

УДК 532.51.013.4

ГЕРЦЕНШТЕЙН С. Я., ЧЕРНЯВСКИЙ В. М., ШТЕМЛЕР Ю. М.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

Неустойчивость Рэлея — Тейлора исследовалась многими авторами, в частности [1–11]. Экспериментально установлено, что на больших временах наблюдается асимптотическая стадия, характеризуемая постоянными величинами ускорения узкого языка тяжелой жидкости и безразмерной скорости широкого пузыря легкой жидкости Fr ($Fr=0,2-0,3$) [1]. Решение стационарной задачи (отыскиваемое в системе координат, связанной с вершиной пузыря) с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma=0$ исследовалось в [2], где было найдено, что оно существует при единственном значении скорости пузыря ($Fr=0,23$). В [3] утверждалось, что стационарное решение существует при $Fr \leq 0,24$ и с помощью феноменологического критерия отбиралось единственное решение с максимальной скоростью $Fr=0,24$. В [4, 5] приведен диапазон скоростей, при котором существует решение с нулевым наклоном свободной поверхности в вершине пузыря, при $\sigma=0$ для $0 < Fr < 0,36$, а при $\sigma \neq 0$, но стремящемся к 0, лишь для $Fr=0,23$.

В численных исследованиях нестационарного течения [6–10] расчеты проводились вплоть до начала асимптотической стадии, на больших временах возникали трудности, связанные с образованием узкого «языка». В [7–9] приводятся данные ($\sigma=0$), согласно которым при больших значениях времени ускорение языка равно ускорению свободного падения, а скорость пузыря $Fr=0,23$.

В настоящей работе исследуется потенциальное течение невязкой несжимаемой тяжелой жидкости, расположенной над легкой. Асимптотическая стадия описывается нестационарным скачком, аппроксимирующим течение в окрестности языка, и стационарным потоком вне этой узкой области. Получены следствия из законов сохранения, позволяющие контролировать точность решения стационарной задачи. Стационарное решение построено при числах Фруда $0 < Fr < 0,37$. Из законов сохранения определяются положение скачка, значения комплексного потенциала и давления на нем, среднее ускорение языка, зависимость параметров предельного режима от значений интегралов сохранения (в частности, чисел Fr) от уровня начального возмущения энергии. Производная кривизны свободной поверхности в вершине пузыря имеет скачок при $Fr \neq 0,23$, что позволяет объяснить отбор решения, полученный в ряде работ, наличием схемного поверхностного натяжения.

1. Пусть в декартовой системе координат XU плоскость $Y=0$ является невозмущенной поверхностью раздела тяжелой жидкости, заполняющей полупространство $Y>0$, и легкой, плотность которой пренебрежимо мала. Ускорение силы тяжести g направлено противоположно оси Y . Рассматривается двумерное периодическое по X (с периодом λ) симметричное относительно оси Y потенциальное течение невязкой несжимаемой жидкости. Требуя выполнения кинематического и динамического условий на свободной поверхности $\Gamma(X, Y, T)=0$, а на бесконечности равенства скорости нулю, имеем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \\ P + Y + \frac{1}{2} \left| \frac{dF}{dZ} \right|^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial T} &= 0 \quad (Z = X + iY, F = \Phi + i\Psi) \\ \frac{d\Gamma}{dT} &= 0, \quad P=0 \quad (\Gamma(X, Y, T)=0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left| \frac{dF}{dZ} \right| \rightarrow 0 \quad (Y \rightarrow \infty)$$

$$\Phi(X, Y, T) = \Phi(X+1, Y, T), \quad \Gamma(X, Y, T) = \Gamma(X+1, Y, T)$$

$$\Phi(X, Y, T) = \Phi(-X, Y, T), \quad \Gamma(X, Y, T) = \Gamma(-X, Y, T)$$

Здесь F — комплексный потенциал, P — давление, давление вне жидкости принято равным нулю, T — время.

Переход к безразмерным переменным осуществляется с помощью характерных величин λ и времени $\sqrt{\lambda/g}$.

Согласно эксперименту [1], при $T \rightarrow \infty$ вершина пузыря движется с постоянной скоростью. Будем отыскивать решение задачи в системе координат, связанной с вершиной пузыря, движущейся со скоростью W . Определим число Фруда $Fr = W/\sqrt{\lambda g}$ и перейдем в систему координат, перемещающуюся с неизвестной заранее безразмерной скоростью $w = Fr$

$$\begin{aligned} T &= t - t_0, \quad Z = iwt + iy_0 + z, \quad F(Z, T) = \Phi_0(t) - iwz + f(z, t) \\ P(X, Y, T) &= p(x, y, t), \quad \Gamma(X, Y, T) = \gamma(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$z = x + iy, \quad f = \varphi + i\psi, \quad \Phi_0(t) = -\frac{w}{2}t^2 + \left(\frac{w^2}{2} - y_0\right)t + \varphi_0$$

Функция $\Phi_0(t)$ введена так, чтобы интеграл Коши — Лагранжа был инвариантен относительно перехода в подвижную систему координат; φ_0, y_0, w, t_0 — групповые параметры — обусловлены произволом в выборе постоянной в потенциале, неподвижной системы координат и начала отсчета времени и отвечают законам изменения массы, импульса, потенциальной и полной энергии. Групповые параметры растяжения λ и вертикального ускорения g порождают закон для «вириала» [11].

Отобразим область, занятую жидкостью на одном периоде в z -плоскости, на полуполосу в плоскости $q = s + ir$ так, что границы $x = \pm 1/2$ отображаются на $s = \pm \pi, r \geq 0$ и свободная поверхность $\gamma(x, y, t) = 0$ отображается на отрезок $r = 0, |s| \leq \pi$. Свободная поверхность течения схематично изображена сплошными линиями на фиг. 1 для трех моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$. Принимается, что вершины пузырей поднимаются при $x = \pm 1/2$, а язык проваливается при $x = 0$. Потребовав удовлетворения условий конформности, периодичности, симметрии и краевых условий на бесконечности для отображения $z(q, t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{\partial y}{\partial s} \quad (|s| \leq \pi, r \geq 0) \\ x(s, r, t) &= x(s + 2\pi, r, t), \quad x(s, r, t) = -x(-s, r, t) \\ x &= \frac{1}{2} \quad (s = \pi, r \geq 0), \quad \gamma(x, y, t) = 0 \quad (r = 0, |s| \leq \pi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{dz}{dq} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \quad (r \rightarrow \infty)$$

Начальные данные задачи не выписываются, так как решение строится при $t \rightarrow \infty$. Считаются известными начальные значения массы, импульса, энергии и т. д.

2. Полагая равной нулю производную по времени и $f = f^\circ, z = z^\circ, p = p^\circ$, получим из (1.1), (1.2) формулировку стационарной задачи в плоскости q

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^\circ &= 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \quad p^\circ + y^\circ + \frac{1}{2} \left| \frac{df^\circ}{dz^\circ} \right|^2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial r} &= 0, \quad p^\circ = 0 \quad (r = 0, 0 < s \leq \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^\circ(s, r) &= \varphi^\circ(s+2\pi, r), \quad x^\circ(s, r) = x^\circ(s+2\pi, r) \\ \varphi^\circ(s, r) &= \varphi^\circ(-s, r), \quad x^\circ(s, r) = -x^\circ(-s, r) \\ z^\circ &\rightarrow \frac{q}{2\pi} + iy_\infty, \quad \varphi^\circ \rightarrow i \frac{wq}{2\pi} - wy_\infty \quad (r \rightarrow \infty)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь y_∞ — вещественная постоянная.

Считая, что w и $y_0 + wt$ — скорость и ордината вершины пузыря в неподвижной системе координат, имеем

$$\frac{df^\circ}{dq} = 0, \quad y^\circ = 0, \quad x^\circ = \pm \frac{1}{2} \quad (q = \pm\pi) \quad (2.2)$$

Пусть стационарное течение имеет бесконечную скорость только в языке и нулевую в пузыре, тогда потенциал имеет вид [2]

$$f^\circ = \frac{w}{2\pi} \ln \frac{\theta}{(\theta-1)^2} - wy_\infty, \quad \theta = \exp(iq) \quad (2.3)$$

Согласно теореме Леви, свободная поверхность описывается кривой, аналитической всюду, за исключением точек, в которых скорость бесконечна, и точек с нулевой скоростью. Примем, что отображение в окрестности вершины пузыря ($\theta \rightarrow -1$) имеет вид [2]

$$z^\circ + \frac{1}{2} \rightarrow i(1+\theta) \quad (2.4)$$

Исследуем поведение отображения в окрестности языка. Динамическое условие ($p^\circ = 0$) в (2.1) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial|\xi|}{\partial\varphi^\circ}\right)^2 &= \frac{9}{8} \sec\left(\frac{2}{3}\chi\right) \quad (\theta \rightarrow 1) \\ \xi &= |\xi| \exp(i\chi) = (iz^\circ)^{3/2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Из (2.3), (2.5) получим при $\theta \rightarrow 1$ ($\chi \rightarrow 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$, $|L| \rightarrow \infty$), что z° представляется асимптотическим рядом по степеням комплексного логарифма $L = 2[\ln(1-\theta)/2] - A$

$$\begin{aligned}f^\circ &\rightarrow f^a, \quad z^\circ \rightarrow z^a \\ f^a &= -\frac{w}{2\pi}(L + \ln 4 + a), \quad iz^a = \sum_{k=0} D_k L^{3/2-k}, \quad D_0 = \frac{9w^2}{32\pi^2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

В (2.6) учтено, что асимптотическое соотношение (2.5) допускает собственное решение $\xi = -a = \text{const}$ и положено $a = A - 3D_1/2$, где D_1 — произвольно, а A — фиксировано. Коэффициенты D_k определяются последовательными приближениями и выражаются через D_0 и D_1 . В рамках асимптотической процедуры D_1 остается произвольным и находится из решения задачи в области.

Из (2.6) получим на свободной поверхности в декартовых переменных при $x \rightarrow +0$

$$\begin{aligned}\varphi^\circ &= \varphi_*^\circ(x) + O(x^3), \quad \psi^\circ = \psi_*^\circ(x), \quad y^\circ = y_*^\circ(x) + O(x^4) \\ \varphi_*^\circ(x) &= \frac{w^3}{24x^3} + \frac{2\kappa}{w}, \quad \psi_*^\circ(x) = \frac{w}{2}, \quad y_*^\circ(x) = -\frac{w^2}{8x^2} \\ \kappa &= -\frac{w^2}{2} \left(y_\infty + \frac{1}{2\pi} (\ln 4 + a) \right)\end{aligned}\quad (2.7)$$

В соответствии с (2.6) решение стационарной задачи неограничено в языке и на бесконечности. Выделяя особые члены, представим решение задачи (2.1), справедливое во всей области и учитывающее (2.4), (2.6), в виде

$$z^{\circ} = z^a(\theta) + \frac{1}{2\pi} q + z'(\theta), \quad f^{\circ} = f^a(\theta) + i \frac{w}{2\pi} q \quad (2.8)$$

$$z'(\theta) = \sum_0 z_k \theta^k, \quad \sum z_k = 0$$

Здесь $z'(\theta)$ — функция, аналитическая при $|\theta| < 1$ и непрерывная при $|\theta| = 1$ [2]. На постоянную A необходимо наложить ограничение $A > 0$ так, чтобы z° в (2.8) имела ограниченную производную при $\theta = -1$. Отметим, что вид решения (2.6) существенно отличается от использованного в [2, 4], где постоянная D_1 полагалась равной нулю ($a = A$), приводя к ограничению на знак a , что противоречит численным результатам, приведенным в разд. 6.

Согласно (2.6), решение стационарной задачи является особым в окрестности языка при $\theta \rightarrow 1$, однако нестационарное решение ограничено и имеет определенный порядок по времени, который устанавливается из законов сохранения.

3. Законы сохранения для задачи (1.1), записанной с помощью (1.2) в подвижной системе координат, с учетом ее симметрии имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= B_1, & \frac{dI_2}{dt} &= B_2, & \frac{dI_3}{dt} &= -I_2 + B_3 \\ \frac{dI_4}{dt} &= I_3 + B_4, & \frac{dI_5}{dt} &= 4I_1 - 7I_4 + B_5 \\ I_1 &= \frac{1}{2} \oint -\varphi d\psi + y^2 dx, & I_2 &= \oint y dx, & I_3 &= \oint \varphi dx \\ I_4 &= \frac{1}{2} \oint y^2 dx, & I_5 &= \oint \varphi (y dx - x dy) \\ B_1 &= - \int_G \varphi_t d\psi, & B_2 &= \int_G d\psi, & B_4 &= \int_G y d\psi \\ B_3 &= \int_G \frac{1}{2} (\varphi_x^2 - \varphi_y^2 + \varphi_t + y) dx + \varphi_x \varphi_y dy \\ B_5 &= \int_G \frac{1}{2} (\varphi_x^2 - \varphi_y^2) (y dx + x dy) - \\ &\quad - \varphi_x \varphi_y (x dx - y dy) + (\varphi_t + y) (y dx - x dy) + 2\varphi d\psi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь замкнутый контур ограничивает область течения на одном периоде, обход которого совершается по часовой стрелке; G — часть замкнутого контура, не являющаяся свободной поверхностью; I_k — интегралы полной энергии, массы, импульса, потенциальной энергии и «вириала»; B_k — потоки I_k через G ($k=1, \dots, 5$).

Избавимся от неограниченных частей в интегралах, содержащихся в (3.1), обусловленных бесконечностью области, занятой жидкостью. Рассмотрим конечный столб жидкости высотой H , определив величины, входящие в (3.1), как предельные значения при $H \rightarrow \infty$

$$\varphi = -wy + \varphi_{\infty}(t), \quad \psi = wx \quad (y \geq H) \quad (3.2)$$

Вычисляя (3.1) с учетом условий симметрии и (3.2) при $H \rightarrow \infty$, получим законы сохранения, сформулированные для интегралов по свободной поверхности

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} + \frac{w}{2} \varphi_{\infty} &= 0, & \frac{di_2}{dt} &= w, & \frac{di_3}{dt} &= -i_2 - \frac{w^2}{2} \\ \frac{di_4}{dt} &= i_3 + \varphi_{\infty}, & \frac{di_5}{dt} &= 4i_1 - 7i_4 + b \\ i_1 &= \frac{1}{9} \int_s (\varphi d\psi - y^2 dx), & i_2 &= - \int_s y dx, & i_3 &= - \int_s \varphi dx \\ i_4 &= - \frac{1}{2} \int_s y^2 dx, & i_5 &= \int_s \varphi (x dy - y dx) \\ b &= \frac{1}{2} \int_h^{\infty} (\varphi_y^2 - w^2) |_{s=\pi} dy + \varphi(\pi, 0, t) \frac{dh}{dt} - \frac{h^2}{2} - \frac{w^2 h}{2} + 2w\varphi_{\infty} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь s — свободная поверхность; h — ордината вершины пузыря в подвижной системе координат; i_k — возмущения I_k , обусловленные отклонением свободной поверхности от невозмущенного уровня.

Интегрируя (3.3) по времени, получим

$$\begin{aligned} i_1 + \frac{w}{2} \varphi_{\infty} &= c_1, & i_2 &= wt + c_2, & i_3 &= -\frac{w}{2} t^2 - \left(c_2 + \frac{w^2}{2} \right) t + c_3 \\ i_4 &= -\frac{w}{6} t^3 - \frac{1}{2} \left(c_2 + \frac{w^2}{2} \right) t^2 + c_3 t + c_4 + I \\ i_5 &= \frac{7w}{24} t^4 + \frac{7}{6} \left(c_2 + \frac{w^2}{2} \right) t^3 - \frac{7}{2} c_3 t^2 + (4c_1 - 7c_4) t + \int_0^t (b - 7I) dt + c_5 \\ i_k &= i_k(t, c_n), & c_k &= i_k(0, c_k) \quad (n, k=1, \dots, 5) \\ I &= \int_0^t \varphi_{\infty}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

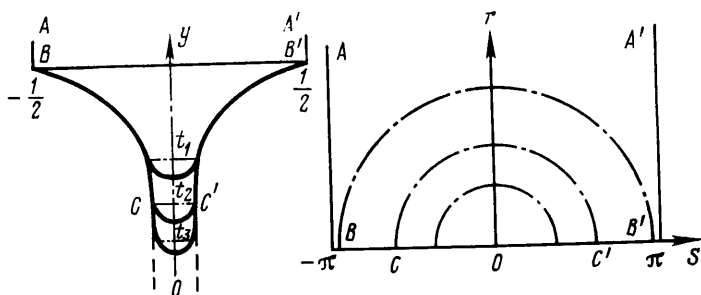
4. Решение стационарной задачи (2.1) является, согласно методу сращиваемых асимптотических разложений, внешним решением нестационарной задачи при $t \rightarrow \infty$, внутреннее решение описывается интегрально. Введем разрывную свободную поверхность, на которой антисимметричные функции $x(s, 0, t)$, $\psi(s, 0, t)$ имеют скачки, а симметричные функции $y(s, 0, t)$, $\varphi(s, 0, t)$ и $p(s, 0, t)$ непрерывны при $s=0$. Из (2.7) получим

$$\begin{aligned} x(\pm 0, 0, t) &= \pm x_*(t), & \psi(\pm 0, 0, t) &= \pm \psi_*(t) \\ y(\pm 0, 0, t) &= y_*(t), & \varphi(\pm 0, 0, t) &= \varphi_*(t), & p(\pm 0, 0, t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\psi_*(t) = \frac{w}{2}, \quad y_*(t) = -\frac{w^2}{8x_*^2} + O(x_*^4) \quad (4.1)$$

$$\varphi_*(t) = \frac{w^3}{24x_*^3} + \frac{2\kappa}{w} + O(x_*^3)$$

$$x_* = \frac{\mu}{t} + O\left(\frac{1}{t^7}\right)$$



Фиг. 1

Коэффициент пропорциональности μ в (4.1) определяется из законов сохранения.

Поскольку законы сохранения справедливы для любых моментов времени, вычислим интегралы i_k в (3.3) на предельном решении нестационарной задачи при $t \rightarrow \infty$, определяемом решением стационарной задачи и нестационарным скачком, аппроксимирующим течение в языке. На фиг. 1 штриховые линии изображают стационарную свободную поверхность, а штрихпунктирные — нестационарный скачок для трех моментов времени. Из (4.1) вычислим вклады за счет скачка i_{*k} в интегралы i_k , определенные в (3.3)

$$i_{*1} = -y_*^2 x_* + \varphi_* \psi_*, \quad i_{*2} = -2y_* x_* \quad (4.2)$$

$$i_{*3} = -2\varphi_* x_*, \quad i_{*4} = -y_*^2 x_*, \quad i_{*5} = -2y_* x_* \varphi_*$$

Представим с помощью (2.7) подынтегральные выражения (3.3) в виде суммы особых и регулярных частей, вычислим вклады в интегралы i_k по свободной поверхности вне скачка, которые вместе с (4.2) дают

$$\begin{aligned} i_1 &= v + \kappa, \quad i_2 = m + \frac{w^2}{2x_*}, \quad i_3 = j - \frac{w^3}{8x_*^2} \\ i_4 &= v - \frac{w^4}{48x_*^3}, \quad i_5 = d + \frac{7w^5}{384x_*^4} + \frac{2\kappa w}{x_*} \\ m &= -2 \int_0^{1/2} (y - y_*^\circ) dx - \frac{w^2}{2} + O(x_*^5) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$j = -2 \int_0^{1/2} (\varphi - \varphi_*^\circ) dx - \frac{w^3}{6} - \frac{2\kappa}{w} + O(x_*^4), \quad v = - \int_0^{1/2} (y^2 - y_*^{\circ 2}) dx + \frac{w^4}{24} + O(x_*^3)$$

$$d = \int_0^{1/2} x (\varphi dy - \varphi_*^\circ dy_*^\circ) - (\varphi y - \varphi_*^\circ y_*^\circ) dx + \frac{3}{2} \left(\frac{w^5}{24} + \kappa w \right) + O(x_*^2)$$

$$y_*^\circ = -\frac{w^2}{8x_*^2}; \quad \varphi_*^\circ = \frac{w^3}{24x_*^3} + \frac{2\kappa}{w}$$

Здесь m, j, v, κ, d — регулярные части в интегралах массы, импульса, потенциальной и кинетической энергии, «вириала».

Из (3.4), (4.1), (4.3) получим на предельном решении, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t ($t \rightarrow \infty$)

$$\mu = \frac{1}{2} w \quad (4.4)$$

$$m = -\frac{1}{2} w^2, \quad j=0, \quad v = \frac{1}{3} b^\circ \quad (4.5)$$

$$c_1 = v + \kappa, \quad c_2 = -\frac{w^2}{2}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = v - \int_0^t \varphi_\infty(\tau) d\tau$$

$$c_5 = d - \int_0^t (b - b^\circ - 7I) dt \quad (4.6)$$

Здесь использовано, что при $t \rightarrow \infty$ решение стремится к стационарному, для которого

$$h(t) \rightarrow 0, \quad \frac{dh}{dt} \rightarrow 0, \quad b \rightarrow b^\circ, \quad \varphi_\infty(t) \rightarrow 0$$

$$b^\circ = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\varphi_y^2 - w^2) |_{s=\pi} dy$$

Значение параметра μ в (4.4) определяет с точностью до малых величин, согласно (4.1), параметры скачка

$$x_* = \frac{w}{2t}, \quad \psi_* = \frac{w}{2}, \quad y_* = -\frac{1}{2} t^2, \quad \varphi_* = \frac{1}{3} t^3 \quad (4.7)$$

Интегральные условия (4.5), являющиеся стационарными следствиями из законов сохранения, используются для контроля точности решения стационарной задачи. Соотношения (4.6) определяют частные начальные данные, отвечающие предельному решению. Из (4.7), в частности, следует, что среднее ускорение языка равно ускорению свободного падения.

5. Наличие групповых свойств нестационарной задачи позволяет связать параметры общего предельного режима с произвольными начальными данными. Получим из (3.3), (4.5), (4.6) зависимость группы начальных данных $c_k^\circ = i_k(t_0, c_n)$ от группового параметра t_0 . Значение времени $t=t_0$ соответствует, согласно (1.2), $T=0$ — моменту времени, отвечающему начальным данным c_k°

$$c_1^\circ + \frac{1}{2} w \varphi_\infty(t_0) = v + \kappa, \quad c_2^\circ = w t_0 - \frac{1}{2} w^2$$

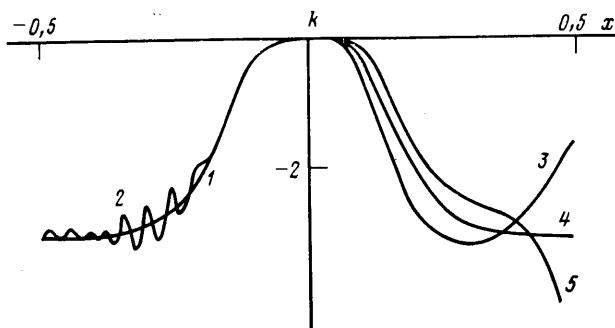
$$c_3^\circ = -\frac{1}{2} w t_0^2, \quad c_4^\circ = -\frac{w}{6} t_0^3 + v - \int_{t_0}^\infty \varphi_\infty(\tau) d\tau$$

$$c_5^\circ = \frac{7w}{24} t_0^4 + 4\kappa t_0 - \int_{t_0}^\infty (b(\tau) - b^\circ - 7I(\tau)) d\tau \quad (5.1)$$

В физических и численных экспериментах начальные данные обычно ставятся в неподвижной системе координат. Получим связь начальных данных в подвижной и неподвижной системах координат, используя групповые свойства задачи

$$E = c_1^\circ + \frac{1}{2} w \varphi_\infty(t_0) + \left(Y_0 + \frac{1}{2} w^2 \right) c_2^\circ + w c_3^\circ - \frac{1}{2} Y_0^2$$

$$M = c_2^\circ - Y_0, \quad J = c_3^\circ + w c_2^\circ - \Phi_0$$



Фиг. 2

$$V = c_4^0 + Y_0 c_2^0 - \frac{1}{2} Y_0^2 \quad (5.2)$$

$$D = c_5^0 + 3w c_4^0 + Y_0 c_3^0 + (2\Phi_0 + wY_0) c_2^0 - \Phi_0 Y_0 + h(t_0) \Phi_0 + \frac{1}{2} w h^2(t_0)$$

Здесь, согласно (1.2), $\Phi_0 = \Phi_0(t_0)$; $Y_0 = y_0 + wt_0$; E, M, J, V, D — начальные значения полной энергии, массы, импульса, потенциальной энергии и «вириала» в неподвижной системе координат соответственно, определяемые из выражений (3.3) для t_k формальной заменой φ, ψ, x, y на Φ, Ψ, X, Y .

Положим без ограничения общности $M=0$ и $J=0$, фиксируя сдвиг системы координат по оси y и постоянную в потенциале. Исключая из (5.1), (5.2) c_k^0 и используя (1.2), получим зависимость групповых параметров w, y_0, Φ_0 от начальных данных

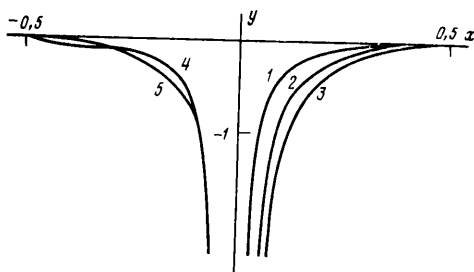
$$E = v + \kappa - \frac{1}{8} w^4, \quad y_0 = -\frac{1}{2} w, \quad \Phi_0 = -\frac{1}{2} w^3 \quad (5.3)$$

Подчеркнем, что v и κ определяются решением стационарной задачи и являются функциями от w . Первое соотношение (5.3) определяет зависимость скорости пузыря w от начальной величины возмущения полной энергии E , последние два — определяют постоянные y_0 и Φ_0 ¹. Выражения для t_0, λ не выписываются, так как в отличие от остальных содержат интегралы, которые можно вычислить, лишь зная переходной процесс, и которые определяют поправку к средней скорости языка $-(T+t_0)$ и длину λ .

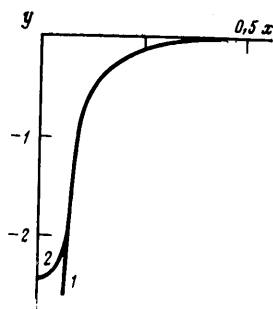
6. Стационарная задача решается численно-аналитически на основе соотношений разд. 2. Аналитически определяются n первых коэффициентов в асимптотическом разложении для z^a в (2.6), а динамическое условие переписывается для регулярной поправки z' в виде конечного отрезка степенного ряда, содержащего N членов. На свободной поверхности $\theta = \exp(is)$ и z' представляется в виде комплексного ряда Фурье с вещественными коэффициентами z_k . С помощью быстрого преобразования Фурье получаем систему нелинейных уравнений относительно z_k , которая решалась итерационным методом Ньютона. Приведенные результаты получены, за исключением специально оговоренных случаев, при $n=2, N=32$.

Расчеты показали, что поведение формального решения и сходимость итераций существенно зависят от величины D_1 . Кривизна свободной поверхности $k(x)$ при $w=0,225$ иллюстрирует изменение в поведении формального решения в зависимости

¹ Соотношение (5.3) получено в предположении, что на больших временах решение стремится к стационарному состоянию с неподвижной поверхностью раздела в виде «жесткого желоба». Это соответствует некоторому классу начальных данных, явный вид которых не указывается. Численные эксперименты (см. фиг. 4) показывают, что для обычно используемых начальных данных принятое предположение о форме языка достаточно хорошо выполняется. Авторы благодарят А. Г. Куликовского и А. Л. Крылова за это замечание и полезное обсуждение работы.



Фиг. 3



Фиг. 4

от D_1 (фиг. 2). Видно, что существует «правильное» значение $D_1=D_*$, при котором решение является гладким (кривая 1), при отклонении D_1 от D_* появляются осцилляции около гладкого решения (кривая 2). Точность соответствующего гладкого решения контролировалась с помощью стационарных следствий законов сохранения (4.5). Оказалось, что при $D_1=D_*$ соотношение (4.5) для j выполняется с точностью 10^{-6} . Зависимость нормированных ошибок в m и v и сходимость D_* от N иллюстрируется ниже:

N	4	16	32	64
D_*	1,4	1,683	1,678	1,673
$2m/w^2+1$	0,76	-0,013	-0,009	-0,006
$3v/b^0-1$	1,14	-0,078	-0,061	-0,045

Интегралы m, j, v вычислялись с помощью метода трапеции.

На фиг. 2 приводится зависимость кривизны $k(x)$ для трех значений $w=0,200; 0,225; 0,250$ (кривые 3, 4, 5). Видно, что $dk/dx=0$ в вершине пузыря при $w=0,225$, при других значениях скорости зависимости $k(x)$ обнаруживает наличие скачка функции dk/dx при $x=1/2$.

Расчеты, проводившиеся при фиксированном значении $A=1$, показали, что величина a , определенная в разд. 2, оказывается отрицательной и, следовательно, ограничение, наложенное в [2, 4] на знак a ($a>0$), является искусственным. Для сравнения с [4] проведены расчеты с $D_1=0$, полученное решение осциллировало около гладкого решения, соответствующего D_* , и ошибки в интегральных тождествах (4.5) были очень значительны, для их уменьшения было необходимо (например, суммируя соответствующие тригонометрические ряды) провести сглаживание. Решение стационарной задачи с непрерывным наклоном в вершине пузыря получено в диапазоне $0<w<0,37$, близком к найденному в [4]. Форма свободной поверхности $y^0=y^0(x)$ изображена на фиг. 3 при $0<x\leq 1/2$ для $w=0,150; 0,225; 0,300$ (кривые 1, 2, 3). Формы свободной поверхности находятся в хорошем соответствии с качественными результатами [4], приведенными без указания масштабов по осям.

Вид свободной поверхности с графической точностью воспроизводится уже при небольшом количестве гармоник $N=8$ (на фиг. 3 кривая 4 — $N=4$; 5 — $N=8, 16, 32, 64$).

На фиг. 4 форма свободной поверхности, полученная в настоящей работе при $w=0,225$ (кривая 1), сопоставляется с приведенной в [8] при решении нестационарной задачи (кривая 2), значение кривизны свободной поверхности в вершине пузыря $k_0=3,14$ также совпадает с результатом [8].

Зависимость (5.3) скорости пузыря w от уровня полной начальной энергии E приведена на фиг. 5. Отметим двузначный характер зависимости $w=w(E)$, в частности при $E=0$ помимо тривиального решения с невозмущенной свободной поверхностью, соответствующего $w=0$, существует возмущенное решение с $w=0,27$.

7. При учете поверхностного натяжения в стационарной задаче динамическое условие на свободной поверхности записывается в соответствии с формулой Лапласа в виде

$$y + \frac{v^2}{2} + \sigma k = \sigma k_0, \quad v = \left| \frac{df^0}{dz} \right| \quad (7.1)$$

Здесь постоянная в интеграле Бернулли определена так, что $v=0$ при $x=1/2, y=0$.

В вершине пузыря необходимо задать α — угол наклона касательной к

свободной поверхности. В случае периодических граничных условий потребуем

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \left(x = \frac{1}{2} \right) \quad (7.2)$$

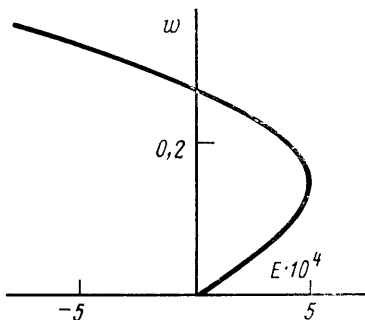
При $\sigma \neq 0$ из числа законов сохранения (3.1) исключается закон изменения i_5 , а полная энергия i_1 включает поверхностную энергию [11] U .

Можно показать, что $U \sim \sigma t^2$ при $t \rightarrow \infty$. Поскольку кинетическая и потенциальная энергии порядка t^3 , то в главном приближении все выводы остаются в силе, в частности среднее ускорение языка равно ускорению свободного падения. Согласно оценке для U , при численном решении нестационарной задачи возможны большие ошибки, обусловленные схемным поверхностным натяжением.

В работе [5] при $\sigma \ll 1$ стационарное решение, найденное численно, удовлетворяет условию $\alpha = 0$ лишь при $w = 0,23$. Этот результат объясняется асимптотикой решения при $\sigma \rightarrow 0$, которое будем отыскивать методом последовательных приближений. В нулевом и первом приближениях по σ получаем из (7.1)

$$y^{(0)} + \frac{v^{(0)2}}{2} = 0,$$

$$y^{(1)} + v^{(0)}v^{(1)} = -\sigma k^{(0)} + \sigma k_0^{(0)}$$



Фиг. 5

Дифференцируя последнее равенство вдоль свободной поверхности и учитывая, что в вершине пузыря скорость и ордината равны нулю, получим

$$\frac{dy^{(1)}}{dx} = -\sigma \frac{dk^{(0)}}{dx}$$

Из этого соотношения следует, что краевое условие $\alpha = 0$ удовлетворяется, если в вершине пузыря $dk^{(0)}/dx = 0$, т. е. при $w = 0,23$ (фиг. 2, кривая 4).

Таким образом, построено предельное решение, существующее при $0 < Fr < 0,37$, которое отбирается начальным возмущением полной энергии E и углом смачивания α . В частности, при отсутствии поверхностного натяжения скорость пузыря Fr определяется величиной E , а наличие сеточного поверхностного натяжения приводит к отбору Fr в зависимости от α , например $Fr = 0,23$ при $\alpha = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levis D. J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes II // Proc. Roy. Soc. L. 1950. V. A202. P. 84–96.
2. Birkhoff G., Carter D. Rising Plane Bubbles // J. Math. and Mech. 1957. V. 6. № 6. P. 769–779.
3. Garabedian P. R. On steady-state bubbles generated by Taylor instability // Proc. Roy. Soc. L. 1957. V. A241. P. 423–431.
4. Vanden-Broeck J.-M. Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle // Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 5. P. 1090–1093.
5. Vanden-Broeck J.-M. Rising bubbles in a two-dimensional tube with surface tension // Phys. Fluids. 1984. V. 27. № 11. P. 2604–2607.
6. Бабенко К. И., Петрович В. Ю. О неустойчивости Рэлея – Тейлора: Препринт № 68. М.: Ин-т прикл. матем., 1978. 48 с.
7. Давыдов Ю. М., Демьянов А. Ю., Цветков Г. А. Численное моделирование стабилизации и объединения гармоник при рэлей-тейлоровской неустойчивости мето-

- дом крупных частиц // Сообщ. по прикладной математике. М. ВЦ АН СССР. 1987. 51 с.
8. *Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.* Vortex simulations of the Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Fluids*. 1980. V. 23. № 8. P. 1485–1490.
 9. *Волкова Р. А., Круглякова Н. В., Михайлова Н. В. и др.* О моделировании рэлей-тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости в трехмерной постановке: Препринт № 86. М.: Ин-т прикл. матем., 1985. 26 с.
 10. *Герценштейн С. Я., Чернявский В. М.* О нелинейном развитии двумерных и трехмерных возмущений при неустойчивости Рэля – Тейлора // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1985. № 2. С. 38–46.
 11. *Benjamin T. B., Olver P. J.* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 125. P. 137–185.

Москва

Поступила в редакцию
22.IV.1988