МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1989

УДК 532.59.013

КОРОБКИН А. А.

ПЛОСКОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Рассматривается неустановившееся движение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, развивающееся из состояния покоя. Течение жидкости считается безвихревым, непрерывным, плоским, оно может быть вызвано как начальным возмущением свободной границы, так и заданным на ней распределением давления. Твердые границы области течения неподвижны, свободная поверхность жидкости не пересекает их во все время движения. Жидкость находится в однородном поле сил тяжести, поверхностное натяжение отсутствует.

Предлагается метод, который в случае локализованной неровности дна позволяет найти форму свободной поверхности в любой момент времени с наперед заданной точностью. Метод основан на сведении исходной линейной задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, причем ядро этого уравнения – нелокальный оператор. Этот оператор является сглаживающим, что позволяет свести решение исходной задачи к решению бесконечной вполне регулярной системы интегральных уравнений Вольтерра относительно счетного набора вспомогательных функций.

1. Постановка задачи. Течение жидкости полностью характеризуется потенциалом скоростей $\varphi(x, y, t)$, где $t\geqslant 0$ – время. Правая декартова система координат x, y выбрана так, что ось y направлена в сторону, противоположную направлению ускорения свободного падения $\mathbf{g}$, а ось x – по невозмущенному уровню свободной границы. Граница области течения $\Omega(t)$ состоит из двух частей: твердой границы Γ_1 и свободной поверхности $\Gamma_0(t)$, положение которой при $t\geqslant 0$ описывается уравнением $y=\eta(x, t)$.

Требуется определить функции $\varphi(x, y, t)$, $\eta(x, t)$, удовлетворяющие в обычном смысле соотношениям

$$\Omega(t):\ \Delta\varphi=0$$
$$\Gamma_0(t):\ \varphi_t+0{,}5|\nabla\varphi|^2+g\eta+\rho^{-1}p(x, t)=0$$
$$\eta_t+\eta_x\varphi_x=\varphi_y$$
$$\Gamma_1:\ \partial\varphi/\partial n=0$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $p(x, t)$ – заданное распределение давления, $g=|\mathbf{g}|$, $\nabla\varphi=(\varphi_x, \varphi_y)$, $\Delta=\nabla\cdot\nabla$, $\partial\varphi/\partial n=\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi$; $\mathbf{n}$ – нормаль к Γ_1. Для однозначного определения решения задачи к ней следует присоединить начальные условия, которые задают начальное положение свободной границы и ее начальную скорость, и условие на бесконечности

$$\eta=\eta_0(x),\quad \eta_t=\eta_1(x)\quad (t=0)$$
$$|\nabla\varphi|\to 0;\quad x^2+y^2\to\infty$$

В такой общей постановке задача до сих пор не исследована. В нестационарном случае основные результаты получены для линейной модели. Если дно ровное, то решение выписывается в квадратурах и подробно исследовано. Однако для неровного дна даже в линейной постановке задача остается достаточно сложной, так как необходимо решать уравнение Лапласа в области с криволинейными границами. Задача о волнах над плавно меняющимся дном рассмотрена в [1, 2]. Если области течения можно представить в виде объединения (пересечения) канонических областей, в каждой из которых решение уравнения Лапласа выписывается в явном виде, то применяется метод сопряжения [3] (можно использовать альтернирующий метод Шварца [4]).

Ниже предлагается метод, который в случае локализованной неровности дна позволяет найти форму свободной поверхности в любой момент времени с наперед заданной точностью. Этот метод основан на сведении исходной линейной задачи к одному эволюционному нелокальному уравнению относительно $\eta(x, t)$, как это было предложено еще Адамаром, и на переходе к абстрактному интегральному уравнению Вольтерра и далее к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно счетной системы вспомогательных функций. К этой системе применим метод редукции, так как она вполне регулярна [4].

2. Эволюционное нелокальное уравнение. Выберем за масштаб длины характерный горизонтальный размер L внешних возмущений (например, размер носителя $\eta_0(x)$ при $\eta_1\equiv0$, $p\equiv0$, $\eta_0(x)$ — финитная положительная функция), за масштаб скорости — $V=\sqrt{gh_0}$, h_0 — наименьшее расстояние между границами Γ_1, $\Gamma_0(t)$ при $t=0$, и перейдем к безразмерным переменным. Тогда число Фруда задачи Fr равно h_0/L. За характеристику интенсивности внешних возмущений удобно принять величину

$$\varepsilon_*=\max_{j=0,1,2}(\varepsilon_j)$$

$$\varepsilon_0=L^{-1}\max_{x\in R^1}|\eta_0|,\qquad \varepsilon_1=V^{-1}\max_{x\in R^1}|\eta_1|,\qquad \varepsilon_2=\rho^{-1}V^{-2}\max_{\substack{x\in R^1\\ t\geqslant 0}}|p|$$

В случае, когда ε_* достаточно мало по сравнению с единицей, условия на свободной границе могут быть линеаризованы и снесены на первоначально невозмущенный уровень ($y=0$). Справедливость такой процедуры в классах функций с конечной гладкостью была показана Налимовым [5]. В линейной постановке задача известным способом сводится к одному эволюционному нелокальному уравнению на границе $y=0$.

Для этого введем функции $\varphi_0(x, t)=\varphi(x, 0, t)$, $v(x, t)=\varphi_y(x, 0, t)$ и рассмотрим оператор N, действующий по правилу N: $\varphi_0\to v$, причем

$$\Delta\varphi=0\ (\Omega),\quad \varphi=\varphi_0\ (y=0),\quad \partial\varphi/\partial n=0\ (\Gamma_1) \tag{2.1}$$

Для определения $\varphi_0(x, t)$ имеем задачу Коши

$$\begin{gathered}
\varphi_{0tt}+\mathrm{Fr}^{-1}N\langle\varphi_0\rangle=f(x, t)\quad (x\in R^1,\ t>0)\\
\varphi_0=u_0(x),\quad \varphi_{0t}=u_1(x)\quad (x\in R^1,\ t=0)\\
f(x, t)=-\varepsilon_2{}^*p_t(x, t),\quad u_0(x)=\varepsilon_1{}^*N^{-1}\langle\eta_1\rangle\\
u_1(x)=-\varepsilon_2{}^*p(x, 0)-\mathrm{Fr}^{-1}\varepsilon_0{}^*\eta_0(x),\quad \varepsilon_j{}^*=\varepsilon_j/\varepsilon_*\quad (j=0, 1, 2)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Формулировка линейной задачи о волнах над неровным дном в виде соответствующей задачи Коши позволяет исследовать свойства решения в зависимости от геометрии области. Вопросы разрешимости задачи Коши и свойства решения в зависимости от данных задачи подробно исследованы Гариповым [6]. Однако для практического использования задача остается достаточно сложной, так как необходимо знать оператор «нормальная производная» N и уметь решать нелокальную эволюционную задачу. Упрощений удается достигнуть в случае, когда известно конформное отображение Ω на некоторую каноническую область. При этом оператор N имеет достаточно простую структуру, что позволяет наглядно интерпретировать решение.

3. Конформное отображение. Пусть известно конформное отображение $z=z(\zeta)$ ($z=x+iy$, $\zeta=\lambda+i\mu$) единичной полосы $-1<\mu<0$, $\lambda\in R^1$, на область Ω, причем при $\lambda\to\pm\infty$ функция $x(\lambda,\mu)\to\pm\infty$ и $z(\zeta_0)=z_0$, где значения ζ_0, z_0 фиксированы.

Введем следующие обозначения: $\Phi(\lambda,\mu,t)=\varphi(x(\lambda,\mu),\ y(\lambda,\mu),\ t)$, $\Psi(\lambda,t)=\eta(x_f(\lambda),t)$, $x_f(\lambda)=x(\lambda,0)$, и заметим, что функция $\Phi(\lambda,\mu,t)$ — гармоническая в полосе $-1<\mu<0$ и, кроме того, $\Phi_\mu=0$ при $\mu=-1$.

На прообразе свободной границы ($\mu=0$) $\Phi_\mu=x_f'(\lambda)\varphi_y(x_f(\lambda),0,t)$, поэтому $\Phi(\lambda,\mu,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta\Phi=0\quad(-1<\mu<0)$$

$$x_f'(\lambda)\,\Phi_{tt}+\mathrm{Fr}^{-1}\Phi_\mu=x_f'(\lambda)f[x_f(\lambda),t]\quad(\mu=0)$$

$$\Phi_\mu=0\quad(\mu=-1)$$

и соответствующим начальным условиям. Для этой задачи оператор N имеет простой вид

$$N\langle\Phi(\lambda,0,t)\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\sigma,0,t)}{\operatorname{sh}\pi/2(\lambda-\sigma)}d\sigma$$

После дифференцирования условия при $\mu=0$ по t и использования связи $\Phi_t=-\mathrm{Fr}^{-1}\Psi-\varepsilon_2{}^*p(x_f(\lambda),t)$ приходим к уравнению для $\Psi(\lambda,t)$

$$a(\lambda)\,\Psi_{tt}+(2\mathrm{Fr})^{-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(\sigma,t)}{\operatorname{sh}(\pi/2)\,(\lambda-\sigma)}d\sigma=F(\lambda,t)\quad(t>0)\tag{3.1}$$

К нему следует присоединить начальные условия

$$\Psi=\Psi_0(\lambda),\quad\Psi_t=\Psi_1(\lambda)\quad(t=0)\tag{3.2}$$

$$\Psi_j(\lambda)=\eta_j(x_f(\lambda))\quad(j=0,1),\quad a(\lambda)=x_t'(\lambda)$$

$$F(\lambda,t)=-\varepsilon_2{}^*\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p[x_f(\sigma),t]}{\operatorname{sh}(\pi/2)\,(\lambda-\sigma)}d\sigma$$

В задаче (3.1), (3.2) функции $a(\lambda)$, $F(\lambda,t)$, $\Psi_0(\lambda)$, $\Psi_1(\lambda)$ следует считать известными. Если функция $\Psi(\lambda,t)$ определена, то деформация свободной границы находится пересчетом $\eta(x,t)=\Psi(\lambda_f(x),t)$, где функция $\lambda_f(x)$ такая, что $x_f[\lambda_f(x)]\equiv x(x_f'(\lambda)>0)$.

Обозначим $\varphi_{0t}(x,t)$ через $\varphi_1(x,t)$, тогда $\eta=-\mathrm{Fr}(\varphi_1+\varepsilon_2{}^*p)$, где φ_1 есть решение задачи

$$\varphi_{1tt}+(2\mathrm{Fr})^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_1(\sigma,t)\,\lambda_f'(\sigma)\,d\sigma}{\operatorname{sh}(\pi/2)\,(\lambda_f(x)-\lambda_f(\sigma))}=-\varepsilon_2{}^*p_{tt}\quad(t>0)\tag{3.3}$$

$$\varphi_1=-\mathrm{Fr}^{-1}\varepsilon_0{}^*\eta_0(x)-\varepsilon_2{}^*p(x,0)$$

$$\varphi_{1t}=-\mathrm{Fr}^{-1}\varepsilon_1{}^*\eta_1(x)-\varepsilon_2{}^*p_t(x,0)\quad(t=0)$$

Ниже рассматривается случай локализованной неровности дна, когда $x^{-1}\lambda_f(x)\to c_\pm$ при $x\to\pm\infty$.

4. Локализованная неровность дна. Пусть

$$\Omega=\{x,y\,|\,-H+h(x)<y<0,\ x\in R^1\}$$

где h — непрерывно дифференцируемая функция, $h(x)\equiv0$ при $x\in R^1\backslash I$, $h(x)<H$ при $x\in R^1$. Тогда монотонная функция $\lambda_f(x)$ может быть представлена в виде $\lambda_f(x)=x/H+\lambda_0(x)$, где $\lambda_0(x)\to0$ при $x\to-\infty$, а ядро уравнения (3.3) разложено на сингулярную и регулярную составляющие

$$\frac{\lambda_f'(\sigma)}{2\operatorname{sh}(\pi/2)\,(\lambda_f(x)-\lambda_f(\sigma))}=\frac{1}{2H\operatorname{sh}[(\pi/2)\,(x-\sigma)/H]}+K(\sigma,x)\tag{4.1}$$

Выделяя с учетом разложения (4.1) главную часть уравнения (3.3) и обращая ее, приходим к абстрактному интегральному уравнению Вольтерра

$$\varphi_1(x,t)=\varphi_1{}^{\circ}(x,t)+\alpha\int_0^t \Lambda(t-\tau)\varphi_1(\tau)\,d\tau \tag{4.2}$$

в котором $\varphi_1{}^{\circ}(x, t)$ — решение задачи (3.3) при $h(x)\equiv 0$, а нелокальный оператор Λ действует по правилу

$$\Lambda(t-\tau)\varphi_1(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x,\sigma,t-\tau)\varphi_1(\sigma,\tau)\,d\sigma$$

$$\Pi(x,\sigma,t)=\int_{-\infty}^{\infty} i\xi K^F(\sigma,\xi)\frac{\sin\omega(\xi)t}{\omega(\xi)}e^{ix\xi}\,d\xi$$

$$\omega^2(\xi)=\mathrm{Fr}^{-1}\xi\,\mathrm{th}(\xi H),\qquad \alpha=(2\pi\,\mathrm{Fr})^{-1}$$

Ясно, что $K(\sigma, x)$ — гладкая функция. Исследуем поведение $K(\sigma, x)$ при $|x|\to\infty$. Для этого предположим, что известен прообраз $h(x)$ при отображении $z=z(\zeta)$, т. е. известна функция $G(\lambda)$ такая, что $y_b(\lambda)=\mathrm{Im}\,z(\lambda-i)=-H+G(\lambda)$. Тогда

$$x_f'(\lambda)=H-\frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\sigma)\,d\sigma}{\mathrm{ch}^2(\pi/2)(\lambda-\sigma)} \tag{4.3}$$

$$x_f(\lambda)=H\lambda-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\sigma)\,d\sigma}{1+e^{-\pi(\lambda-\sigma)}}$$

Из первой и второй формул следует

$$\lambda_f'[x_f(\lambda)]\approx\frac{1}{H}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{\pm}\exp\left[-2n\frac{\pi}{2}|\lambda|\right]\qquad(|\lambda|\to\infty)$$

$$x_f(\lambda)\approx H\lambda+\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{\pm}\exp\left[-(2n+1)\frac{\pi}{2}|\lambda|\right]-\chi(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}G(\sigma)\,d\sigma\qquad(|\lambda|\to\infty)$$

Здесь $\chi(\lambda)=1$ при $\lambda>0$ и $\chi(\lambda)=0$ при $\lambda<0$; $B_n^{\pm}$, $A_n^{\pm}$ — вещественные постоянные. Откуда

$$K(\sigma,x)\approx\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{\pm}(\sigma)\exp\left[-(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{|x|}{H}\right]\qquad(|x|\to\infty) \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) могут быть использованы для построения отображения $z=z(\zeta)$ обратным методом, когда задается не область течения Ω, а функция $G(\lambda)$. При этом неравенство $G(\lambda)<H$ обеспечивает монотонность отображения $x=x_f(\lambda)$.

Уравнение (4.2) может быть сведено к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Действительно, свойства функции $K(\sigma, x)$ позволяют представить ее в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$K(\sigma,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}k_n(\sigma)T_n(\beta)\sqrt{1-\beta^2},\qquad \beta=\mathrm{th}\frac{\pi x}{2H} \tag{4.5}$$

$$T_n(\beta)=\cos[n \arccos \beta]$$

$$k_n(\sigma)=\frac{\pi n!}{2HJ_n}\int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma,x)\,T_n\left(\operatorname{th}\frac{\pi x}{2H}\right)dx$$

$$J_0=\pi, \quad J_n=\pi/2 \quad (n\geqslant 1)$$

Ясно, что $k_n(\sigma)$ — бесконечно дифференцируемые функции, $k_n(\sigma)=O[\exp(-\pi|\sigma|/(2H))]$. Соотношение (4.4) позволяет утверждать, что $k_n(\sigma)$ убывают при $n\to\infty$ быстрее любой степени n^{-1}; с такой же скоростью частные суммы ряда (4.5) сходятся к $K(\sigma, x)$ при увеличении числа членов. Обозначим через $a_n(t)$ интегралы

$$a_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k_n(\sigma)\,\varphi_1(\sigma,t)\,d\sigma$$

Тогда (4.2) перепишется в виде

$$\varphi_1(x,t)=\varphi_1{}^\circ(x,t)+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t V_n(x,\tau)\,a_n(t-\tau)\,d\tau \tag{4.6}$$

$$V_n(x,t)=\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} i\xi\left(\int_{-\infty}^{\infty} T_n\left(\operatorname{th}\frac{\pi\sigma}{2H}\right)\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi\sigma}{2H}\,e^{-i\sigma\xi}\,d\sigma\right)\frac{\sin\omega(\xi)\,t}{\omega(\xi)}\,e^{i\xi x}\,d\xi$$

Функции $a_n(t)$ определяются из счетной системы уравнений Вольтерра

$$a_m(t)=a_m{}^\circ(t)+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t a_n(\tau)\,K_{nm}(t-\tau)\,d\tau \quad (m=0,1,\ldots) \tag{4.7}$$

$$K_{nm}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k_m(x)\,V_n(x,t)\,dx$$

$$a_m{}^\circ(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1{}^\circ(x,t)\,k_m(x)\,dx$$

После того как система (4.7) решена, деформация свободной границы определяется по формуле

$$\eta(x,t)=\eta^\circ(x,t)-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t V_n(x,\tau)\,a_n(t-\tau)\,d\tau \tag{4.8}$$

Заметим, что функции $V_n(x, t)$ не зависят от геометрии области и должны рассматриваться как универсальные. Они убывают при $n\to\infty$ как $(2/\pi)^n$.

Для определения $k_n(\sigma)$ достаточно подсчитать интегралы

$$b_{nm}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma,x)\operatorname{th}^n\frac{\pi x}{2H}\operatorname{ch}^{-m}\frac{\pi x}{2H}\,dx \qquad (n,m=0,1,\ldots)$$

Тогда

$$k_0(\sigma)=\frac{1}{2H}b_{00}(\sigma), \qquad k_1(\sigma)=\frac{1}{H}b_{10}(\sigma), \qquad k_2(\sigma)=\frac{2}{H}(b_{00}(\sigma)-2b_{02}(\sigma))$$

$$k_3(\sigma)=\frac{G}{H}(b_{10}(\sigma)-4b_{12}(\sigma)),\qquad k_4(\sigma)=\frac{24}{H}(8b_{04}(\sigma)-8b_{02}(\sigma)+b_{00}(\sigma))$$

$$k_5(\sigma)=\frac{120}{H}(16b_{14}(\sigma)-12b_{12}(\sigma)+b_{10}(\sigma))$$

Участвующие в формуле для $V_n(x, t)$ интегралы вычисляются непосредственно

$$I_n(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}T_n\left(\operatorname{th}\frac{\pi\sigma}{2H}\right)\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi\sigma}{2H}\,e^{-i\sigma\xi}\,d\sigma=\frac{4H}{\pi}I_{n1}\left(\frac{2H}{\pi}\xi\right)$$

$$I_{01}(\gamma)=\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi}{2}\gamma,\qquad I_{11}(\gamma)=-i\gamma I_{01}(\gamma)$$

$$I_{21}(\gamma)=-\gamma^2I_{01}(\gamma),\qquad I_{31}(\gamma)=\frac{1}{3}i\gamma(2\gamma^2-1)I_{01}(\gamma)$$

$$I_{41}(\gamma)=\frac{1}{3}\gamma^2(\gamma^2-2)I_{01}(\gamma),\qquad I_{51}(\gamma)=-\frac{1}{15}i\gamma(2\gamma^4+60\gamma^2-7)I_{01}(\gamma)$$

Тогда для $n=2m$ и $2m+1$ $(m=0, 1,\ldots)$ имеем соответственно

$$V_{2m}(x,t)=-\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{H}}\frac{1}{(2m)!}\int_0^{\infty}\sigma I_{2m,1}\left(\frac{2\sigma}{\pi}\right)\frac{\sin\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}\,\tau}{\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}}\sin\sigma\rho\,d\sigma=$$

$$=-\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{H}}\frac{1}{(2m)!}\sum_{j=0}^{m}c_{jn}\int_0^{\infty}\frac{\sigma^{2j+1}}{\operatorname{ch}\sigma}\frac{\sin\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}\,\tau}{\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}}\sin\sigma\rho\,d\sigma$$

$$V_{2m+1}(x,t)=\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{H}}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}i\sigma I_{n1}\left(\frac{2\sigma}{\pi}\right)\frac{\sin\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}\,\tau}{\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}}\cos\sigma\rho\,d\sigma=$$

$$=\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{H}}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{m}c_{jn}\int_0^{\infty}\frac{\sigma^{2j+2}}{\operatorname{ch}\sigma}\frac{\sin\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}\,\tau}{\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}}\cos\sigma\rho\,d\sigma$$

Здесь $\tau=t/\sqrt{\mathrm{Fr}\,H}$, $\rho=x/H$, коэффициенты c_{jn} при $n=0,\ldots,5$ равны

$$c_{00}=\frac{\pi}{2},\qquad c_{j0}=0\quad(j\geqslant1),\qquad c_{01}=1,\qquad c_{j1}=0\quad(j\geqslant1)$$

$$c_{02}=0,\qquad c_{12}=-\frac{2}{\pi},\qquad c_{j2}=0\ (j\geqslant2),\qquad c_{03}=\frac{1}{3},\qquad c_{13}=-\frac{8}{3\pi^2}$$

$$c_{j3}=0\ (j\geqslant2),\qquad c_{04}=0,\qquad c_{14}=-\frac{4}{3\pi},\qquad c_{24}=\frac{8}{3\pi^3},\qquad c_{j4}=0\ (j\geqslant3)$$

$$c_{05}=-\frac{7}{15},\qquad c_{15}=\frac{16}{\pi^2},\qquad c_{25}=-\frac{32}{15\pi^4},\qquad c_{j5}=0\ (j\geqslant3)$$

Вычисление функций $V_n(x, t)$ сводится при этом к расчету интегралов

$$L_m(\tau,\rho)=\int_0^{\infty}\frac{\sigma^{2m+1}}{\operatorname{ch}\sigma}\frac{\sin\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}\,\tau}{\sqrt{\sigma\operatorname{th}\sigma}}\sin\rho\sigma\,d\sigma\tag{4.9}$$

и их производных по переменной ρ

$$V_{2m}(x,t)=-\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{H}}\frac{1}{(2m)!}\sum_{j=0}^{m}c_{j,2m}L_j(\tau,\rho) \tag{4.10}$$

$$V_{2m+1}(x,t)=\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{H}}\frac{1}{(2m+1)!}\sum_{j=0}^{m}c_{j,2m+1}\frac{\partial}{\partial\rho}L_j(\tau,\rho)$$

Разлагая $\sin\sqrt{\sigma\,\mathrm{th}\,\sigma\tau}$ в ряд Тейлора по τ, находим

$$L_m(\tau,\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!}A_{m,k}(\rho)$$

$$A_{m,k}(\rho)=\int_0^{\infty}\sigma^{2m+k+1}\,\mathrm{th}^k(\sigma)\frac{\sin\rho\sigma}{\mathrm{ch}\,\sigma}d\sigma \tag{4.11}$$

Используя

$$\mathrm{th}^k\sigma\,\mathrm{ch}^{-1}\sigma=2^{k+1}\frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\frac{(k+q)!}{q!}e^{-(k+1+2q)\sigma}\,\mathrm{sh}^k\sigma$$

$$\sin\rho\sigma=\mathrm{Im}\,e^{i\rho\sigma}$$

получаем

$$A_{m,k}(\rho)=2^{k+1}\frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\frac{(k+q)!}{q!}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}\sigma^{2m+k+1}e^{-S\sigma}\,\mathrm{sh}^k\sigma\,d\sigma$$

Здесь $S=k+1+2q-i\rho$, $\mathrm{Re}\,S>k$. Последний интеграл вычисляется в явном виде

$$\int_0^{\infty}\sigma^{2m+k+1}e^{-S\sigma}\,\mathrm{sh}^k\sigma\,d\sigma=2^{-k}(2m+k+1)!\sum_{\beta=0}^{k}\frac{(-1)^\beta k!}{\beta!(k-\beta)!}(S-k+2\beta)^{-(2m+k+2)}$$

В результате находим

$$A_{m,k}(\rho)=2(2m+k+1)!\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\frac{(k+q)!}{q!}\sum_{\beta=0}^{k}\frac{(-1)^\beta}{\beta!(k-\beta)!}\times$$

$$\times P_{q,\beta}^{-(m+1+k/2)}(\rho)\sin[(2m+2+k)\theta(\rho,q,\beta)] \tag{4.12}$$

$$P_{q,\beta}(\rho)=(2q+2\beta+1)^2+\rho^2,\ \mathrm{tg}\,\theta=\rho/(2q+2\beta+1)$$

Если задана точность, с которой необходимо знать значения $L_m(\tau,\rho)$, то в сумме по k достаточно взять конечное число M членов. Для допускаемой при этом ошибки $R_M(\tau,\rho)$ справедлива оценка

$$|R_M(\rho,\tau)|\leqslant 2^{-M_1}\zeta\left(2m+2,\frac{1}{2}\right)\tau^{M_2}\frac{M_1!}{M_2!}\left[1-\frac{\tau^2B}{2M_2}\right]^{-1}$$

$$M_1=M+2m+1,\ M_2=2M+1,\ B=\max(1,\ M_1/M_2)$$

где $\zeta(\omega, {}^1/_2)$ — дзета-функция Римана.

С ростом τ значение M надо увеличивать. С другой стороны, при больших τ интеграл (4.9) может быть вычислен с помощью асимптотических методов. По-видимому, оптимальным выходом из этой ситуации является комбинация двух способов расчета, когда при умеренных значениях τ

функция $L_m(\tau, \rho)$ вычисляется по формулам (4.11), (4.12), а затем по формулам, которые дает метод стационарной фазы.

Уравнения (4.7) следует решать численно. Можно показать, что их ядра $K_{nm}(t)$ убывают при $t\to\infty$ быстрее любой степени t^{-1} и $K_{nm}(0)=0$. Аналогичным поведением при $t\to\infty$ обладают и функции $a_m{}^0(t)$, если на свободной границе давление постоянно во все время движения. Пусть соответствующая спектральная задача для области Ω не имеет собственных чисел (необходимые для этого условия приведены в [7]), тогда можно утверждать, что при $p(x, t)\equiv 0$ функции $a_m(t)$ убывают при $t\to\infty$ быстрее любой степени t^{-1}. К системе (4.7) можно применить метод редукции, так как $K_{nm}(t)$ убывают при $n\to\infty$ и при $m\to\infty$ достаточно быстро, и алгебраическая система, которая получается из (4.7) после применения преобразования Лапласа по t, является вполне регулярной [4]. Поэтому решение систем уравнений

$$a_m^{(N)}(t)=a_m{}^\circ(t)+\alpha\sum_{n=0}^{N}\int\limits_0^t a_n^{(N)}(\tau)K_{nm}(t-\tau)\,d\tau\quad (m=0,1,\dots,N)$$

сходится при $N\to\infty$ к решению задачи (4.7).

Функцию $\lambda_f(x)$, входящую в формулу (4.1), можно определить экспериментально. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу о протекании идеальной жидкости в канале с твердыми стенками, когда верхняя граница прямая ($y=0$), а нижняя — криволинейная ($y=-H+h(x)$) и ее форма совпадает с формой дна в исходной задаче. Вдали от препятствия поток является равномерным со скоростью U_0 при $x\to-\infty$. Тогда комплексный потенциал течения равен $U_0\zeta(z)$, где $\zeta(z)$ — конформное отображение, такое, что $z[\zeta(z)]\equiv z$, а горизонтальная составляющая вектора скорости жидких частиц на верхней границе определяется по формуле $U_0\lambda_f'(x)$. Обдувая препятствие равномерным потоком в канале, можно определить на верхней прямолинейной границе скорость жидких частиц или распределение избытка давления, обусловленного наличием неровности.

После этого функция $K(\sigma, x)$ определяется по формуле (4.1). В трехмерном случае линейная задача о неустановившихся волнах над локализованным препятствием также сводится к (4.7), (4.8), если известен оператор «нормальная производная» N. Заметим, что достаточно знать действия оператора N на некоторую систему базисных функций. За такую систему можно принять, например, всевозможные попарные произведения базисных функций

$$T_n\left(\operatorname{th}\frac{\pi x}{2H}\right)\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi x}{2H},\qquad T_m\left(\operatorname{th}\frac{\pi z}{2H}\right)\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi z}{2H}$$

где n, $m=0, 1,\dots$ (переменные x, z изменяются в плоскости $y=0$).

Все приведенные в работе формулы остаются в силе и в случае, когда глубины бассейна $H^\pm$ при $x\to\pm\infty$ не равны между собой. Однако требование (2.4) приводит к ограничению отношения этих глубин: $H^+=(2n+1)H^-$, где $n=0, 1,\dots, H^+>H^-$. По-видимому, такое ограничение связано с особенностью метода, а не с существом задачи.

Автор благодарен И. В. Стуровой и Б. Е. Протопопову за полезное обсуждение работы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keller J. B.* Surface waves on water of non-uniform depth // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. № 6. P. 607–624.
2. *Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н.* Нестандартные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде // Функц. анализ и его приложения. 1985. Т. 19. Вып. 4. С. 43–54.
3. *Алешков Ю. З., Лиодт Г. О.* Прохождение волн через систему двух параллельных вертикальных пластин // Водные ресурсы, 1978. № 4. С. 159–165.
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
5. *Налимов В. И., Пухначев В. В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975. 173 с.
6. *Garipov R. M.* On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 24. № 5. P. 352–362.
7. *Вайнберг Б. Р., Мазья В. Г.* К задаче об установившихся колебаниях слоя жидкости переменной глубины // Тр. ММО. 1973. Т. 28. С. 57–74.

Новосибирск

Поступила в редакцию 26.VII.1988