

УДК 532.594

© 1989

ТРИФОНОВ Ю. Я., ЦВЕЛОДУБ О. Ю.

**О МНОЖЕСТВЕ СТАЦИОНАРНО БЕГУЩИХ ВОЛН НА ПЛЕНКЕ
ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ**

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение, часто встречающееся при моделировании поведения возмущений в различных неконсервативных средах, например в задачах по гидродинамике течения пленок жидкости. Для него численно найдены стационарно бегущие периодические решения. Исследована устойчивость этих решений и проведен бифуркационный анализ. В результате продемонстрировано, как с уменьшением волнового числа возникают все новые и новые семейства стационарно бегущих решений. В пределе при стремлении волнового числа к нулю образуется счетное множество таких решений. Указано, что от стационарных в результате бифуркации типа Ландау – Хопфа могут рождаться решения, осциллирующие и по времени.

При малых расходах жидкости изучение длинноволновых возмущений на пленке жидкости, свободно стекающей по наклонной плоскости, сводится к решению нелинейного эволюционного уравнения, описывающего изменение толщины пленки. В системе отсчета, движущейся с удвоенной скоростью свободной поверхности, это уравнение после некоторых преобразований приводится к виду [1]

$$H_t + 4HH_x + H_{xx} + H_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

В последнее время уравнение (1) привлекает к себе пристальное внимание многих исследователей (см., например, [2–7]), так как оно часто встречается при описании волновых процессов в неконсервативных средах и играет для них такую же большую роль, как широко известное уравнение КДВ – для консервативных.

Так, например, кроме случая свободно стекающей пленки это уравнение было получено для описания волн при противоточном движении пленки и газа в [3], а для возмущений на границе раздела двух вязких жидкостей в горизонтальном канале – в [4].

Ниже будут рассмотрены некоторые стационарно бегущие решения $H(\xi)$, $\xi = x - ct$, для которых уравнение (1) запишется в виде

$$-cH_\xi + 4HH_\xi + H_{\xi\xi} + H_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \tag{2}$$

Так как уравнение (2) инвариантно относительно преобразований $H \rightarrow -H$, $\xi \rightarrow -\xi$, $c \rightarrow -c$; $H \rightarrow H + \text{const}$, $c \rightarrow c + 4 \text{const}$, то при нахождении периодических решений можно ограничиться рассмотрением только тех из них, для которых

$$c \geq 0, \quad \int_0^\lambda H d\xi = 0 \tag{3}$$

Здесь $\lambda = 2\pi/\alpha$ – длина волны.

Итак, приходим к краевой задаче, в которой собственным значением является фазовая скорость волны c , а параметром – волновое число α .

Уравнение (2) имеет семейство периодических решений, у которых

при выполнении нормировки (3) значения фазовой скорости $c=0$ [1, 5, 6]. При значении волнового числа $\alpha=1$ это семейство ответвляется от тривиального решения в область меньших волновых чисел.

Периодические решения уравнения (2) конечной амплитуды находятся численно. Для этого они представляются в виде ряда Фурье

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp[i\alpha n \xi] \quad (4)$$

Оставляя в (4) конечное число гармоник после подстановки его в (2), приходим к конечномерной системе нелинейных алгебраических уравнений на c и H_n . Эта система решалась обобщенным методом Ньютона. Метод решения подробно описан в [6].

Основная трудность при решении (2) этим методом заключается в необходимости задания начального приближения, достаточно близкого к решению. Поэтому обычно продвижение по параметру α осуществляется по непрерывности, т. е. шаг по волновому числу выбирается таким, чтобы при использовании в качестве начального приближения найденного ранее решения попадать в область сходимости.

Решение, ответвляющееся от тривиального при $\alpha=1$, продолжается по непрерывности в сторону меньших волновых чисел до $\alpha_*=0,4979$ [7]. В этой точке каждая нечетная гармоника ряда (4) зануляется. В результате получается решение с $\alpha=2\alpha_*=0,9958$. Причем оказывается, что это то же самое решение, которое было получено для этого α ранее. Таким образом это семейство замыкается само на себя. Подчеркнем еще раз, что у него для всех значений α из области существования решения значения фазовой скорости $c=0$. В силу преобразования $H \rightarrow -H$, $\xi \rightarrow -\xi$, $c \rightarrow -c$ такие решения антисимметричны. В [5, 6] найдены другие антисимметричные решения уравнения (2), возникающие в результате ветвления от исходного первого семейства.

В данной работе будут построены периодические решения, удовлетворяющие нормировке (3) и имеющие фазовую скорость $c>0$.

Новые семейства удастся построить, используя результаты анализа устойчивости уже найденных ранее решений. Подробно эта процедура изложена в [6], поэтому опишем ее здесь кратко.

Пусть $H_0(\xi)$ – периодическое решение уравнения (2) с волновым числом α . Для исследования устойчивости этого решения относительно бесконечно малых возмущений подставим в (1) $H=H_0(\xi)+h(\xi, t)$ и линеаризуем его по возмущению $h(\xi, t)$. Тогда получаем линейное уравнение для h с периодическими по ξ коэффициентами того же периода, что и $H_0(\xi)$. Так как переменная t не входит в него явно, то в согласии с теоремой Флоке о решениях линейных уравнений с периодическими коэффициентами решение этого уравнения, ограниченное при всех ξ , имеет вид

$$h(\xi, t) = \exp[-\gamma t + i\alpha Q \xi] \varphi(\xi) + \text{к. с.} \quad (5)$$

где $\varphi(\xi)$ – периодическая функция того же периода, что и $H_0(\xi)$, а Q – вещественный параметр.

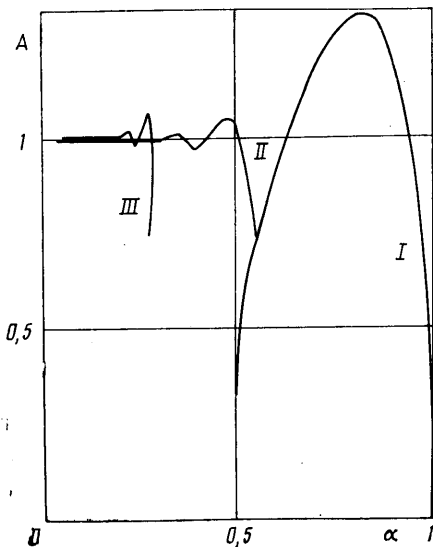
После несложных преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned} A\varphi + B\varphi' + (1 - 6\alpha^2 Q^2)\varphi'' + 4i\alpha Q\varphi''' + \varphi^{IV} &= \gamma\varphi \\ A &= 4H_0' + 4i\alpha QH_0 - \alpha^2 Q^2 + \alpha^4 Q^4 - i\alpha Qc \\ B &= 4H_0 + 2i\alpha Q - 4i\alpha^3 Q^3 - c \end{aligned} \quad (6)$$

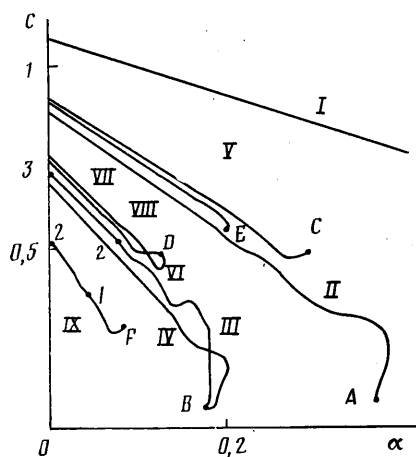
Здесь штрих означает дифференцирование по ξ .

Таким образом исследование устойчивости периодических стационарных решений уравнения (1) сводится к изучению при различных значениях Q спектра собственных значений γ , для которых уравнение (6) имеет периодические решения того же периода, что и $H_0(\xi)$. Решение устойчиво, если для любого Q у всех γ $\text{Re}(\gamma) > 0$.

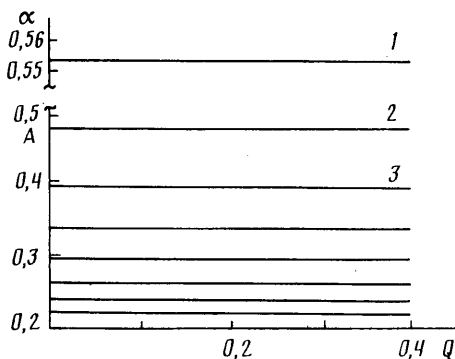
Из (5) ясно, что достаточно ограничиться рассмотрением Q на любом единичном интервале, например на $[-0,5; 0,5]$.



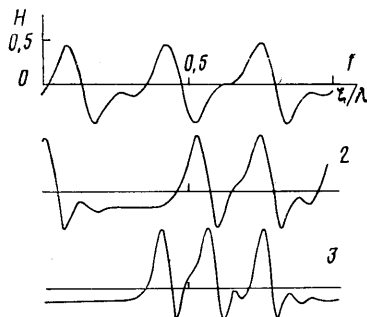
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

Проведя над (6) операцию комплексного сопряжения, нетрудно убедиться, что $\gamma(-Q) = \bar{\gamma}(Q)$, поэтому достаточно рассмотреть решения (6) для $0 \leq Q \leq 0,5$.

Краевая задача (6) решалась численно. Выполняя для этого над (6) фурье-преобразование, получаем бесконечную систему линейных алгебраических однородных уравнений на φ_n . Зануляя все φ_n с $n \geq N$, приходим к ее конечному приближению

$$[-i\alpha c(Q+n) - \alpha^2(Q+n)^2 + \alpha^4(Q+n)^4] \varphi_n + 4i\alpha(Q+n) \sum H_m \varphi_{n-m} = \gamma \varphi_n$$

Из (5) следует, что если в некоторой точке (α, Q) вещественная часть какого-нибудь собственного значения обращается в ноль, то от исходного может ответвиться новый волновой режим. Если $\text{Im}(\gamma) \neq 0$, то возможно рождение нестационарных режимов. Новые стационарные решения возникают от решения $H_0(\xi)$, если $\gamma(\alpha, Q) = 0$. При этом если Q — иррациональное число, то возможно рождение двоякопериодического режима. Если $Q = p/r$ — рациональное, то образуется периодический по ξ режим с новым волновым числом $\alpha_n = \alpha/r$.

При нахождении этих новых решений уравнения (2) для волновых чисел из окрестности α_n в качестве начального приближения используется выражение (5). Функция h в нем берется пропорциональной собственной функции φ , удовлетворяющей уравнению (6) при значении волнового числа α , $Q = p/r$ и собственном значении $\gamma = 0$. Расчеты показывают,

что движение по непрерывности в окрестности этих точек удобнее осуществлять, используя в качестве изменяющегося параметра значение какой-нибудь из гармоник. В дальнейшем, переходя к параметру α , находим решение и для значений α , далеких от точки возникновения этого семейства, α_n .

Впервые семейство с $c > 0$ было получено в [8], оно ответвляется от первого антисимметричного семейства в точке $\alpha_{**} = 0,554$ [6, 9–11].

На фиг. 1 кривой I представлены в зависимости от волнового числа значения амплитуд $A = H_{\max} - H_{\min}$ для волн первого антисимметричного семейства, кривой II – значения амплитуды нового семейства, бифурцирующего от первого в точке α_{**} . У решений этого семейства для достаточно малых α на длине волны можно выделить участок быстрого изменения профиля волны H и участок, на котором эта функция почти постоянна. Для значений $\alpha \leq 0,3$ при дальнейшем уменьшении волнового числа форма волны на участке быстрого изменения практически не меняется, а происходит только увеличение длины участка медленного изменения функции H . В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ семейство переходит в положительный солитон, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} H d\xi > 0$$

В отличие от солитонных решений уравнения КДВ он представляет собой горб-возвышение, монотонно спадающий экспоненциально на заднем фронте и имеющий характерные затухающие осцилляции на переднем фронте [8]. Его фазовая скорость $c = 1,2161$.

Исследование устойчивости этого семейства показало, что оно неустойчиво при любых значениях волнового числа α . Для него имеется много линий $\gamma(\alpha, Q) = 0$, сгущающихся с уменьшением α . На плоскости (α, Q) они идут почти параллельно оси Q . Первые восемь из них показаны на фиг. 2. Часть из них относится к одним и тем же собственным значениям γ и порождена их колебаниями около нуля, часть связана с разовым прохождением γ через ноль.

Рассчитаны новые семейства, рождающиеся от исходного в нескольких точках кривых $\gamma(\alpha, Q) = 0$, представленных на фиг. 2: режимы, ответвляющиеся от кривых 1 и 2 при $Q = 1/2$ и $1/3$ и от кривой 3 с $Q = 1/2$. Значения величин скоростей этих семейств в зависимости от волнового числа представлены на фиг. 3 соответственно линиями: для семейства, возникающего от кривой 1 с $Q = 1/2$, – линией II, с $Q = 1/3$ – линиями III, IV, от кривой 2 с $Q = 1/2$ – V, с $Q = 1/3$ – VI, VII, от кривой 3 с $Q = 1/2$ – VIII. Точки зарождения семейств обозначены буквами. Для сравнения линией I представлено первое семейство с $c > 0$.

Зависимость амплитуды волн от α для семейства, ответвляющегося от кривой 1 на фиг. 2 при $Q = 1/2$, представлена на фиг. 1 кривой III. Амплитуды других семейств с уменьшением α также быстро приближаются к кривой II, представляющей основное порождающее семейство, и поэтому здесь не показаны.

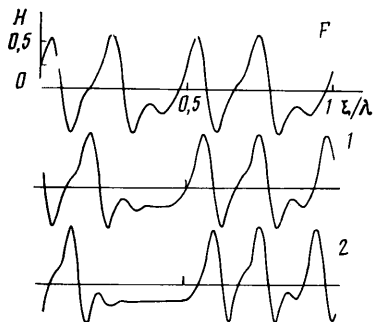
Как видно из представленных результатов, эти семейства продолжают в область малых α .

Если у исходного семейства участок быстрого изменения состоит из одного «горба», то, как показывают расчеты, при ветвлении от какой-нибудь из линий $\gamma(\alpha, Q) = 0$ с $Q = 1/r$ у соответствующих новых семейств при достаточно малых α формируется r таких горбов. Причем эти горбы практически воспроизводят солитон из [8]. Таким образом, при малых α эти новые решения отличаются друг от друга расстояниями между горбами и их числом.

Сказанное иллюстрирует фиг. 4, где показана эволюция профилей семейства, представленного на фиг. 3 линией III. Здесь и ниже номера

представленных профилей однозначно связаны с пронумерованными точками на соответствующих кривых фиг. 3.

Весьма вероятно, что новые семейства в пределе $\alpha \rightarrow 0$ перейдут в соответствующие r -горбы солитоны. Это допущение согласуется с результатами работы [12], где совершенно другим методом были рассчитаны подобные многогорбые солитоны.



Фиг. 5

Ясно, что новые наборы кривых $\gamma(\alpha, Q) = 0$ можно получить, исследуя на устойчивость новые семейства решений с $c > 0$. От этих решений по новым кривым $\gamma(\alpha, Q) = 0$ в свою очередь рождаются другие новые режимы, так же имеющие отличные от нуля скорости. И если ветвление происходит при Q рациональном, то возникающие при таком вторичном ветвлении новые периодические семейства решений в пределе $\alpha \rightarrow 0$ также могут давать солитоны, причем более сложной

формы.

Так, на фиг. 3 кривая IX представляет зависимость величины фазовой скорости от α для семейства, ответвившегося в результате такой «вторичной» бифуркации с $Q = 1/2$ от семейства, представленного на той же фигуре кривой II. На фиг. 1 его амплитуда дана кривой III. Эволюция профилей волн этого семейства показана на фиг. 5. Как можно видеть, в пределе по α оно, по-видимому, имеет уже 4-горбый солитон. Волновое число точки возникновения нового семейства $\alpha_F = 0,1373$.

Кроме того, источниками решений со значениями фазовой скорости $c \neq 0$ наряду с первым семейством (существующим в интервале $0,4979 \leq \alpha \leq 1$) являются и другие, если не все, то по крайней мере некоторые антисимметричные семейства. Для них также существуют точки, аналогичные α_{**} , в которых от данного решения бифурцируют новые с $c \neq 0$.

Из приведенных результатов следует, что уравнение (1) имеет множество семейств стационарно бегущих решений. Их число конечно для любого фиксированного волнового числа и лавинообразно увеличивается при уменьшении α , давая в пределе $\alpha \rightarrow 0$ счетное множество периодических и солитонных решений.

Представляется, в частности, вероятным, что соответствующие бифуркации от периодических решений с $c \neq 0$ при Q иррациональных, также могут давать режимы, имеющие в качестве структурного элемента такие же характерные горбы, расстояние между которыми меняется нерегулярным образом.

В силу неустойчивости рассмотренных режимов произвольное периодическое решение уравнения (1) в процессе временной эволюции, как правило, должно стохастизоваться. При приближенном моделировании этих режимов будем наблюдать сложное поведение тем более близкое к такому решению, чем большее число длин λ начального возмущения возьмем в качестве основной длины волны $g\lambda$. На языке фурье-рядов это означает, что в (4) между начальными ненулевыми гармониками будет взято по g нулевых гармоник.

Из представленных результатов также следует, что в стохастических режимах должны выделяться характерные «солитонообразные» структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 28–34.
2. Chang H.-C. Travelling waves on fluid interfaces: Normal form analysis of the Kuramoto – Sivashinsky equation // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 10. P. 3142–3147.

3. *Chang H.-C.* Nonlinear waves on liquid film surfaces. Flooding in a vertical tube // Chem. Engng. Sci. 1986. V. 41. № 10. P. 2463–2476.
4. *Hooper A. P., Crimshaw R.* Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 1. P. 37–45.
5. *Демехин Е. А.* Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 36–44.
6. *Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.* О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде: Препринт № 188. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1988.
7. *Непомнящий А. А.* Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977. С. 181–190.
8. *Цвелодуб О. Ю.* Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 142–146.
9. *Непомнящий А. А.* О нестационарных волновых движениях в пленке жидкости, стекающей по наклонной плоскости // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. Свердловск, 1986. С. 25–31.
10. *Michelson O.* Steady solutions of the Kuramoto – Sivashinsky equation // Physics D. 1986. V. 19. № 1. P. 89–111.
11. *Chang H.-C., Chen L.-H.* Nonlinear waves on liquid film surfaces. 2. Bifurcation analyses of the long-wave equation // Chem. Engng. Sci. 1986. V. 41. № 10. P. 2477–2486.
12. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1985. С. 32–48.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.VIII.1988