

УДК 532.526.2/4

ГУЛЯЕВ А. Н., КОЗЛОВ В. Е., КУЗНЕЦОВ В. Р.,
МИНЕЕВ Б. И., СЕКУНДОВ А. Н.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ВНЕШНЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование перехода в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой турбулентным потоком. Установлено, что в широком диапазоне условий течения (варьировались интенсивность и масштаб внешней турбулентности, угол атаки, форма передней кромки и т. д.) переход происходит без образования волн Толмина — Шлихтинга, а его начальные стадии, в том числе и усиление возмущений, описываются линеаризованными нестационарными трехмерными уравнениями пограничного слоя без градиента давления.

1. Переход в пограничном слое на пластине является классической задачей гидромеханики. Согласно наиболее распространенной точке зрения [1, 2], переход под действием малых возмущений протекает по крайней мере в два этапа. На первом внешние возмущения преобразуются в волну Толмина — Шлихтинга и в спектре пульсаций появляется дискретная частота. На втором этапе эта волна либо ослабевает, если число Рейнольдса меньше критического, либо усиливается — в противном случае. После того как ее амплитуда превысит пороговое значение (обычно порядка 1% скорости внешнего потока U_e), начинаются нелинейные процессы, приводящие к появлению турбулентности.

Такой тип перехода наблюдается лишь при уникально низком уровне внешней турбулентности (меньше 0,1%). При большей интенсивности турбулентности внешние проявления процесса перехода совершенно иные. Например, в [3—5] при экспериментальном исследовании взаимодействия внешней турбулентности с ламинарным пограничным слоем установлено, что в спектре пульсаций продольной компоненты скорости u_1 дискретные частоты не возникают, низкие частоты усиливаются, высокие ослабевают, а суммарная энергия пульсаций растет: максимальное значение $\sqrt{\langle u_1^2 \rangle}$ внутри пограничного слоя может достигать до 10—50 u_e [3—6] (u_e — пульсационная скорость во внешнем потоке).

Установлено также, что поперечное распределение $\langle u_1^2 \rangle$ имеет один максимум, который достигается при $\eta = x_2 \sqrt{U_e} / x_1 \nu \approx 2$, а поперечная скорость $\sqrt{\langle u_2^2 \rangle}$ имеет слабо выраженный минимум при $\eta \approx 5$ [4, 5]. Фазовая скорость возмущений составляет 0,5—0,6 U_e [4]. Измерения масштабов турбулентности [4] и визуализация течения [6] показывают, что внутри пограничного слоя возмущения существенно трехмерны и анизотропны (поперечные масштабы в десятки раз меньше продольных). Развитие возмущений описанного типа приводит при $u_e / U_e \leq 0,05$ к появлению высокочастотных турбулентных пятен с последующим образованием развитой турбулентности. При $u_e / U_e \geq 0,05$ переход осуществляется без четко выделяемых качественных особенностей.

Отсюда можно предположить, что в ламинарном пограничном слое имеется механизм усиления возмущений, не связанный с образованием волн Толмина — Шлихтинга. Цель данной работы заключается в экспе-

риментальном и теоретическом исследовании этого механизма. Представляется, что рассматриваемая проблема наиболее просто решается путем изучения первой стадии перехода, связанной с преобразованием внешних вихревых возмущений в ламинарном пограничном слое. Теоретические исследования этой стадии лишь начинаются и имеющиеся в литературе результаты касаются только взаимодействия акустических волн с локальными неоднородностями обтекаемой поверхности [7, 8].

2. Измерения проводились в аэродинамической трубе замкнутого типа сечением $0,3 \times 0,5 \text{ м}^2$ при скорости $U_e = 2-30 \text{ м/с}$. Использовались пластины длиной 20–40 см. Их поверхности были полированными или шероховатыми с различным рельефом. В частности, вырезались продольные канавки треугольного сечения или поперечные волны. Глубина канавок была либо постоянной (0,9 мм), либо увеличивалась вниз по потоку от 0,5 до 1,5 мм. Длина поперечной волны составляла 17 мм, амплитуда — 0,3 мм. Радиус кривизны передней кромки варьировался от 0,1 до 10 мм. Крепление пластин обеспечивало отсутствие вибраций.

В ресиверной части трубы на расстоянии 1,5 м от передней кромки пластины устанавливались решетки или сетки, создававшие турбулентность различной интенсивности и масштабом L_e ($u_e/U_e = 0,6-16\%$, $L_e = 20-75 \text{ мм}$, $Re = u_e L_e / \nu > 10^2$, где ν — вязкость). В области $k_1 L_e < 10 Re^{3/4}$ одномерный спектр E_1 пульсаций продольной скорости внешнего потока удовлетворительно аппроксимировался формулой

$$E_1(k_1) = \frac{1}{\pi} \frac{u_e^2 L_e}{1 + b(k_1 L_e)^{2/3}} \exp(-5,6 k_1 L_e Re^{-3/4}) \quad (2.1)$$

$$b = \frac{1,35}{1 + 35 Re^{-3/4}}, \quad \int_0^{\infty} E_1 dk_1 = \frac{u_e^2}{2}$$

где k_1 — волновое число колебаний в продольном направлении.

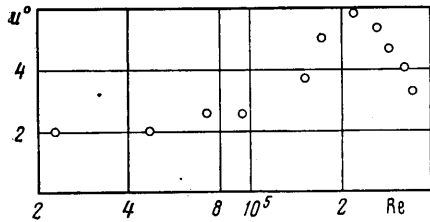
Колмогоровский масштаб для этого спектра с хорошей точностью равен $\eta_e = L_e Re^{-3/4}$. Турбулентность вне пограничного слоя была приблизительно изотропной: $u_e^2 = \langle u_1^2 \rangle = \langle u_2^2 \rangle$, а соотношение между спектрами продольной и поперечной скорости качественно соответствовало формуле $2E_2 = E_1 - k_1 dE_1/dk_1$.

Основным средством измерений служил термоанемометр с линейризатором фирмы DISA. Временные и пространственно-временные корреляции измерялись с помощью аппаратуры той же фирмы, а спектры — спектроанализатором СК 4-72. Обычно применялись стандартные одно- и двухниточные датчики с проволокой диаметром 5 мкм и длиной 1,2 мм; для улучшения локальности применялись также датчики длиной 0,7 мм. Отметим, что длина нитей была сопоставима с толщиной пограничного слоя. Поэтому измерения пульсаций поперечной скорости обладают большими погрешностями и приводимые ниже результаты измерений носят качественный характер.

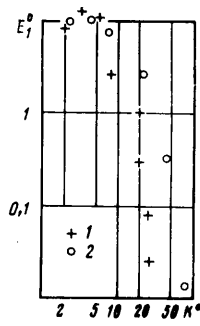
Для визуализации течения использовался лазерный нож (аргоновый лазер, мощность 2 Вт) и стробоскопирование. Светорассеивающие частицы либо вводились перед пластиной (табачный дым), либо образовывались при кратковременном пропускании тока через покрытую маслом проволоку диаметром 40 мкм, натянутую внутри пограничного слоя.

3. Хотя основное внимание в работе уделялось взаимодействию ламинарного пограничного слоя с внешней турбулентностью, ряд измерений был выполнен и на переходных стадиях течения. Цель этих измерений — убедиться в том, что исследуется тип перехода, не связанный с образованием волн Толмина — Шлихтинга. Число Рейнольдса перехода $Re_{tr} = U_e x_{tr} / \nu$ определялось тремя различными способами, которые основывались на следующих особенностях рассматриваемого типа перехода: 1) появлении с вероятностью более 0,1 «турбулентных пятен» (более высокочастотных участков в осциллограммах сигнала u_1); 2) появлении «выбросов» в сигналах специальных пристеночных датчиков, расположенных на расстоянии 15 мкм от поверхности пластины; 3) резком увеличении характерного волнового числа $k_* x_1$ до значений, превышающих 50–100, где k_* находилось из соотношения $E_\delta(k_*) = E_1(k_*)$ (E_1 — спектр, измеренный при $\eta = 1,6$, а E_δ — при $\eta \rightarrow \infty$). Применение всех трех способов позволяло определять Re_{tr} с точностью 20%.

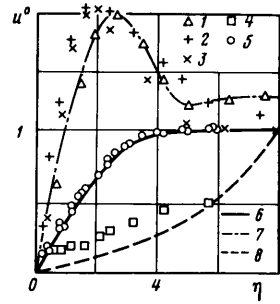
Измерения показали, что если угол натекания α разделительной линии



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

тока на переднюю кромку пластины таков, что $\text{tg } \alpha \ll (2-3)u_e/U_e$, то вблизи передней кромки практически при любом числе Re образуются отдельные турбулентные пятна с размерами на порядок меньше L_e . Это явление связано с пульсациями поперечной компоненты скорости, которые вызывают флуктуации мгновенного угла наклона разделительной линии тока и приводят к появлению локальных областей отрыва. В устойчивом пограничном слое по мере удаления от передней кромки эти пятна затухали. При повышении Re они, не успев затухнуть, попадали в неустойчивую часть пограничного слоя и приводили к переходу.

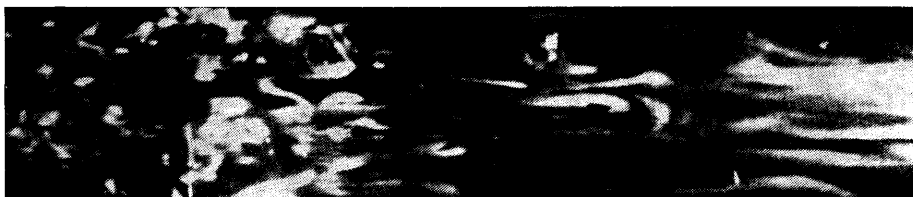
Поскольку основной интерес представляли явления, обусловленные локальным взаимодействием турбулентности с ламинарным пограничным слоем, то для исключения указанной особенности пластина либо устанавливалась под некоторым углом атаки, либо вблизи ее задней кромки укреплялся интерцептор. При этом всегда выполнялось условие $\text{tg } \alpha > 4u_e/U_e$, в результате чего обтекание передней кромки было безотрывным и, за исключением очень редких моментов времени, когда амплитуда поперечных пульсаций в 4 раза превосходила их дисперсию, датчики не фиксировали каких-либо аномалий. Тем самым исследования перехода проводились в условиях, существенно отличающихся от условий экспериментов [9], в которых переход был связан главным образом с особенностями обтекания передней кромки.

О характере перехода в этом случае дает представление фиг. 1, на которой приведены результаты измерений максимального уровня продольных пульсаций в зависимости от Re ($u_e/U_e=1,6\%$, $x_1/L_e=6$). По оси ординат отложена величина $u^0 = \sqrt{\langle u_1^2 \rangle} / u_e$. Видно, что при $\text{Re} < (6-8) \cdot 10^4$ усиление внешних пульсаций меняется слабо и близко к 2, а затем происходит его рост и усиление достигает 6 при $\text{Re}=2,5 \cdot 10^5$. С дальнейшим ростом Re коэффициент усиления уменьшается и лишь после этого при $\text{Re}=3,5 \cdot 10^5$ с вероятностью $\gamma \approx 0,05$ в сигнале термоанемометра появляются «турбулентные пятна». Измерения датчиком с двумя разнесенными по координате x_2 параллельными проволоками показывают, что в пятне меняется знак градиента скорости, т. е. $|\partial u_1 / \partial x_2|$ в отдельные моменты превышает $\partial U / \partial x_2$.

Во всех случаях до появления «турбулентных пятен» спектр и осциллограммы носят низкочастотный характер, никаких особенностей в осредненном поле течения по сравнению с устойчивым пограничным слоем не обнаруживается. В качестве примера на фиг. 2 приведены измерения отношения $E_1^0 = E_s / E_1$ спектральных плотностей продольных пульсаций при $\eta=1,6$ и ∞ . Точки соответствуют: 1 — данной работе ($u_e/U_e=7\%$, $R_1=400$, $x_1/L_e=5$), 2 — работе [4]. В последнем случае $u_e/U_e=3\%$; значение масштаба турбулентности не приведено и указано лишь значение числа $\text{Re}=1,1 \cdot 10^5$. Видно, что низкочастотная часть спектра ($k^0 = k_1 x_1 < 10-20$) усиливается и это усиление может быть весьма велико (до 10-50); высо-

кочастотные пульсации ($k, x_1 > 10-20$) ослабевают. Несложная оценка показывает, что в данном случае возрастает энергия только тех пульсаций, масштабы которых почти на порядок больше толщины вытеснения пограничного слоя.

Поперечные профили характеристик турбулентности приведены на фиг. 3. По оси ординат отложена безразмерная скорость u^* , которая соответствует измерениям или расчетам одной из следующих величин: U/U_e , $\sqrt{\langle u_1^2 \rangle}/u_e$, $\sqrt{\langle u_2^2 \rangle}/u_e$. Точки 3 приведены в [5], остальные — получены авторами. Они соответствуют: 1-3 — измерениям $\sqrt{\langle u_1^2 \rangle}/u_e$, 5 — U/U_e , 4 — $\sqrt{\langle u_2^2 \rangle}/u_e$. Опыты проведены в следующих режимах: 1, 4, 5 — $x_1/L_e = 5$, $u_e/U_e = 7\%$, $R_i = 400$; 2 — $x_1/L_e = 3,1$, $u_e/U_e = 2\%$, $R_i = 200$; 3 — $x_1/L_e = 3,6$, $u_e/U_e = 3,1$, $R_i = 460$ (так как в [5] значение L_e не указано, то x_1/L_e и R_i



Фиг. 4

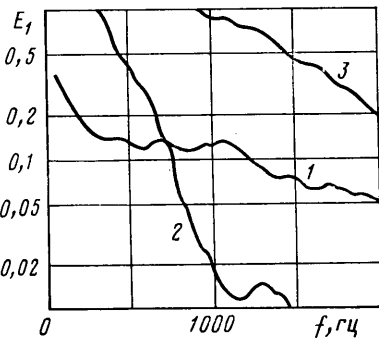
оценены по косвенным данным). Опыты, результаты которых показаны на фиг. 1, 3, проведены при интенсивностях турбулентности, различающихся почти в 5 раз. Тем не менее максимальные коэффициенты усиления на фиг. 1 при $R_i < (6-8) \cdot 10^4$ и на фиг. 3 одинаковы. Это означает, что начальные стадии перехода определяются линейными процессами. Несмотря на то что пульсации усиливаются, волны Толмина — Шлихтинга обнаружить не удастся (в этих волнах $\langle u_1^2 \rangle \sim \langle u_2^2 \rangle$, распределение $\langle u_1^2 \rangle$ обладает двумя экстремумами, а не одним, и т. д.).

Максимальный уровень пульсаций $\sqrt{\langle u_1^2 \rangle}/U_e$ на фиг. 3 достигает 13-14%, т. е. оказывается в 2-3 раза выше, чем в развитом турбулентном пограничном слое. Несмотря на это, профиль средней скорости близок к профилю Блазиуса (сплошная линия б), что не удивительно, так как поперечная компонента пульсационной скорости на порядок меньше продольной и, следовательно, напряжение Рейнольдса мало.

Измерения пространственных корреляций показали, что внутри пограничного слоя продольный интегральный масштаб сопоставим с L_e ($L_e = 2-7,5$ см). Масштабы, определенные путем раздвижения датчиков в поперечном и трансверсальном направлениях, на порядок меньше (1-2 мм), чем продольный. Качественный характер этих измерений подтверждается при визуализации течения в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. В качестве примера на фиг. 4 приведена фотография, полученная при визуализации течения в плоскости, параллельной пластине и отстоящей от нее на 1 мм (поток течет справа налево). Первоначально изотропные неоднородности перед пластиной при $x_1 \geq L_e$ превращаются в вытянутые тонкие продольные жгуты. Аналогичная картина наблюдалась и в [6].

Измерения пространственно-временных корреляций при $\eta = 1,6$ показали, что фазовая скорость возмущений составляет 0,7-0,8 U_e , т. е. несколько выше, чем в [4]. Столь высокое значение фазовой скорости наводит на мысль об определяющей роли процессов, происходящих во внешней части пограничного слоя. Сделанный вывод подтверждается измерениями спектра продольных пульсаций E_1 в пограничном слое на пласти-

не, покрытой продольными канавками глубиной 0,9 мм (фиг. 5). Единицы измерений по оси ординат произвольны. По оси абсцисс отложена частота f . Измерения проводились в точке, где $U=0,5U_e$ (кривая 2) при $u_e/U_e=1,5\%$, $x_1/L_e=5$, $Re_t=370$, $\alpha=5^\circ$. Кривая 1 соответствует измерениям вне пограничного слоя, а кривая 3 — измерениям внутри пограничного слоя на гладкой пластине (условия измерений те же, что и на пластине с продольными канавками). Все особенности преобразования турбулентности в пограничном слое сохраняются и в этом случае, т. е. пристеночные эффекты мало существенны. Эти факты косвенно указывают на то, что процессы усиления продольных пульсаций определяются критическим слоем, расположенным во внешней части ламинарного пограничного слоя. Однако это не означает, что микрорельеф поверхности не играет никакой роли: измерения показали, что нанесение канавок и волн на поверхности пластины при наличии угла атаки и продольного градиента давления приводило к заметному затягиванию перехода и увеличению Re_{tr} на 20–50%.



Фиг. 5

Аналогичные результаты получены при исследовании 20 других режимов обтекания пластины, которые различались числом Рейнольдса ($6 \cdot 10^3 < Re < 5 \cdot 10^5$), интенсивностью и масштабом турбулентности ($0,006 < u_e/U_e < 0,16$, $1 < x_1/L_e < 20$), формой передней кромки, безразмерным градиентом давления ($-0,1 < x_1 dp/dx_1 / \rho U_e^2 < 0$) и т. д. Во всех случаях волны Толмина — Шлихтинга заметить не удалось, продольные пульсации усиливались, это усиление было связано с низкочастотной частью спектра, а внутри пограничного слоя возмущения носили существенно трехмерный и сильно анизотропный характер.

4. Поскольку $L_e \gg \delta \sim x_1 / \sqrt{Re}$, то в рассматриваемом случае имеется два пограничных слоя. Первый является классическим (блазиусовским) пограничным слоем. В нем на расстоянии порядка δ меняется и средняя скорость и характеристики турбулентности. Во втором, имеющем толщину L_e , меняются только характеристики турбулентности. Процессы во втором пограничном слое описываются линеаризованными, нестационарными уравнениями Эйлера [10] (линейная теория хорошо согласуется с экспериментальными данными). Поэтому для полного решения задачи необходимо сплести асимптотическое решение в первом пограничном слое ($x_2/\delta \rightarrow \infty$) и решение во втором пограничном слое при $x_2/L_e \rightarrow 0$. Характеристики турбулентности во втором (невязком) пограничном слое достигают статистически стационарного состояния при $x_1 \gg L_e$ [10]. При построении решения эта область и будет представлять наибольший интерес, так как все закономерности, указанные в предыдущем разделе, получены как раз при $x_1 \gg L_e$.

В рассматриваемой области при $x_2=0$ в [10] получены следующие соотношения:

$$p = \text{const}, u_2 = 0$$

$$u_\alpha = \int \exp[ik_1(x_1 - U_e t) + ik_3 x_3] \left(dZ_\alpha + \frac{ik_\alpha}{\kappa} dZ_2 \right) \quad (4.1)$$

$$\alpha = 1, 3, \kappa^2 = k_1^2 + k_3^2$$

$$u_j = \int \exp[ik_1(x_1 - U_e t) + ik_2 x_2 + ik_3 x_3] dZ_j, \quad x_2 \rightarrow \infty$$

где k — волновой вектор, dZ — амплитуды Фурье поля пульсационной скорости в набегающем потоке. В изотропной турбулентности имеем [11]

$$\langle dZ_i(k) dZ_j^*(k') \rangle = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \delta(k - k') d^3 k d^3 k' \quad (4.2)$$

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dE_1}{dk} \quad (4.3)$$

где E – трехмерный спектр, E_1 – одномерный спектр.

Из (4.1) и (4.2) следует [10], что $\langle u_1^2 \rangle = \langle u_3^2 \rangle = u_e^2 \sqrt{2}$ при $x_2 = 0$, т. е. вязкая теория дает меньшее усиление пульсации, чем это наблюдается в опытах (фиг. 1, 3). Поэтому указанные выше закономерности определяются процессами, происходящими в первом (вязком) пограничном слое.

5. Для турбулентности характерен очень широкий спектр возмущений. При большой суммарной энергии турбулентности ее часть, приходящаяся на возмущения с наибольшими коэффициентами усиления, может оказаться относительно малой. Следовательно, при изучении рассматриваемого типа перехода область применимости линейной теории оказывается шире, чем при исследовании перехода, обусловленного искусственно возбуждаемыми моногармоническими колебаниями. Проведенные эксперименты подтверждают эту точку зрения. Поэтому далее используются линейризованные уравнения движения.

Почти во всех практически важных случаях выполняется условие $L_e \gg \delta$. Это еще не означает, что можно использовать приближение пограничного слоя. Указанная особенность снова обусловлена тем, что для турбулентности характерен широкий спектр колебаний, и поэтому приближение пограничного слоя справедливо только при выполнении гораздо более жесткого условия $\eta_e \gg \delta$. Далее будет предполагаться, что оно справедливо. Подчеркнем, что в связи с ростом δ условие $\eta_e \gg \delta$ не может выполняться достаточно далеко от передней кромки. Оценки показывают, что в условиях опытов, результаты которых приведены на фиг. 1, оно не выполняется в области, где коэффициент усиления максимален. Таким образом, используемое далее предположение о том, что трансформация возмущений описывается уравнениями пограничного слоя, дает некоторую промежуточную асимптотику.

Поскольку проведенные опыты указывают на значительную роль трехмерных эффектов, то необходимо решить трехмерные нестационарные уравнения пограничного слоя. Так как из (4.1) следует, что при $x_1 \gg L_e$ можно пренебречь градиентом давления, то эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + V \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + U \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + V \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad U = U_e F'(\eta), \quad V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_e}{x_1}} (\eta F' - F)$$

где F – решение уравнения Блазиуса.

Из (4.1) следует, что решение (5.1) представимо в виде

$$u_j = \int \exp[ik_1(x_1 - U_e t) + ik_3 x_3] dZ_j(\eta, x_1, k_3) \quad (5.2)$$

Уравнения для амплитуд dZ отличаются от уравнений (5.1) лишь заменой u на dZ , $\partial/\partial t$ на $-ik_1 U_e$, $\partial/\partial x_3$ на ik_3 . Таким образом, в них входят шесть величин: x_1 , x_2 , U_e , ν , k_1 , k_3 , из которых можно составить четыре критерия. Существенны только три, поскольку при преобразовании $u_2 \rightarrow \sqrt{\nu} u_2$, $x_2 \rightarrow \sqrt{\nu} u_2$ вязкость из уравнений исключается и поэтому число Рейнольдса входит только в блазиусовскую координату η . Следовательно, после перехода к безразмерным переменным $\eta = x_2 \sqrt{U_e/(\nu x_1)}$, $\tau = k_1 x_1$ получим систему уравнений, в которой фигурируют только производные по η и τ и в качестве параметра содержится k_3/k_1 .

Преобразование Сквайра здесь неприменимо из-за слагаемых, пропорциональных V . Тем не менее существует другое преобразование, сводящее решение задачи к интегрированию уравнений, не содержащих k_3/k_1 . Действительно, второе уравнение в (5.1) можно проинтегрировать независимо от других. Поскольку в него не входят производные по x_3 , то вычисление u_3 сводится к решению двумерного уравнения, не содержащего параметров. Далее, в уравнении неразрывности поперечную компоненту скорости удобно расщепить на сумму двух составляющих, т. е. $u_2 = u_{21} + u_{22}$, и потребовать, чтобы u_{21} удовлетворяло двумерному уравнению неразрывности. Здесь первые цифры в нижнем индексе указывают на принадлежность к u_2 , а вторые указывают номера слагаемых, на которые расщепляется u_2 . Тогда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.3)$$

Поскольку u_3 может быть найдено, то u_{22} легко вычисляется из (5.3). Расщепление u_2 в первом уравнении (5.1) приводит к соотношению

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + u_{21} \frac{\partial U}{\partial x_2} + V \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - u_{22} \frac{\partial U}{\partial x_2} \quad (5.4)$$

Это уравнение и первое соотношение в (5.3) отличаются от системы уравнений нестационарного двумерного пограничного слоя лишь наличием известного слагаемого $u_{22} \partial U / \partial x_2$, которое можно интерпретировать как силу, возникающую из-за трехмерных эффектов. Перейдем теперь к уравнениям для амплитуд dZ . Содержащиеся в u_{21} и u_{22} амплитуды обозначим через dZ_{21} и dZ_{22} соответственно. Из (5.2), (5.3) видно, что $dZ_{22} \sim k_3$. Таким образом, в уравнении для dZ_1 лишь одно слагаемое пропорционально k_3 , а остальные слагаемые от k_3 не зависят. Следовательно, если отвлечься от влияния граничных условий, решения анализируемой системы — линейные функции k_3 .

При формализации высказанных соображений в силу линейности уравнений искомые величины удобно представить как линейные комбинации вспомогательных функций, обозначенных далее символом v с различными индексами. Эти функции равны нулю или единице при $\eta = \infty$, удовлетворяют уравнениям пограничного слоя и условиям прилипания на стенке. Решение системы (5.3), (5.4) выразится через решения (они ниже обозначены v_{11} и v_{211}) однородных уравнений с граничными условиями, вытекающими из (4.1), и решения (они обозначены v_{12} и v_{212}) неоднородных уравнений с нулевыми граничными условиями при $\eta = \infty$. Таким образом, получим

$$dZ_1 = \left(dZ_1 + \frac{ik_1}{\kappa} dZ_2 \right) v_{11} + \frac{ik_3}{k_1} \left(dZ_3 + \frac{ik_3}{\kappa} dZ_3 \right) v_{12}$$

$$dZ_2 = \sqrt{\frac{vx_1}{U_e}} \left[k_1 \left(dZ_1 + \frac{ik_1}{\kappa} dZ_2 \right) v_{211} + ik_3 \left(dZ_3 + \frac{ik_3}{\kappa} dZ_2 \right) (v_{212} + v_{22}) \right] \quad (5.5)$$

$$dZ_3 = \left(dZ_3 + \frac{ik_3}{\kappa} dZ_2 \right) v_3$$

$$F' \frac{\partial v_3}{\partial \tau} - \frac{F}{2\tau} \frac{\partial v_3}{\partial \eta} + i(F' - 1)v_3 = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial v_{22}}{\partial \eta} + v_3 = 0$$

$$H(v_{11}) = F' \frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} - \frac{F}{2\tau} \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial \eta^2} - \frac{\eta F''}{2\tau} v_{11} + i(F' - 1)v_{11} = -F'' v_{211}$$

$$\begin{aligned}
 H(v_{12}) &= -F''(v_{212} + v_{22}) \\
 i v_{1n} + \frac{\partial v_{1n}}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2\tau} \frac{\partial v_{1n}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{21n}}{\partial \eta} &= 0, \quad n=1, 2 \\
 v_3 &= 1, \quad v_{11} = 1, \quad v_{12} = 0, \quad \eta = \infty \\
 v_{11} = v_{12} = v_{211} = v_{212} = v_{22} = v_3 &= 0, \quad \eta = 0
 \end{aligned}$$

Точка $\tau=0$ — особая, т. е. начальные условия не могут быть произвольны. В окрестности этой точки решения разлагаются в ряды вида

$$\begin{aligned}
 v_{12} &= w_{12}(\eta)\tau + \dots, \quad v_{211} = w_{211}(\eta)/\tau + \dots, \quad v_{212} = \\
 &= w_{212}(\eta) + \dots, \quad v_{11} = w_{11}(\eta) + \dots, \quad v_3 = w_3(\eta) + \dots
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из (5.5), (5.6) можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для коэффициентов в этих рядах w_{12}, w_{11}, \dots

6. После громоздких выкладок из (5.2) и первого соотношения в (5.5) получаем

$$\langle u_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(|v_{11}|^2 + \frac{k_3^2}{k_1^2} |v_{12}|^2 \right) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (6.1)$$

Переходя к полярным координатам $k_2 = r \cos \theta$, $k_3 = r \sin \theta$ и интегрируя по θ , из (6.1) найдем

$$\langle u_1^2 \rangle = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{E(\sqrt{r^2 + k_1^2})}{r^2 + k^2} r \left[|v_{11}|^2 + \frac{r^2}{2k_1^2} |v_{12}|^2 \right] dr dk_1$$

Используя (4.3) и интегрируя несколько раз по частям, получим

$$\langle u_1^2 \rangle = \int_0^{\infty} [I_0(k_1) |v_{11}|^2 + I_1(k_1) |v_{12}|^2] dk_1 \quad (6.2)$$

$$I_0 = 2E_1 - k_1 E_1', \quad I_1 = E_1 + \frac{4}{k_1^2} \int_{k_1}^{\infty} k_1 E_1 dk_1$$

Аналогичным образом имеем

$$\langle u_2^2 \rangle = \frac{\nu x_1}{U_e} \int_0^{\infty} [|v_{211}|^2 I_0 + (|v_{212}|^2 + |v_{22} + v_{212}|^2) I_1 k_1^2] dk_1$$

$$\langle u_3^2 \rangle = \int_0^{\infty} I_0 |v_3|^2 dk_1$$

В численных расчетах начальные условия находились из (5.6) и задавались при некотором малом $\tau=0,02$. Результаты расчетов $\langle u_1 \rangle^2$ и $\langle u_2 \rangle^2$ для одного из режимов показаны на фиг. 3 соответственно в виде штрихпунктирной линии 7 и штриховой линии 8. Теория хорошо описывает экспериментальные данные.

Если бы пульсации носили двумерный характер, то достаточно было найти v_{11} и под интегралом в аналоге формулы (6.2) отсутствовало бы второе слагаемое. Численное интегрирование показывает, что почти при всех τ с уменьшением η от ∞ до нуля функция $|v_{11}|$ монотонно уменьшается от единицы до нуля. Исключение составляет небольшой интервал значений $\tau \sim 1$, в котором $|v_{11}|$ как функция η имеет слабо выраженный мак-

симум, значение которого не превышает 1,2. Следовательно, механизм усиления связан с трехмерным характером пульсаций.

Из (6.2) видно, что второе слагаемое, возникающее из-за трехмерности турбулентности, пропорционально $1/k_1^2$. Поэтому сходимость интеграла (6.2) при $k_1 \rightarrow 0$ обеспечивается только тем, что, как следует из (5.6), $|v_{12}|^2 \sim \tau^2 \sim k_1^2$ при $k_1 \rightarrow 0$. С другой стороны, из (2.1) и (6.2) следует, что основной вклад в I_1 дают пульсации с $k_1 \sim 1/\eta_e$. Действительно, $E_1 \sim k_1^{-3/2}$ в инерционном интервале, т. е. сходимость интеграла I_1 при $k_1 \rightarrow \infty$ обеспечивается только резким уменьшением спектра в вязком интервале. Отсюда ясно, что основной вклад в усиление пульсации $\langle u_1^2 \rangle$ дают области спектра внешней турбулентности, соответствующие $k_1 \sim 0$ и $k_3 \sim 1/\eta_e$, т. е. усиливаются вихревые образования, вытянутые в продольном направлении и имеющие малые размеры в трансверсальном направлении, что полностью соответствует экспериментальным данным.

7. Проанализируем асимптотику решения (6.2) при $x_1 \rightarrow \infty$. Такой анализ имеет важное значение для решения проблемы перехода, так как асимптотика решений уравнений пограничного слоя при $x_1 \rightarrow \infty$ допускает сшивку с решениями уравнения Орра — Зоммерфельда в длинноволновом пределе ($k_1^2 + k_3^2 \rightarrow 0$) [12]. Следовательно, такая сшивка дает начальную амплитуду неустойчивых возмущений. Напомним, что построенные в [12] решения соответствуют волнам Толмина — Шлихтинга и в рассматриваемом пределе для этих решений критический слой расположен на стенке.

Решение (6.2) обладает совершенно иными свойствами, так как анализ численных расчетов показывает, что критический слой медленно удаляется от стенки с увеличением $\tau = k_1 x_1$. Этот процесс можно описать аналитически, если предположить, что критический слой расположен при $\eta = \eta_0$, а его толщина порядка $1/\eta_0$; $\eta_0 \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$; производные по τ в (5.5) не существенны.

Справедливость этих предположений удобно проверить, построив решения, но напомним, что из эксперимента (разд. 3) следует, что усиление возмущений определяется внешней частью пограничного слоя. Легко показать, что при $\eta \rightarrow \infty$ решение уравнения Блазиуса имеет вид

$$F' = 1 - \frac{A}{\eta - \eta_1} \exp \left[-\frac{(\eta - \eta_1)^2}{4} \right]$$

Константы A и η_1 можно найти из результатов численных расчетов ($A \approx 0,46$, $\eta_1 \approx 1,72$). Введем новую растянутую координату по формуле $\eta = \eta_0 + 2\xi/\eta_0$ и устремим η_0 к ∞ при $\xi \sim 1$. Тогда получим

$$F' = 1 - \frac{A}{\eta_0} \exp \left[-\frac{\eta_0}{4} - \xi \right]$$

Выбрав η_0 из условия $\eta_0^3 \exp(\eta_0^2/4) = 4A\tau$, приведем шестое и восьмое соотношения в (5.5) к следующему виду:

$$\frac{d^3 v_{211}}{d\xi^3} + \frac{d^2 v_{211}}{d\xi^2} + ie^{-\xi} \left(\frac{dv_{211}}{d\xi} + v_{211} \right) = 0 \quad (7.1)$$

Соотношения для остальных вспомогательных функций v преобразуются аналогично, т. е. получаем дифференциальные уравнения, не содержащие больших или малых параметров. Из (7.1) и аналогичных соотношений вытекает, что v_{11} , v_{12} и т. д. зависят только от ξ . Используя связь между η_0 и τ , получим

$$F' \frac{\partial v_{211}}{\partial \tau} \tau \left(\frac{\partial^2 v_{211}}{\partial \eta^2} \right)^{-1} \sim \frac{1}{\ln \tau} \ll 1$$

т. е. действительно производные по τ малы по сравнению с вязкими членами. Так как при сделанном преобразовании все остальные слагаемые удерживаются, то принятые предположения корректны.

Несложное исследование показывает, что ограниченное решение уравнения (7.1) выражается через функции Бесселя от переменной $2\sqrt{-i} \exp(-\xi/2)$ и быстро стремится к нулю по мере приближения к стенке. Аналогичными свойствами обладают и все остальные вспомогательные функции v , т. е. по мере удаления от пе-

редней кромки турбулентность вытесняется из пограничного слоя. Этот процесс происходит, однако, очень медленно ($\eta_0 = 2\sqrt{\ln \tau}$ при $\tau \rightarrow \infty$).

Таким образом, построенные решения и решения, полученные в [12], т. е. волны Толмина — Шлихтинга, не имеют ничего общего. Следовательно, еще раз приходим к важному выводу о том, что усиление возмущений возможно и без образования волн Толмина — Шлихтинга. Более того, соотношение (7.1) не есть длинноволновый предел уравнения Орра — Зоммерфельда, решением которого являются эти волны. Действительно, если учесть, что в этом пределе уравнение Орра — Зоммерфельда можно один раз проинтегрировать, а константа интегрирования пропорциональна градиенту давления и в данном случае равна нулю, то после преобразований, аналогичных тем, которые приводят к соотношению (7.1), получим уравнение, которое отличается от (7.1) отсутствием слагаемого $d^2 v_{211}/d\xi^2$. Это слагаемое получается при преобразовании оператора $1/2 \eta \tau^{-1} F' \partial/\partial \eta$ и описывает эффекты, обусловленные расширением пограничного слоя. Следует отметить, что учет этих эффектов влияет лишь на количественные результаты и главный вывод о возможности усиления продольных пульсаций без образования волн Толмина — Шлихтинга остается неизменным.

Продолжая анализ асимптотического поведения решений, напомним, что в (6.2) основную роль играет второе слагаемое и главный вклад в величину I_1 дают значения $k_1 \sim 1/\eta_e$. Поскольку $E_1 \sim k_1^{-5/3}$, то интеграл в I_1 сходится при $k_1 \rightarrow 0$. По этой причине величина I_1 практически постоянна при $k_1 \lesssim 1/\eta_e$. Следовательно,

$$\langle u_1^2 \rangle = 4 \int_0^{\infty} k_1^{-2} |v_{12}|^2 dk_1 \int_0^{\infty} k_1 E_1 dk_1$$

Используя (2.1), найдем

$$\frac{\sqrt{\langle u_1^2 \rangle}}{u_e} \sim R_i^{1/3} \sqrt{\frac{x_1}{L_e}}, \quad a = \int_0^{\infty} \tau^{-2} |v_{12}|^2 d\tau \quad (7.2)$$

Нелинейные процессы существенны вне пограничного слоя и при изменении u_e приводят к перестройке колмогоровского спектра (2.1). Поэтому нет ничего удивительного, что коэффициент усиления (7.2), найденный из линейной теории, нелинейно зависит от u_e ($R_i \sim u_e$). Этот вывод следует учитывать при интерпретации экспериментальных данных, поскольку с феноменологической точки зрения переход может выглядеть как нелинейный процесс, даже если механизм преобразования возмущений в пограничном слое носит линейный характер. Отсюда также ясно, что помимо естественным образом возникающих критериев x_1/L_e и $Re = U_e x_1/\nu$ процесс перехода существенно зависит и от критерия R_i (или эквивалентного ему критерия δ/η_e).

Сравнение формулы (7.2) с данными, приведенными на фиг. 1, показывает, что развитая теория не решает всех проблем и пригодна только для описания самых начальных стадий перехода. Действительно, из фиг. 1 видно, что при относительно невысоких числах Рейнольдса ($Re < (6-8) \cdot 10^4$) коэффициент усиления практически постояен. Лишь в этой области справедлива формула (7.2), из которой ввиду того, что Re пропорционально R_i при $x_1/L_e = \text{const}$ и $u_e/U_e = \text{const}$, также вытекает, что коэффициент усиления слабо зависит от Re . С дальнейшим ростом условие применимости теории ($\delta \ll \eta_e$) нарушается, так как $\delta \sim Re^{-1/2}$, $\eta_e \sim R_i^{-3/4} \sim Re^{-3/4}$, т. е. $\delta/\eta_e \rightarrow \infty$ при $Re \rightarrow \infty$. По тем же причинам развитая теория не справедлива и при очень больших значениях x_1/L_e .

Из формулы (7.2) видно, что в пограничном слое имеется механизм усиления возмущений, сходный с механизмом усиления в потоке с однородным сдвигом, в котором из линеаризованных уравнений Эйлера вытекает, что энергия турбулентности неограниченно растет по степенному закону [13], т. е. качественно так же, как это предсказывает формула

(7.2). Этот механизм не описывается уравнением Орра — Зоммерфельда, так как в неограниченном потоке с однородным сдвигом ($U = \text{const } x_2$) уравнение Орра — Зоммерфельда не имеет ограниченных решений.

8. Экспериментально и теоретически выявлен механизм усиления внешних вихревых возмущений в устойчивом ламинарном пограничном слое, который сходен с механизмами деформационного типа [11, 13] и не связан с собственными колебаниями в пограничном слое, т. е. с волнами Толмина — Шлихтинга [1, 2]. Усиление определяется по крайней мере двумя параметрами: x_1/L_e и R_i , и может достигать нескольких единиц и даже десятков. При конечном уровне внешней турбулентности это усиление может оказаться достаточным для того, чтобы внутри пограничного слоя уровень пульсаций превысил 5–10% и начались нелинейные процессы, характерные для развитой турбулентности. В то же время параметры типичной для практики турбулентности таковы, что $L_e \gg \delta$, а R_i не слишком велико. В этом случае энергия в спектре пульсаций, «приходящаяся» на частоты волн Толмина — Шлихтинга, мала и при сравнительно малых инкрементах нарастания ($\alpha c_i \delta / U_e \leq 0,01$) последние не успевают развиться до заметных амплитуд. Все это подтверждает высказанное в [3] предположение о возможности перехода к турбулентности, минуя стадию волн Толмина — Шлихтинга.

Теоретический анализ показывает также, что начальные стадии перехода описываются линеаризованными уравнениями пограничного слоя и необходимыми условиями усиления является трехмерность пульсаций.

Авторы выражают признательность Н. Ф. Полякову, В. С. Косорыгину и О. С. Рыжову за полезное обсуждение результатов работы, Н. Н. Бычкову и О. Н. Константиновскому за помощь при проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 152 с.
2. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности: Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 278 с.
3. Поляков Н. Ф. Ламинарный пограничный слой в условиях «естественного» перехода к турбулентному течению // Развитие возмущений в пограничном слое / Под ред. Левченко В. Я. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979. С. 23–67.
4. Косорыгин В. С., Поляков Н. Ф., Супрун Т. Т., Эпик Э. Я. Влияние турбулентности потока на структуру возмущений в ламинарном пограничном слое // Пристенные турбулентные течения / Под ред. Кутателадзе С. С. Новосибирск, 1984. С. 79–84.
5. Косорыгин В. С., Поляков Н. Ф., Супрун Т. Т., Эпик Э. Я. Развитие возмущений в ламинарном пограничном слое пластины при повышенной турбулентности внешнего потока // Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 85–92.
6. Kendall J. M. Experimental study of disturbances produced in a pre-transitional laminar boundary layer by weak free-stream turbulence // AIAA Pap. 1985. № 1695. 10 p.
7. Айзин Л. В., Поляков Н. Ф. Генерация волны Толмина — Шлихтинга звуком на отдельной неровности поверхности, обтекаемой потоком: Препринт № 17. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979. 21 с.
8. Рубан А. И. О генерации волн Толмина — Шлихтинга звуком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 44–52.
9. Грек Г. Р., Козлов В. В., Рамазанов М. П. Ламинарно-турбулентный переход при повышенной степени турбулентности набегающего потока: Препринт № 8. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987. 40 с.
10. Hunt J. C. R., Graham J. M. R. Free-stream turbulence near plane boundaries // J. Fluid Mech. 1978. V. 84. Pt 2. P. 209–235.
11. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 198 с.
12. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
13. Сабельников В. А. Некоторые линейные задачи деформации однородной турбулентности // Тр. ЦАГИ, 1975. Вып. 1702. 40 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.X.1988