

УДК 532.529

АСМОЛОВ Е. С.

## О ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА СФЕРИЧЕСКУЮ ЧАСТИЦУ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

На сферическую частицу, движущуюся в неограниченном сдвиговом потоке вязкой жидкости, действует поперечная сила [1, 2], возникающая вследствие учета инерционных членов в уравнениях движения. При движении частицы на дне ламинарного пограничного слоя величина указанной силы отличается от найденной в [1, 2]. Задача определения поперечной силы, действующей на частицу, в зависимости от ее расстояния до стенки решалась методом срачиваемых асимптотических разложений. Величина силы выражается через кратный интеграл, вычисление которого проводилось численно.

1. Задача определения параметров дисперсной среды в ламинарном пограничном слое рассматривалась в последнее время многими авторами [3–6]. Уравнения движения двухфазной среды в указанных работах строятся на основе широко используемого представления о взаимопроникающих континуумах сред несущей и дисперсной фаз. При этом для случая малых значений числа Рейнольдса относительного движения частиц и несущей фазы  $Re_v = \rho u_\infty a / \mu$ ,  $\rho$  и  $\mu$  — плотность и вязкость несущей фазы,  $u_\infty$  и  $a$  — скорость относительного движения и радиус частицы, в качестве силы взаимодействия фаз, как правило, принимается сила Стокса  $F_s = 6\pi\mu a u_\infty$ . Между тем известно [1, 2], что при движении частицы в сдвиговом потоке, как это имеет место в пограничном слое, на частицу действует дополнительная поперечная сила, возникающая вследствие учета инерционных членов в уравнениях движения.

Для случая, когда число Рейнольдса  $Re_k$ , определяемое по величине поперечного градиента скорости невозмущенного частицей потока  $(\partial U / \partial Y)$ , удовлетворяет неравенству

$$Re_v^2 \ll Re_k \ll 1, \quad Re_k = (\rho a^2 / \mu) (\partial U / \partial Y)$$

поперечная сила, действующая на частицу при ее движении в неограниченном сдвиговом потоке в направлении увеличения скорости набегающего потока, имеет величину [1, 2]

$$F_{y0} = 6,46\mu a u_\infty Re_k^{1/2} \quad (1.1)$$

В условиях пограничного слоя частица обтекается в направлении, противоположном скорости движения,  $u_\infty < 0$ . По этой причине и поперечная сила  $F_{y0} < 0$ , т. е. направлена к стенке. Влияние указанной силы на поперечные миграции частиц и, как следствие, на распределение плотности дисперсной фазы в пограничном слое может быть существенным [4]. Отметим, однако, что для частицы, движущейся на достаточно малом расстоянии от стенки, величина действующей на нее силы отличается, очевидно, от значения (1.1), полученного для случая неограниченного потока. В этой связи возникает необходимость определения зависимости силы  $F_y$  от расстояния частицы до стенки.

2. Задача определения поперечной силы решалась аналогично [1] методом срачиваемых асимптотических разложений. При этом решение во внутренней области с характерным пространственным масштабом  $a$

представляет собой известное решение уравнений Стокса вязкого течения около сферы. Внешняя область решения, в которой вязкие и инерционные члены в уравнениях Навье — Стокса становятся величинами одного порядка, имеет пространственный масштаб  $R = a \operatorname{Re}_k^{-1/2} \gg a$ .

Отметим, что в условиях пограничного слоя масштаба  $R$  мал по сравнению с его толщиной  $\delta$ . Действительно, учитывая, что поперечный градиент скорости невозмущенного частицей потока является величиной порядка  $\partial U / \partial Y \sim U / \delta \sim U \operatorname{Re}_x^{1/2} / X$ , где  $U$ ,  $X$ ,  $\operatorname{Re}_x = \rho U X / \mu \gg 1$  — соответственно характерные скорость потока, продольный масштаб и число Рейнольдса пограничного слоя, нетрудно получить для величины  $R$  оценку  $R \sim X \operatorname{Re}_x^{-3/4} \ll \delta$ .

Приведенная оценка означает, что на масштабе внешней области  $R$  профиль скорости невозмущенного частицей потока можно считать линейным и, кроме того, влияние стенки на величину поперечной силы  $F_y$  будет сказываться лишь на расстояниях порядка  $R$  от нее, т. е. на дне пограничного слоя.

Следуя [1], запишем уравнения для внешнего разложения возмущенных скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$ , обезразмеренных соответственно на величины  $u_\infty \operatorname{Re}_k^{1/2}$  и  $\rho u_\infty \operatorname{Re}_v \operatorname{Re}_k^{1/2}$  (начало координат совпадает с центром частицы), в виде

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} + y \partial \mathbf{u} / \partial x + u_y \mathbf{e}_x = -6 \pi \epsilon_x \delta(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

Здесь два последних члена в левой части уравнения импульса представляют собой вклад от инерционного члена, а член в правой части — обезразмеренную точечную силу Стокса. Он возникает вследствие того, что для рассмотрения течения во внешней области частица была заменена системой помещенных в начале координат сил и моментов, величины которых подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие равенства нулю скорости на поверхности частицы. При этом в уравнение (2.1) для членов главного приближения войдет только точечная сила.

Граничными условиями к уравнениям (2.1) в рассматриваемом здесь случае движения частицы вблизи плоской поверхности являются условия равенства нулю возмущенной скорости на стенке и на бесконечности

$$\mathbf{u}|_{y=y_0} = 0, \quad y_0 = O(1), \quad y_0 < 0, \quad \mathbf{u}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.2)$$

Отметим, что в случае движения частицы в неограниченном потоке имеется только второе из граничных условий.

Помимо граничных условий решение уравнений (2.1) должно удовлетворять условию срачивания при  $r \rightarrow 0$  с решением во внутренней области

$$\mathbf{u}|_{r \rightarrow 0} = \mathbf{u}_s = -3/4 [\mathbf{e}_x / r + (\mathbf{e}_x \mathbf{r}) \mathbf{r} / r^3] \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{u}_s$  — внешний предел решения уравнений Стокса.

Для решения задачи во внешней области в [1] проводилось преобразование Фурье уравнений (2.1) и граничных условий по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Такая процедура позволила понизить порядок уравнений и свести задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для фурье-образов скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$ .

В рассматриваемом в данной работе случае, когда внешняя область течения ограничена плоскостью  $y = y_0$ , преобразование Фурье может быть проведено только по двум координатам —  $x$  и  $z$ . В результате уравнения движения (2.1) преобразуются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной  $y$  для фурье-образов скорости  $\Gamma$  и давления  $\Pi$

$$\begin{aligned} -ik_x \Gamma_x - ik_z \Gamma_z + d\Gamma_y / dy &= 0 \\ -ik_x y \Gamma_x + \Gamma_y - ik_x \Pi + L \Gamma_x &= -3(2\pi)^{-1} \delta(y) \\ -ik_x y \Gamma_y + d\Pi / dy + L \Gamma_y &= 0, \end{aligned}$$

$$-ik_x y \Gamma_z - ik_z \Pi + L \Gamma_z = 0$$

$$L = k^2 - d^2/dy^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_z^2$$

$$\Gamma = (4\pi^2)^{-1} \int \exp[i(k_x x + k_z z)] \mathbf{u} \, dx \, dz,$$

$$\Pi = (4\pi^2)^{-1} \int \exp[i(k_x x + k_z z)] p \, dx \, dz$$

Последовательно исключая в полученной системе переменные  $\Pi$ ,  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_z$ , получим уравнение для фурье-образа поперечной скорости  $\Gamma_y$

$$(L - ik_x y) L \Gamma_y = -i\mathcal{Z} (2\pi)^{-1} k_x \delta'(y) \quad (2.4)$$

При этом граничные условия (2.2) переписутся в виде

$$\Gamma_y|_{y=y_0} = d\Gamma_y/dy|_{y=y_0} = \Gamma_{y \rightarrow +\infty} = 0 \quad (2.5)$$

Решением уравнения (2.4), удовлетворяющим первым двум условиям (2.5), является

$$\Gamma_y = (2k)^{-1} \left( e^{ky} \int_{y_0}^y e^{-k\eta} \varphi \, d\eta - e^{-ky} \int_{y_0}^y e^{k\eta} \varphi \, d\eta \right) \quad (2.6)$$

где функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' + (ik_x y - k^2) \varphi = -i\mathcal{Z} (2\pi)^{-1} k_x \delta'(y) \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.7) может быть выражено через функции Эйри:  $\text{Ai}(\xi)$ ,  $\text{Ai}(\xi_1)$ ,  $\xi = ik_x^{1/3} y - k^2 k_x^{-2/3}$ ,  $\xi_1 = e^{2\pi i/3} \xi$ , которые, как следует из их асимптотического разложения при больших значениях аргумента [7], являются экспоненциально возрастающей и убывающей функциями при  $y \rightarrow +\infty$ . Для того чтобы решение (2.6) было ограничено при  $y \rightarrow +\infty$ , необходимо, очевидно, чтобы функция  $\varphi(y)$  убывала при  $y \rightarrow +\infty$  быстрее, чем  $\exp(-ky)$ . Указанному условию при  $k_x \geq 0$  (для случая  $k_x < 0$ , как нетрудно показать, решение (2.4) комплексно сопряжено решению от  $(-k_x)$ ,  $\Gamma_y(k_x) = \bar{\Gamma}_y(-k_x)$ ,  $k_x < 0$ ) удовлетворяет следующее выражение для  $\varphi(y)$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \varphi_0 = -I_1 (I_2 + I_3)^{-1} \text{Ai}(\xi_1) \quad (2.8)$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 3ik \cos \theta e^{i\pi/6} [e^{2\pi i/3} \text{Ai}'(\xi_{10}) \text{Ai}(\xi) - \text{Ai}'(\xi_0) \text{Ai}(\xi_1)], & y < 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{y_0}^0 \varphi_1 e^{-k\eta} \, d\eta, \quad I_2 = \int_{y_0}^0 \text{Ai}(\xi_1) e^{-k\eta} \, d\eta, \quad I_3 = \int_0^\infty \text{Ai}(\xi_1) e^{-k\eta} \, d\eta \quad (2.9)$$

$$\xi_0 = \xi|_{y=0} = -k^{1/3} (\cos \theta)^{-2/3}, \quad \xi_{10} = e^{2\pi i/3} \xi_0, \quad \cos \theta = k_x/k$$

С учетом (2.8), (2.9) решение (2.6) может быть переписано в виде

$$\Gamma_y = \frac{I_1 [e^{ky} (I_3 - I_6) + e^{-ky} (I_5 + I_7)]}{2k(I_2 + I_3)} - \frac{I_4 e^{-ky}}{2k} - (2k)^{-1} \begin{cases} I_8 e^{ky} - I_9 e^{-ky}, & y < 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$I_4 = \int_{y_0}^0 \varphi_1 e^{k\eta} \, d\eta, \quad I_5 = \int_{y_0}^0 \text{Ai}(\xi_1) e^{k\eta} \, d\eta, \quad I_6 = \int_0^y \text{Ai}(\xi_1) e^{-k\eta} \, d\eta$$

$$I_7 = \int_0^y \text{Ai}(\xi_1) e^{k\eta} \, d\eta, \quad I_8 = \int_y^0 \varphi_1 e^{-k\eta} \, d\eta, \quad I_9 = \int_y^0 \varphi_1 e^{k\eta} \, d\eta$$

3. Покажем, что для найденного решения во внешней области выполняется условие сращивания (2.3) при  $r \rightarrow 0$ . Для этого сравним функции  $\Gamma_y$  и  $\Gamma_{ys}$ , где  $\Gamma_{ys}$  — фурье-образ внешнего предела стоксовского решения о вязком обтекании сферы, удовлетворяющий уравнению (ср. с (2.4))

$$L^2 \Gamma_{ys} = -i3(2\pi)^{-1} k_x \delta'(y) \quad (3.1)$$

с граничными условиями  $\Gamma_{ys}|_{y \rightarrow \mp \infty} = 0$ . Решением (3.1), как нетрудно показать, является

$$\Gamma_{ys} = \frac{3iy \cos \theta}{4\pi} \begin{cases} e^{ky}, & y < 0 \\ -e^{-ky}, & y \geq 0 \end{cases}$$

Как видно из последнего выражения, при  $|y| \rightarrow 0$   $\Gamma_{ys}$  является величиной  $O(y)$  при больших значениях  $k \sim |y|^{-1} \gg 1$ . Это означает, что особенность  $r^{-1}$  скорости  $u_{ys}$  формируется в обратном преобразовании Фурье

$$u_{ys} = \int \Gamma_{ys} \exp[-i(k_x x + k_z z)] dk_x dk_z$$

за счет интегрирования по области значений  $k_x, k_z \sim r^{-1} \gg 1$ .

Аналогичными характерными особенностями при  $|y| \rightarrow 0, k \gg 1$  обладает и решение для  $\Gamma_y$  (2.10). Для доказательства этого утверждения используем асимптотические представления для функций  $\text{Ai}(\xi), \text{Ai}(\xi_1), \text{Ai}'(\xi_0), \text{Ai}'(\xi_{10})$  [7], входящих в формулы (2.8)–(2.10), при  $|\xi| \gg 1$

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\xi) &= \pi^{-1/2} (-\xi)^{-1/4} \left[ \sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right) \sum_0^{\infty} (-1)^l c_{2l} \xi^{-2l} - \right. \\ &\left. - \cos\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right) \sum_0^{\infty} (-1)^l c_{2l+1} \xi^{-2l-1} \right], \quad |\arg(-\xi)| < \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Ai}(\xi_1) = (4\pi)^{-1/2} \xi_1^{-1/4} \exp(-\xi_1) \sum_0^{\infty} (-1)^l c_l \xi_1^{-l}, \quad |\arg(\xi_1)| < \pi \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ai}'(\xi_0) &= \pi^{-1/2} (-\xi_0)^{1/4} \left[ \cos\left(\xi_0 + \frac{\pi}{4}\right) \sum_0^{\infty} (-1)^l d_{2l} \xi_0^{-2l} + \right. \\ &\left. + \sin\left(\xi_0 + \frac{\pi}{4}\right) \sum_0^{\infty} (-1)^l d_{2l+1} \xi_0^{-2l-1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Ai}'(\xi_{10}) = -(4\pi)^{-1/2} \xi_{10}^{1/4} \exp(-\xi_{10}) \sum_0^{\infty} (-1)^l d_l \xi_{10}^{-l}$$

$$\xi = 2/3(-\xi)^{3/2}, \quad \xi_1 = 2/3\xi_1^{3/2} = -i\xi, \quad \xi_0 = 2/3(-\xi_0)^{3/2}, \quad \xi_{10} = -i\xi_0$$

$$c_0 = 1, \quad c_l = \frac{\Gamma(3l+1/2)}{54^l l! \Gamma(l+1/2)}, \quad a_0 = 1, \quad d_l = -\frac{6l+1}{6l-1} c_l$$

При  $k \rightarrow \infty, |y| \ll 1$  величины  $\xi, \xi_1$  в выражениях (3.2) можно представить в виде ряда по степеням  $k^{-1}$

$$\xi_1 = \frac{2ik^2(1-iy \cos \theta/k)^{3/2}}{3 \cos \theta} = \xi_{10} + iyk - y^2 \cos \theta/4 + O(y^2 k^{-1}) \quad (3.3)$$

После подстановки (3.3) в (3.2) и (2.8) получим для функций  $\text{Ai}(\xi_1)$  и  $\varphi_1$

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\xi_1) &= (4\pi)^{-1/2} (-\xi_0)^{-1/4} \exp[i(\xi_{10} - \pi/12) - g(y)] [1 + \\ &+ f(y)] [1 + c_1 \xi_{10}^{-1} + O(k^{-3})] \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} -ik_x \operatorname{ch}[g(y)] [1 + (c_1 + d_1) \xi_{10}^{-1} + O(k^{-3})] [1 + f(y)], & y < 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$g(y) = yk + i\sigma(y), \quad \sigma(y) = -y^2 \cos \theta / 4 + O(y^3 k^{-1}) \\ 1 + f(y) = (\xi / \xi_0)^{-1/4} = 1 + iy \cos \theta (4k)^{-1} + \\ + 5y^2 \cos^2 \theta (32k^2)^{-1} + O(y^3 k^{-3})$$

Как следует из приведенных формул, подынтегральные выражения в интегралах  $I_1, I_2, I_3$  пропорциональны  $\exp(-2ky)$ , т. е. экспоненциально велики при  $k \gg 1$  в  $I_1, I_2$  и экспоненциально малы в  $I_3$ , что позволяет асимптотически вычислить указанные интегралы по методу Лапласа [8]. Величины  $I_4$  и  $I_5$  представляют собой интегралы вида

$$I_i = \int_{y_0}^0 \exp[-i\sigma(\eta)P_i(\eta)] d\eta, \quad i=4,5$$

где  $P_i(\eta)$  — полиномы по степеням  $k^{-1}$ , которые с точностью  $O(k^{-3})$  взаимно сокращаются. Проводя интегрирование в  $I_6, I_7, I_8, I_9$  явно, окончательно получим для  $\Gamma_y$  при  $k \gg 1$ :  $\Gamma_y = \Gamma_{ys} + O(k^{-3})$ , что эквивалентно условию сращения.

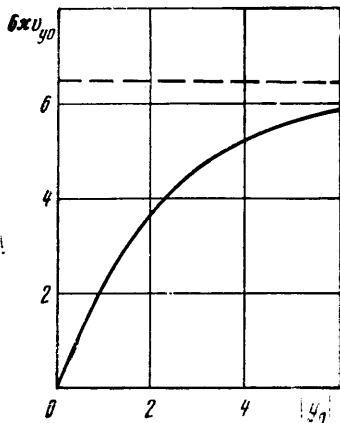
Действующая на частицу поперечная сила  $F_y$  определяется вторым членом в разложении внутреннего предела обратного преобразования Фурье скорости  $u_y$  по степеням  $r$

$$u_y|_{r \rightarrow 0} = \iint \Gamma_y(y, k_x, k_z) \exp[-i(k_x x + k_z z)] dk_x dk_z |_{x,y,z \rightarrow 0} = u_{ys} + v_{y0} + r v_{y1} + \dots \\ F_y = 6\pi \mu a u_\infty \operatorname{Re} \kappa^{1/2} v_{y0}(y_0), \quad v_{y0} = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Re}(\Gamma_y - \Gamma_{ys})|_{y=0} k d k d \theta \quad (3.4)$$

$$(\Gamma_y - \Gamma_{ys})|_{y=0} = [I_1(I_3 + I_5)(I_2 + I_3)^{-1} - I_4](2k)^{-1}$$

4. Вычисление интегралов  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  и интегралов (3.4), знание которых необходимо для определения поперечной силы  $F_y$ , проводилось численно.

Входящие в подынтегральные выражения (2.9), (2.10) функции Эйри и их производные вычислялись через их представления в виде рядов Тейлора [7] при значениях аргумента  $|\xi| \leq 5$ , а при  $|\xi| > 5$  — через асимптотические представления (3.2).



Указанные интегралы вычислялись по формуле Симпсона, относительная точность определения силы  $F_y$  при этом составляла  $\epsilon = 10^{-2}$ . Интегрирование по  $k$  в (3.4) проводилось последовательно по отрезкам  $[0,1], [1,2], [2,4], [4,8]$  и т. д. до значений  $k_0$ , при которых подынтегральное выражение может быть с требуемой точностью аппроксимировано степенной зависимостью  $A/k^2$ , где  $A = \text{const}$ . Вклад интервала  $[k_0, \infty)$  при этом считается равным величине  $A/k_0$ .

Результаты расчета величины  $6\pi\mu v_{y0}$ , характеризующий зависимость поперечной силы  $F_y$  от расстояния до стенки  $y_0$ , приведены на фигуре. Зависимость  $v_{y0}(|y_0|)$ , а следовательно, и сила  $F_y$ , как видно, монотонно возрастают с удалением от стенки от 0 до значения 6,46 [1, 2], соответствующего случаю неограниченного сдвигового потока.

В заключение автор выражает благодарность М. Н. Когану, Н. К. Макашеву и А. Ю. Борису за полезные обсуждения результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Saffman P. G.* The lift on a small sphere in a slow-shear flow // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 22. Pt 2. P. 385-400.
2. *Saffman P. G.* Corrigendum // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 31. Pt 3. P. 624.
3. *Singleton R. E.* The compressible gas-solid particle flow over a semi-infinite flat plate // *ZAMP.* 1965. V. 16. № 4. P. 421-449.
4. *Otterman B., Lee S.-L.* Particulate velocity and concentration profiles for laminar flow of a suspension over a flat plate // *Proc. of the 1970. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst. Stanford, Calif.* 1970. P. 311-322.
5. *Стулов В. П.* Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1979. № 1. С. 51-60.
6. *Осипцов А. Н.* О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1980. № 4. С. 48-54.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и матем. таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VII.1988