2n (\sigma n)^2}$$

Отметим, что при $n > 1$ члены $-G_w/\sigma$ и $C_2 \eta^{1/n-1}$ в разложении для $U_0(\eta)$ поменяются местами.

Асимптотическое представление функций $U(X, \eta)$ и $G(X, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ зависит от значения параметра n .

При $n > 1$

$$U(X, \eta \rightarrow \infty) = C_0 \eta^{1/n} + a_1(X) + a_2(X) \eta^{1/n-1}$$

$$G(X, \eta \rightarrow \infty) = K_0 \eta^{1/n} + b_1(X) + b_2(X) \eta^{1/n-1} \quad (3.2)$$

При $1/2 < n < 1$

$$U(X, \eta \rightarrow \infty) = C_0 \eta^{1/n} + a_1(X) \eta^{1/n-1} + a_2(X) + \dots$$

$$G(X, \eta \rightarrow \infty) = K_0 \eta^{1/n} + b_1(X) \eta^{1/n-1} + b_2(X) + \dots \quad (3.3)$$

При $n = 1$

$$U(X, \eta \rightarrow \infty) = \eta + a_1(X) \ln \eta + a_2(X)$$

$$G(X, \eta \rightarrow \infty) = \sigma \eta + b_1(X) \ln \eta + b_2(X) \quad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.2)–(3.4) в (2.1) при совершении предельного перехода $\eta \rightarrow \infty$ и учитывая то обстоятельство, что при $X \rightarrow -\infty$ разложения (3.2)–(3.4) должны переходить в разложения (2.4), получим: для $n > 1$

$$a_1(X) = \frac{\sigma n}{1-n} P(X) - \frac{G_w}{\sigma} \quad (3.5)$$

$$b_1(X) = \frac{\sigma^2}{1-n} P(X)$$

для $1/2 < n < 1$

$$a_2(X) = \frac{\sigma n}{1-n} P(X) - \frac{G_w}{\sigma}$$

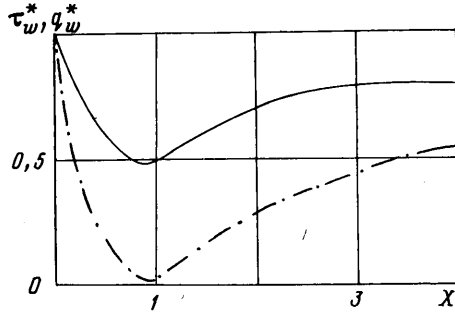
для $n=1$

$$a_1(X) = -\sigma P(X)$$

$$b_1(X) = -\sigma^2 P(X)$$

где $a_1(X)$, $b_1(X)$ — произвольные функции, характеризующие толщину вытеснения.

При исследовании затухания возмущений вверх по потоку для докритического



Фиг. 1

тического распределения давления $P(X) = \alpha e^X (X \leq 0)$ ограничимся случаем $n=1$.

Представим решения задачи (2.1) — (2.4) для $X \rightarrow -\infty$ в виде

$$\begin{aligned} U(X \rightarrow -\infty, \eta) &= \eta + e^X f(\eta) \\ G(X \rightarrow -\infty, \eta) &= \sigma \eta + G_w + e^X g(\eta) \\ V(X \rightarrow -\infty, \eta) &= e^X v(\eta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

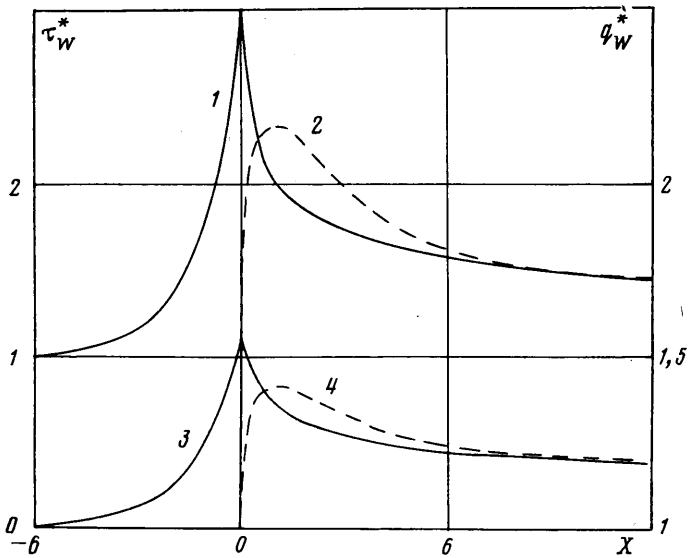
После подстановки (3.6) в (2.1) — (2.4) и совершения предельного перехода $X \rightarrow -\infty$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \eta f - v - \alpha \sigma \eta - \alpha G_w &= 0 \\ f + \frac{dv}{d\eta} &= 0, \quad \frac{d^2 g}{d\eta^2} - \sigma \eta g - v \sigma^2 &= 0 \\ v(0) &= 0, \quad f(0) = 0, \quad \frac{df}{d\eta}(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{\sigma \alpha}{\eta} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение краевой задачи (3.7) выражается через функции Бесселя, система (3.7) численно решалась на ЭВМ.

Полученные асимптотические двучленные разложения дают возможность при численном решении исходной системы (2.1) — (2.4) более точно определить краевые условия на границах расчетной области при больших, но конечных значениях координат X и η .

4. Численный анализ решений краевой задачи (2.1) — (2.4) в случае $\sigma = n = 1$ для различных значений параметров G_w был проведен на ЭВМ как для до-, так и закритических распределений давления $P(X)$. В расчетах использовался маршевый метод решения уравнений параболического типа, аналогичный методу Крэнка — Никольсона второго порядка точности по обеим координатам с шагами $\Delta X = 0,1$ и $\Delta \eta = 0,05$. Начальная характеристика расчетной области располагалась в точке $X_0 = -6$ для докритического и в точке $X_0 = 0$ для закритического режима обтекания. Верхняя граница соответствовала значению $\eta = \eta_e = 12,5$. Краевые условия на начальной характеристике и верхней границе расчетной области определялись с помощью соотношений (3.4) — (3.6).



Фиг. 2

При обтекании щитка сжатия ($\alpha > 0$) наиболее интересен случай зарождения отрыва, который соответствует появлению на поверхности тела точки, в которой поверхностное трение обращается в нуль.

На фиг. 1 представлено поведение функций поверхностного трения $\tau_w^*(X) = G_w^{n-1} (\partial U / \partial \eta)$ (штрихпунктирная линия) и теплового потока $q_w^*(X) = G_w^{n-1} / \sigma \partial U / \partial \eta$ (сплошная линия) для предотрывного обтекания щитка при закритическом режиме с параметрами $\sigma = 1$, $G_w = 1$, $\alpha = 0,417$, причем $\tau_w^*(X) = \tau_w / \tau_{w0}$, $q_w^*(X) = q_w / q_{w0}$, где индекс ноль относится к размерному параметру τ_w (или q_w) для невозмущенного течения.

На фиг. 2 даны примеры распределений трения $\tau_w^*(X)$ (кривые 1, 2) и теплового потока $q_w^*(X)$ (кривые 3, 4) для до- (сплошные линии) и закритического (штриховые линии) режимов течения разрежения. Температурный фактор $G_w = 1$, угол $\alpha = -1$.

Для течений разрежения около угловой точки ($\alpha < 0$) характерны максимальные значения теплового потока к стенке и поверхностного трения. Эти величины представляют собой функции параметров α и G_w : $\tau_{w \max}^* = F(\alpha, G_w)$, $q_{w \max}^* = \Phi(\alpha, G_w)$, $n = 1$, $\sigma = 1$.

Как для за- так и докритических режимов расчетные значения функций $F(\alpha, G_w)$ и $\Phi(\alpha, G_w)$ аппроксимируются следующими зависимостями: при $L = -1$

$$\tau_{w \max}^*(\alpha, G_w) = 1 + 0,56 |\alpha|^{0,76} G_w + 0,78 |\alpha|^{0,91} \quad (4.1)$$

при $L = 1$

$$q_{w \max}^*(\alpha, G_w) = 1 + 0,125 |\alpha|^{0,38} G_w + 0,3 |\alpha|^{0,73}$$

$$\tau_{w \max}^*(\alpha, G_w) = 1 + 0,88 |\alpha| G_w + 1,16 |\alpha|^{0,935} \quad (4.2)$$

$$q_{w \max}^*(\alpha, G_w) = 1 + 0,15 |\alpha|^{0,74} G_w + 0,4142 |\alpha|^{0,74}$$

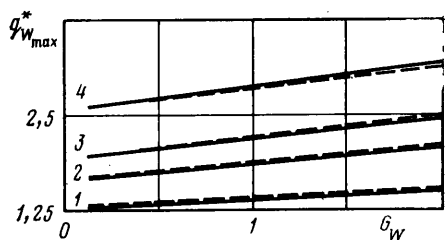
Связь безразмерных величин с размерными вытекает из приведенных ранее в [6] формул и имеет вид

$$G_w = (d\chi)^{-1/(n+2)} g_w, \quad d = \frac{b^3}{a} \frac{\gamma-1}{2} |L|$$

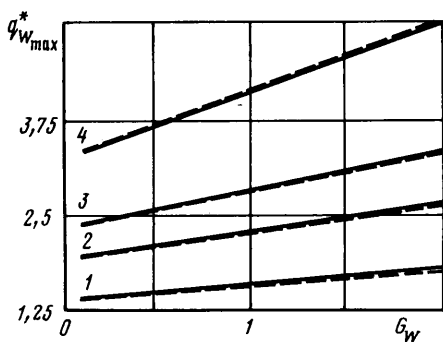
$$\alpha = \frac{M_e}{ab|L|} \chi^{-1/(n+2)} d^{(n+1)/(n+2)} \beta$$

$$a = \frac{\tau_{w0} M_e}{\mu_0 U_e \text{Re}^{1/2}}, \quad b = \frac{2q_{w0} M_e}{U_e^2 \mu_0 \text{Re}^{1/2}}$$

$$\chi = M_e^2 \text{Re}^{-1/2} \quad (4.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где μ_0 — коэффициент вязкости, вычисленный при температуре торможения набегающего потока, индексом e отмечены значения переменных на внешней границе пограничного слоя.

Расчетные данные для функции $q_{w\max}^*(\alpha, G_w)$ (штриховые линии) вместе с аппроксимацией по формулам (4.1)–(4.2) (сплошные линии) представлены на фиг. 3 для закритического и на фиг. 4 для докритического режимов. Кривые 1 соответствуют $\alpha = -1$, 2 — $\alpha = -3$, 3 — $\alpha = -5$, 4 — $\alpha = -10$. Графики показывают хорошее соответствие расчетных и аппроксимационных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 124 с.
2. Adamson T. C., Jr., Messiter A. F. Analysis of two-dimensional interactions between shock waves and boundary layers // Annu. Rev. Fluid Mech. V. 12. Palo Alto, Calif. 1980. P. 103–138.
3. Нейланд В. Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. 1981. Т. 4. Вып. 2. С. 3–62.
4. Messiter A. F. Boundary-layer interaction theory // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 4b. P. 1104–1113.
5. Нейланд В. Я. Особенности отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле и его взаимодействие с гиперзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 99–109.
6. Нейланд В. Я., Соколов Л. А. К асимптотической теории зарождения отрыва около щитка при обтекании охлажденного тела гиперзвуковым потоком на режиме слабого гиперзвукового взаимодействия // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 3. С. 25–34.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости: Пер. с англ. М.: Мир, 1967 г. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1987