

УДК 533.6.011.5

© 1989

ПИЛЮГИН Н. Н., ТАЛИПОВ Р. Ф.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА
В УДАРНОМ СЛОЕ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ОБТЕКАНИИ
ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА И ПОДАЧЕ ГАЗА С ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел неравномерным потоком газа без подачи вещества с поверхности проводилось ранее как численными [1-3], так и экспериментальными методами [3]. Представляет интерес изучение процессов испарения поверхности тел под действием интенсивного теплового потока, искусственной подачи газа с поверхности или ее горения [4].

Данная работа посвящена проблеме взаимодействия неравномерного сверхзвукового потока с телом при наличии интенсивной подачи газа с его поверхности и построению аналитического решения задачи для такого течения.

1. Рассматривается сверхзвуковое стационарное обтекание осесимметричного гладкого затупленного тела неравномерным потоком вязкого совершенного газа при подаче другого газа с его поверхности. Числа Рейнольдса за скачком $Re_s = \rho_\infty V_\infty R_0 / \mu_s$ (коэффициент вязкости μ_s определяется по температуре торможения за скачком) и около тела $Re_w = \rho_w v_w R_0 / \mu_w$ велики, так что область молекулярного переноса, разделяющая невязкое течение около тела и около скачка, может быть заменена контактной поверхностью [5-7]. Параметры неравномерности набегающего потока имеют вид [3]

$$\begin{aligned} V_1(r) &= 1 - a \exp(-br^2), \quad p_1(r) = (\gamma M_\infty^2)^{-1} \\ \rho_1(r) &= B(1 + C[1 - V_1^2(1 - a)^{-2}])^{-1} \\ B &= 1 + C[1 - (1 - a)^{-2}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь V_1 , ρ_1 , p_1 , h_1 — скорость, плотность, давление и энтальпия в набегающем потоке, которые отнесены соответственно к значениям V_∞ , ρ_∞ , $\rho_\infty V_\infty^2$, $V_\infty^2/2$; M_∞ , V_∞ , ρ_∞ — число Маха, размерные скорость и плотность при $r \rightarrow \infty$, r — расстояние от оси симметрии, отнесенное к R_0 — характерному линейному размеру, a , b , C — параметры неравномерности, γ — показатель адиабаты. В переменных x , ψ система уравнений Эйлера имеет вид [5]

$$\begin{aligned} d\psi &= \rho u r dy - \rho v r H_1 dx \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{1}{\rho u r}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = H_1 \frac{v}{u}, \quad H_1 = 1 + \frac{y}{R} \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{R H_1} &= -r \frac{\partial p}{\partial \psi}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь x, y — координаты, отнесенные к R_0 , измеряемые соответственно вдоль и по нормали к телу; u, v — проекции скорости на оси x и y , отнесенные к V_∞ ; p, h — безразмерные плотность, давление и энтальпия, H_1 — коэффициент Ламе, $\chi = R_0/R$ — кривизна поверхности тела, ψ — функция тока, отнесенная к $\rho_\infty V_\infty R_0^2$.

Граничными условиями для системы уравнений (1.2) будут: условие нормальной подачи газа на поверхности тела, соотношения Рэнкина — Гюгонио на скачке и условие равенства давления на контактной поверхности

$$\psi = \psi_w = - \int_0^x \rho_w v_w r_w dx, \quad y=0, \quad u=0, \quad h=h_w(x) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_s = \rho_1 V_1 r_s^2 / 2, \quad r_s = r_w + y_s \cos \alpha \\ u_s &= V_1 \left(\cos \beta \cos \delta_s + \frac{\rho_1}{\rho_s} \sin \beta \sin \delta_s \right) \\ v_s &= V_1 \left(\cos \beta \sin \delta_s - \frac{\rho_1}{\rho_s} \sin \beta \cos \delta_s \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} p_s &= p_1 + \rho_1 V_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_s} \right) \\ \frac{\rho_1}{\rho_s} &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta}, \quad M_1^2 = \frac{\rho_1 V_1^2}{\gamma p_1} \\ \operatorname{tg} \beta_s &= \frac{dy_s}{dx} \frac{1}{1 + \chi y_s}, \quad \delta_s = \beta - \alpha \end{aligned}$$

$$\psi = 0, \quad p = p_c, \quad y = y_c(x) \quad (1.5)$$

Здесь r_w, r_s — безразмерные расстояния от оси симметрии до поверхности тела и до скачка уплотнения соответственно; β, α — углы между касательными к скачку и к телу соответственно и осью симметрии, $y_s = y_s(x)$ — уравнение образующей ударной волны.

Известные аналитические исследования интенсивной подачи вещества с поверхности [5–9] основаны на предположении о тонкости газового слоя около тела. В этом случае в первом приближении этот слой описывается уравнениями невязкого пограничного слоя, решение которых легко определить в квадратурах, если известно распределение давления на контактной поверхности.

Для сильно затупленных [8, 9] и тонких тел [8] слой вдуваемого газа существенно влияет на распределение давления на контактной поверхности уже в первом приближении. В этом случае слой около тела и ударный слой необходимо рассчитывать совместно. В такой постановке задача обладает эллиптическими свойствами, которые проявляются через форму контактной поверхности и заключаются в том, что условия ниже по течению могут оказывать влияние на течение в окрестности критической линии.

В исследованиях [8, 9] использовалась формула Ньютона для определения давления на контактной поверхности, в результате чего задача сводилась к интегральному уравнению относительно формы контактной поверхности или давления на ней. Для замыкания задачи необходимо использовать дополнительное граничное условие вниз по потоку. В случае тонких тел [8] используется условие для давления (или его производной) на задней кромке тела. Для тел, имеющих передний торец, в [8, 9] используется дополнительное условие на острой кромке тела.

Для гладких затупленных тел, как показали сравнения асимптотических и численных решений [5–7], слой вдуваемого газа не влияет в первом приближении по малому параметру на распределение давления по контактной поверхности.

Ниже построено решение, в котором в отличие от работ [5–7] уже в первом приближении учитывается отклонение кривизны контактной по-

верхности κ_1 от кривизны тела κ . Для нахождения κ_1 получено алгебраическое уравнение. Показано, что решение с учетом поправки на кривизну контактной поверхности (т. е. $\kappa_1 \neq \kappa$) дает для величины отхода контактной поверхности лучшее согласование с численными результатами, чем при $\kappa_1 = \kappa$.

При больших сверхзвуковых скоростях набегающего потока ($M_1^2 \sin^2 \beta \gg 1$) отношение плотностей в набегающем потоке ρ_1 и за скачком ρ_s мало и

$$\frac{\rho_1}{\rho_s} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad M_1^2 \sin^2 \beta \rightarrow \infty$$

Введем малый параметр k , характеризующий толщину невязкого ударного слоя, проекцию скорости на нормаль к телу и отношение плотностей до и после скачка. В качестве k можно выбрать величину $k = (\gamma-1)/(\gamma+1)$. Решение системы уравнений (1.2) с граничными условиями (1.4) ищется в виде разложений по малому параметру k [5, 10]. При этом течение в ударном слое распадается на два подслоя, в каждом из которых решение имеет вид различных разложений по k . Решение во всем ударном слое может быть получено либо путем асимптотического сращивания этих решений, либо путем решения асимптотических уравнений, равномерно пригодных во всем ударном слое. В последнем случае хорошее решение во всем ударном слое можно получить [10], если в методе последовательных приближений использовать первое приближение по k для продольного градиента давления. В соответствии с этим, предполагая, что в ударном слое все безразмерные газодинамические функции и их первые производные величины порядка единицы, подставим разложения функций по k в (1.2). Решение уравнений нулевого приближения по k имеет вид

$$u_0 = u_0(\psi) = V_1(t) \cos \alpha(t), \quad h_0 = h_0(\psi) = 0,5 V_1^2(t) \sin^2 \alpha(t)$$

$$\rho_0(x, \psi) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{h_0}, \quad v_0 = u_0 \frac{\partial y_0}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$p_0(x, \psi) = \rho_1 V_1^2(x) \sin^2 \alpha(x) - \frac{\kappa}{r_w} \int_{\psi}^{\psi_s} u_0(\psi) d\psi$$

$$y(x, \Psi) = \frac{1}{r_w} \int_{\psi}^{\psi_s} \frac{d\psi}{\rho_0 u_0}$$

Здесь t — координата x точки пересечения линии тока с ударной волной.

Представив касательную составляющую скорости u в виде [10] $u^2 = u_0^2 + k u_1^2$ из (1.2) вдоль линии тока $\psi = \psi_s(t)$ получим

$$\frac{p_c(x)}{\rho^{\gamma}(x, t)} = \frac{p_1(t)}{\rho_1^{\gamma}(t)}$$

$$u^2(x, t) - V_1^2(t) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{p_1(t)}{\rho_1(t)} - \frac{p_c(x)}{\rho(x, t)} \right] \quad (1.7)$$

Используя эти формулы, после несложных преобразований имеем интегральное уравнение относительно давления на контактной поверхности

$$p_c(x) = \rho_1(x) V_1^2(x) \sin^2 \alpha(x) - \frac{\kappa}{r_w(x)} \int_0^x \sin \alpha(t) r_w \Phi dt$$

$$\Phi(x, t) = \left\{ 2H_{\infty}(t) - \left[\frac{p_c(x)}{p_c(t)} \right]^{(\gamma-1)/\gamma} (2H_{\infty} - V_1^2(t)) \right\}^{1/2} \quad (1.8)$$

$$H_{\infty}(t) = -\frac{V_1^2(t)}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1(t)}{\rho_1(t)}$$

Если пренебречь подслоем $O(k^{1/2})$ около контактной поверхности, то для давления из (1.8) получили бы формулу Буземана

$$p_c(x) = \rho_1 V_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{\kappa}{r_w} \int_0^x \rho_1 V_1^2 \sin \alpha \cos \alpha r_w dt$$

Наличие тонкого подслоя, как это следует из (1.8), приводит к уменьшению вклада буземановского слагаемого в давлении, что дает более близкое значение $p_c(x)$ к формуле Ньютона. В связи с этим далее рассматривается решение на основе модифицированной формулы Ньютона.

2. Рассмотрим интенсивный дозвуковой вдув с поверхности затупленного тела. Предполагается, что отношение плотностей потоков масс вдуваемого и набегающего на тело газов $G = \rho_w v_w / (\rho_{\infty} V_{\infty})$ имеет порядок единицы и параметр $\delta^2 = \rho_w v_w^2 / \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \ll 1$. Масштаб нормальной координаты определяется параметром δ . Из условия $G = O(1)$ и (1.3) следуют оценки для параметров течения в слое вдува [5]:

$$y = O(\delta), \quad u = O(k_1^{1/2}), \quad v = O(k_1), \quad \rho = O(k_1^{-1}) \quad (2.1)$$

$$\Psi = O(1), \quad h = O(k_1), \quad p = O(1), \quad x = O(1), \quad k_1 = \rho_{\infty} / \rho_w$$

Разлагая параметры течения в ряд по степеням параметра δ в виде $f = f_0 + \delta f_1 + \dots$, для первых членов разложения получим уравнения невязкого пограничного слоя [5, 6].

Решение этих уравнений с учетом граничных условий на теле (1.3) и на контактной поверхности (1.5) имеет вид [5]

$$u^2 = 2h_w \left(1 - \left[\frac{p_c(x)}{p_c(t)} \right]^{(\gamma-1)/\gamma} \right), \quad \frac{\rho(x, t)}{\rho_w(t)} = \left[\frac{p_c(x)}{p_c(t)} \right]^{1/\gamma} \quad (2.2)$$

$$y = \frac{1}{r_w} \int_0^x \frac{\rho_w v_w r_w dt}{\rho u}, \quad v = u \frac{dy}{dx}, \quad p(x, t) = p_c(x)$$

Здесь t — координата точки пересечения линии тока с поверхностью тела.

Отход контактной поверхности определяется по формуле

$$y_c(x) = \int_0^x \frac{v_w(t) r_w(t) dt}{\eta (1 - \eta^{\gamma-1})^{1/2} r_w(x) \sqrt{2T_w(t)}}, \quad \eta = \left[\frac{p_c(x)}{p_c(t)} \right]^{1/\gamma} \quad (2.3)$$

Используя формулу (1.8) для определения давления на контактной поверхности, легко найти параметры течения в слое вдува.

Рассмотрим теперь случай, когда давление на контактной поверхности задается формулой Ньютона

$$p_c(x) = \rho_1(x) V_1^2(x) \sin^2 \alpha_c(x). \quad (2.4)$$

В этом случае задача о течении в слое вдува отделяется от задачи в ударном слое [6].

Формулы (2.3), (2.4) вместе с геометрическим соотношением

$$\operatorname{tg}(\alpha_c - \alpha) = (1 + \kappa y_c)^{-1} dy_c / dx$$

образуют интегральное уравнение для формы контактной поверхности. Легко показать, что задача не замкнута в окрестности оси симметрии. Для этого разложим давление $p_c(x)$ в ряд по степеням x с учетом следующих

выражений для α_c и α получим

$$\alpha_c(x) = \pi/2 - \kappa_1 x - \kappa_2 x^3 - \dots, \quad \alpha(x) = \pi/2 - \kappa x. \quad (2.5)$$

$$p_c(x) = \Pi_0 + \Pi_2 x^2 + \Pi_4 x^4 + \dots \quad (2.6)$$

$$\Pi_0 = B(1-a)^2, \quad \Pi_2 = \Pi_0(\lambda_1 - \kappa_1^2)$$

$$\Pi_4 = \Pi_0(\lambda_2 - \lambda_1 \kappa_1^2 + \kappa_1^4/3 - 2\kappa_1 \kappa_2)$$

$$\lambda_1 = \frac{2ab(1+C)}{1-a}, \quad \lambda_2 = \frac{ab^2(1+C)(1+4aC)}{(1-a)^2}$$

В [5, 6] скорость вдуваемого газа на поверхности задавалась по степенному закону при $T_w = \text{const}$

$$v_w(x) = v_{w0} \sin^n \alpha(x)$$

Разложение подынтегральных функций в (2.3) в ряды по степеням t и интегрирование приводят к формуле вида

$$y_c(x) = y_{c0} + y_{c2} x^2 + \dots \quad (2.7)$$

где коэффициенты y_{c0} , y_{c2} являются функциями κ_1 и κ_2 . Из выражения (2.4) получим аналогичное разложение

$$y_c(x) = y_{c0} + 1/2(1 + \kappa y_{c0})(\kappa - \kappa_1)x^2 + \dots \quad (2.8)$$

Сравнение формул (2.7), (2.8) дает два соотношения для трех неизвестных y_{c0} , κ_1 и κ_2 . Невозможность определения одного из параметров является следствием зависимости течения на оси симметрии от условий ниже по потоку.

Покажем, что учет кривизны κ_2 внесет в формулы для y_{c2} и κ_1 поправку порядка $O(\delta^2)$. Если воспользоваться методом усеченных рядов по x вблизи оси симметрии и формулой для скорости, которая следует из (2.2)

$$u(x, t) = \sqrt{x^2 - t^2} \sqrt{\gamma - 2\Pi_2/\rho_{w0}(1+W_1)}^{1/2}$$

$$W_1 = \frac{\Pi_2}{\Pi_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} (x^2 - t^2) + \left(\frac{\Pi_4}{\Pi_0} - \frac{1}{2} \frac{\Pi_2}{\Pi_0} \right) (x^2 + t^2)$$

то коэффициенты y_{c0} , y_{c2} примут вид

$$y_{c0} = \frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma - 2\Pi_2}}, \quad \delta_0 = \left(\frac{\rho_{w0}}{\rho_\infty} \right)^{1/2} \frac{v_{w0}}{V_\infty}$$

$$y_{c2} = \frac{\delta_0}{3\sqrt{\gamma - 2\Pi_2}} \left\{ -\frac{\Pi_2}{\Pi_0 \gamma} - \kappa^2 (n - 1/6) + W_2 \right\}$$

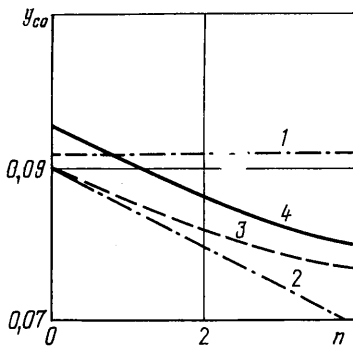
$$W_2 = -\frac{5}{2} \frac{\Pi_4}{\Pi_2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{\Pi_2}{\Pi_0}, \quad \Pi_4 = \Pi_4(\kappa_2)$$

Если пренебречь поправками W_1 и W_2 , то необходимость в определении κ_2 отпадает.

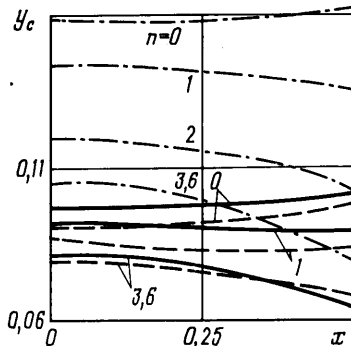
Оценим величину W_2 в равномерном случае ($\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$), используя формулы (2.6) для Π_4 и Π_2 . Имеем

$$W_2 = \kappa_1^2 \left(\frac{2\gamma-3}{6\gamma} \right) - \frac{5\kappa_2}{\kappa_1}$$

Кривизна κ_2 из (2.5) имеет порядок $O(\delta)$. Так как $\kappa_1 = O(1)$, то, по крайней мере при $\delta > 10^{-2}$ и $\gamma = 1,4$, порядок величины W_2 определяется вторым членом и равен $O(\delta)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из (2.7), (2.8) для кривизны контактной поверхности на оси симметрии κ_1 получим уравнение

$$\frac{3\gamma}{2\delta_0} (\kappa - \kappa_1) \{ \kappa \delta_0 + [2B(\kappa_1^2 - \lambda_1)(1-a)^2]^{1/2} \} = \kappa_1^2 - \lambda_1 - \gamma(n - 1/6)\kappa^2 + \gamma W_2 \quad (2.9)$$

В случае равномерного набегающего потока $a=0$ уравнение (2.9) имеет решение (2.10), а форма контактной поверхности принимает в этом случае вид

$$\frac{\kappa_1}{\kappa} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ 1 - \delta_1 + \left[(1 - \delta_1)^2 + 4\Delta\delta_1 \left(1 + \frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{6} - \frac{W_2}{\kappa^2} \right) \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (2.10)$$

$$\delta_1 = \delta_0 / \sqrt{2}, \quad \Delta = 1 + 2\delta_1 / 3\gamma$$

$$y_c(x) = \frac{\delta_1}{\kappa_1} \left\{ 1 + \left[\frac{\kappa_1^2}{\gamma} - \kappa^2 \left(n - \frac{1}{6} - \frac{W_2}{\kappa^2} \right) \right] \frac{x^2}{3} + \dots \right\} \quad (2.11)$$

Из (2.10) следует, что величина W_2 вносит в κ_1 поправку порядка $O(\delta^2)$, в то время как точность формулы (2.10) имеет первый порядок по параметру δ . С уменьшением δ и увеличением n точность формулы (2.10) при $W_2=0$ возрастает. При неравномерном обтекании, когда $\Pi_2 \rightarrow 0$, основную роль в разложении $u(x, t)$ в ряд по x начинает играть величина Π_4 , которая содержит κ_2 . Однако при этих параметрах неравномерности (a, b, C) нарушаются предположения, лежащие в основе рассматриваемой теории.

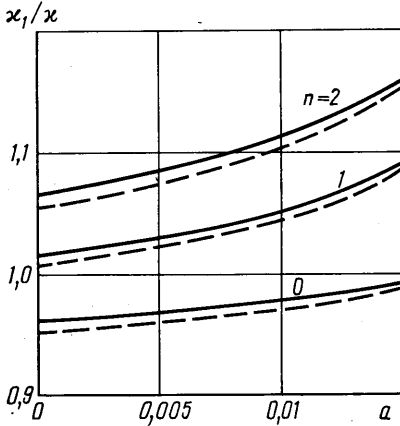
Подобная ситуация для определения кривизны ударной волны (без слоя ддува) проанализирована в [11], где для замыкания задачи, решаемой методом усеченных рядов, используется условие равенства кривизны ударной волны и тела. В случае ддуваемого газа имеется еще один малый параметр δ_0 , который позволил оценить влияние κ_2 на решение.

Для сравнения с известными результатами на фиг. 1, 2 рассматривается отход контактной поверхности при подаче газа со сферы. На фиг. 1 приводится зависимость отхода контактной поверхности на оси симметрии y_{c0} от параметра n при фиксированном $\delta_0^2 = 0,017$. Кривые 1, 2 соответствуют первому приближению и отвечают двум первым приближениям работы [5]. Кривая 3 — численный расчет из работы [6]. Кривая 4 построена по формулам (2.10), (2.11). Отметим, что при $n \geq 1$ формулы (2.10), (2.11) улучшают первое приближение, а при $n \geq 3$ — и первые два приближения работы [5]. Отличие от численного решения [6] максимально при $n=0$, но не превышает 7%. На фиг. 2 приводится зависимость $y_c = y_c(x)$ при $\delta_0^2 = 0,017$ и различных значениях параметров n и a . Сплошными кривыми приведен расчет по формулам (2.10), (2.11) для равномерного случая ($a=0$), штрихпунктирными — при $a=0,01$, штриховыми — расчет из [6].

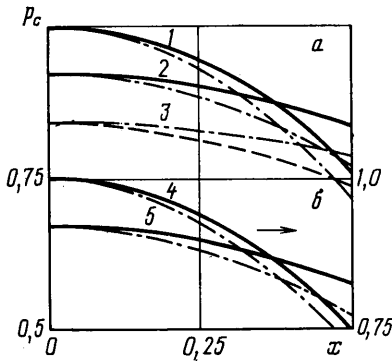
Отличие от численного решения максимально для $n=3,6$ при $x=0,5$ и составляет около 8%. Из расчета следует, что величина y_c уменьшается с ростом параметра n и уменьшением a . С увеличением n меняется вид зависимости $y_c(x)$, увеличение параметра a заметно меняет характер этой зависимости по сравнению с $a=0$.

Значения отхода в окрестности оси симметрии во всех случаях несколько завышены. Это объясняется тем, что в результате предположения $\partial p/\partial y=0$ значение продольного градиента давления в слое вдува занижено и растекание газа от критической линии происходит медленнее, что и приводит к большим значениям отхода на оси, чем при численном расчете. Расчеты по формулам (2.10), (2.11) показывают, что при уменьшении показателя адиабаты γ отход на оси симметрии увеличивается, однако различие при $\gamma=1,4$ и $1,1$ не превышает 1%. Такая слабая зависимость отхода от параметра γ отмечалась при численном решении уравнений Эйлера в слое вдува в [7].

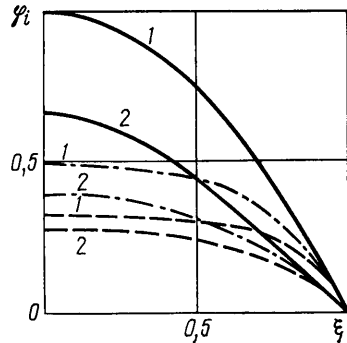
На фиг. 3 представлено отношение кривизны контактной поверхности κ_1 к кривизне тела κ в зависимости от параметра неравномерности a для разных n и γ . С увеличением неравномерности



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

a величина κ_1/κ растет. Сплошные кривые на фиг. 3 соответствуют $\gamma=1,4$; штриховые — $\gamma=1,1$. Видно слабое влияние изменения γ на отношение кривизн. Более заметное влияние на κ_1/κ оказывает параметр n . При $n \geq 1$ контактная поверхность имеет большую кривизну, чем тело, и это отличие возрастает с увеличением n . При $n=0$ контактная поверхность имеет меньшую кривизну, чем тело при $a \leq 0,015$.

На фиг. 4, а приведено распределение давления на контактной поверхности в зависимости от параметров неравномерности и законов вдува, рассчитанное по формулам (2.6) и (2.9). Сплошные линии соответствуют случаю равномерного вдува ($n=0$), штрихпунктирные — неравномерному вдуву с $n=2$, штриховые — с $n=4$. Цифрами 1—3 обозначены кривые, соответствующие параметрам $b=7,2$; $C=3,0$ при $a=0$; $0,01$; $0,02$. Отметим, что давление на оси значительно убывает с ростом параметра a , при этом градиент давления также уменьшается. Рост параметра n приводит к увеличению продольного градиента давления. На фиг. 4, б приводится сравнение распределений давления $p_c(x)$, вычисленных по формуле (2.6)

при $\kappa_1 \neq \kappa$ (сплошные кривые), со случаем $\kappa_1 = \kappa$ (штрихпунктирные кривые). На этом рисунке кривая 4 соответствует расчету при $a=0$, кривая 5 — $a=0,01$ при $n=2$, $b=7,2$, $C=3,0$. Видно, что отличие сплошной и штрихпунктирной кривых увеличивается с ростом параметра неравномерности потока и увеличением координаты x . При $x=0,5$ различие этих кривых для давлений достигает 4–6%.

3. В неравномерном случае уравнение (2.9) представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени относительно неизвестной κ_1 . Легко заметить, что условие $\kappa_1 = \kappa$ выполняется для параметров λ_1 и n , связанных формулой $\lambda_1 + \gamma \kappa^2 (n^{-1/6}) = \kappa^2$. Так как величина в квадратных скобках в (2.9) является положительной, то для каждого значения n существует максимально допустимое значение $\lambda_* = \lambda_*(n)$. Чтобы показать это, запишем (2.9) в виде

$$\lambda_1 = \left[\kappa + \frac{2\gamma \kappa^2 (n^{-1/6}) - \xi^2}{3(\kappa + \sqrt{B}(1-a)\xi/\delta_0)\gamma} \right]^2 - \frac{\xi^2}{2}, \quad \xi = \sqrt{2(\kappa_1^2 - \lambda_1)} \quad (3.1)$$

Величина ξ связана с отходом контактной поверхности на оси симметрии простой формулой $y_{c0} = \delta_0 (\xi (1-a) \sqrt{B})^{-1}$.

Анализ формулы (3.1) накладывает следующее ограничение на параметры λ_1 , n и δ_0 :

$$\lambda_1 < \kappa^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{6} \right) \right]^2, \quad n \geq -\frac{3}{2}, \quad \delta_0^2 \ll \kappa^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{6} \right) \right]^2 - \lambda_1 \quad (3.2)$$

Условия (3.2) задают границы применимости рассматриваемой модели. Отметим, что использование решения [5] в первом приближении без уточнения кривизны контактной поверхности привело бы к условиям: $\lambda_1 < \kappa^2$, $\delta_0^2 \ll \kappa^2 - \lambda_1$. На основе полученного решения можно выяснить вопрос о возникновении отрывной зоны в слое вдува.

Параметры задачи, при которых заведомо нет отрыва, определяются из условия

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_{y=y_c} = 0$$

Подставляя в это условие выражение (2.5), получим

$$\Pi_2 = (\lambda_1 - \kappa_1^2) B (1-a)^2 = 0$$

Для параметров λ_1 , n , δ_0 , определяемых с учетом (3.2), величина Π_2 всегда отрицательна. В соответствии с этим можно сделать вывод, что в невязком вдуваемом слое около контактной поверхности при реальных значениях параметров не может быть возвратно-циркуляционной зоны.

На основе полученного решения можно рассчитать ряд аэродинамических коэффициентов, определяющих действующие силы, унос массы и энергии вдуваемого газа.

Интегрирование будем проводить до угла, соответствующего ньютоновскому отрыву. При этом для давления используется формула $p_w(\theta) = \Pi_0 + \Pi_2 \sin^2 \theta$. Анализ полученных выражений показывает, что суммарные характеристики

$$\varphi_1 = \frac{C_p}{B(1-a)^2}, \quad \varphi_2 = \frac{C_R}{\delta_0^2}, \quad \varphi_3 = \frac{\Delta M}{G_0 \sqrt{\rho_{w0}/\rho_\infty}}, \quad \varphi_4 = \frac{E}{G_0 h_w}$$

$$G_0 = \frac{\rho_{w0} U_{w0}}{\rho_\infty V_\infty}, \quad h_w \gg \frac{1}{2} v_w^2$$

являются универсальными функциями от n и $\xi = (1 + (\lambda_1 - \kappa_1^2)^{-1})^{1/2}$. Здесь C_p , C_R , ΔM и E — коэффициенты давления, реактивной силы, расход массы и энергии. На фиг. 5 изображены зависимости φ_1 (сплошная кривая 1),

φ_2 (кривые с номером 1, сплошная соответствует $n=0$, штрихпунктирная — $n=2$; штриховая — $n=4$), φ_3 и φ_4 — аналогичные кривые с номером 2. Из фиг. 5 видно, что с уменьшением неравномерности потока ($\xi \rightarrow 1$) и с увеличением n эти функции уменьшаются. Интересно отметить, что коэффициент реактивной силы C_R больше при равномерном вдуве ($n=0$), но при этом и расход массы ΔM больше (см. кривые 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin T. C., Reeves B. L., Siegelman D. Blunt-body problem in non-uniform flow fields // AIAA Journal. 1977. V. 15. № 8. P. 1130–1137.
2. Головичев Ю. П., Леонтьева Н. В. Численное исследование обтекания затупленного тела, расположенного в области сверхзвукового следа: Препринт № 918. Л.: ФТИ АН СССР им. А. Ф. Иоффе, 1984. 34 с.
3. Еремейцев И. Г., Пилогин Н. Н., Хлебников В. С., Юницкий С. А. Исследование аэродинамических характеристик и теплообмена тел в неравномерных сверхзвуковых потоках газа. М., Изд-во МГУ, 1988. 105 с.
4. Баулин Н. Н., Кувалкин Д. Г., Пилогин Н. Н. и др. Исследование яркости излучения газов около горячей модели при движении со сверхзвуковой скоростью // Космич. исслед. 1987. Т. 25. Вып. 1. С. 133–140.
5. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1015–1024.
6. Стулов В. П. Сильный вдув на поверхности затупленного тела в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 89–97.
7. Гилинский М. М., Лебедев М. Г. К расчету сильного вдува на затупленном теле и профиле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 117–124.
8. Вигдорovich И. И., Левин В. А. Сверхзвуковое обтекание тел с интенсивным вдувом. М.: Изд-во МГУ, 1983. 34 с.
9. Осипцов А. Н. Вдув с торца цилиндра навстречу гиперзвуковому потоку газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 192–194.
10. Пилогин Н. Н., Чернова Т. А. Радиационный теплообмен метеорного тела в приближении лучистой теплопроводности // Космич. исслед. 1986. Т. 24. Вып. 1. С. 58–68.
11. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI 1988