

УДК 532.517.4 : 536.25

АРИСТОВ С. Н., ФРИК П. Г.

**КРУПНОМАСШТАБНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В КОНВЕКЦИИ
РЭЛЕЯ — БЕНАРА**

Рассматривается конвекция Рэлея — Бенара в плоском слое с плохо проводящими границами. Для описания крупномасштабных течений, характерные размеры которых существенно превосходят толщину слоя, получены двумерные уравнения, являющиеся асимптотически точными для малых надкритичностей. Увеличение размеров слоя в плане и рост надкритичности приводят к сложным турбулентным движениям жидкости, которые исследуются сеточными методами и с помощью иерархической модели турбулентности. Показано, что кинетическая энергия накапливается в вихрях наибольшего размера, а спектр пульсаций температуры имеет максимум на промежуточных масштабах.

В тонких слоях жидкости неоднородный горизонтальный нагрев приводит к возникновению почти горизонтальных течений, для которых в [1] была предложена двумерная модель, описывающая динамику вихрей, удовлетворяющих условию крупномасштабности ($h/l = \delta \ll 1$, где h — толщина слоя, l — горизонтальный масштаб движения). В [2] рассматривалась крупномасштабная адвекция во вращающихся слоях жидкости и описывалась эволюция крупномасштабных неизотермических турбулентных движений, качественно соответствующая процессам в атмосфере Земли на средних широтах. По мере приближения к экваториальной зоне планет и звезд роль горизонтальных неоднородностей нагрева и сил Кориолиса снижается, а формирование течений микромасштаба происходит под действием интенсивной конвекции.

При плохой теплоотдаче горизонтальных границ волновое число возникающих надкритических движений при подогреве снизу близко к нулю [3], т. е. возникающие конвективные структуры удовлетворяют условию $\delta \ll 1$. Это позволяет исследовать надкритические движения в рамках «теории мелкой воды» [4]. В данной работе двумерные уравнения трехмерной конвекции получены с использованием техники, описанной в [1, 2], что в отличие от [4] позволяет учесть влияние вертикальной завихренности на динамику бенаровских ячеек. В [5] для случая теплопроводных границ было показано, что учет дрейфа ячеек приводит к зарождению слабой турбулентности. Приводимые ниже двумерные уравнения описывают эволюцию средней по толщине слоя температуры и завихренности в плоском горизонтальном слое с плохо проводящими границами при однородном подогреве снизу. Основное принятое допущение состоит в пренебрежении влиянием мелкомасштабных мод на динамику крупномасштабных процессов.

Рассмотрим слой жидкости Буссинеска толщиной $2h$ между плоскостями $z = \pm h$. Ускорение свободного падения перпендикулярно границам. Масштаб скорости v равен χh^{-1} , давления $P - \rho_0 v \chi h^{-2}$, времени $t - h^2 \chi^{-1}$, длины — h , температуры — Ah , где A — вертикальный градиент. Задавая температуру жидкости в виде $T^* = T_0 - Az + \Theta$, где T_0 — средняя температура, соответствующая плотности ρ_0 , получим безразмерные уравнения движения

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] &= -\nabla P + R \Theta \mathbf{n} + (\Delta + \partial_z^2) \mathbf{v} \\ \partial_t \Theta + \mathbf{v} \nabla \Theta &= \mathbf{v} \mathbf{n} + (\Delta + \partial_z^2) \Theta \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\sigma = \nu\chi^{-1}$ — число Прандтля, $R = g\alpha Ah^3\nu^{-1}\chi^{-1}$ — число Рэлея, ν , χ , α — коэффициенты вязкости, температуропроводности и теплового расширения. Граничные условия задаются в виде

$$z = \pm 1: v_z = 0, \partial_z v_{x,y} = 0, \partial_z \Theta = \mp \gamma \Theta \quad (2)$$

где γ — постоянная теплоотдачи.

Для получения двумерной модели неизвестные поля \mathbf{v} , P , Θ представляются в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \nabla \Psi + \mathbf{u}, P = \langle P \rangle + p, \Theta = T + \theta \quad (3)$$

Вектор \mathbf{u} имеет компоненты u , v , w вдоль осей x , y , z соответственно, $\mathbf{n} \times \nabla \Psi = \langle \mathbf{v} \rangle$, $T = \langle \Theta \rangle$, угловые скобки обозначают усреднение поперек слоя. Бездивергентность средней горизонтальной скорости следует из (1) и граничных условий (2). Подставляя (3) в (1), интегрируя поперек слоя и исключая давление, получаем

$$\partial_t \Delta \Psi + \{ \Psi, \Delta \Psi \} = \sigma \Delta^2 \Psi + F \quad (4)$$

$$\partial_t T + \{ \Psi, T \} = \Delta T + \Phi$$

где $\{ \Psi, T \} = \partial_x \Psi \partial_y T - \partial_x T \partial_y \Psi$ — скобки Пуассона, F , Φ — функционалы вида

$$F = \partial_{xy}^2 \langle uu - vv \rangle + (\partial_y^2 - \partial_x^2) \langle uv \rangle$$

$$\Phi = \langle \partial_z^2 \Theta \rangle + \langle w \rangle - \partial_x \langle u \theta \rangle - \partial_y \langle v \theta \rangle$$

Для определения полей \mathbf{u} , θ (3) подставляется в (1) и с учетом уравнения неразрывности получается система

$$\begin{aligned} \partial_z (\Delta + \partial_z^2) u &= R \partial_x (T + \theta) + \sigma^{-1} [\partial_z d_t u - \partial_x d_t w - \partial_z u \partial_{xy}^2 \Psi - \partial_z v \partial_{yy}^2 \Psi] \\ \partial_z (\Delta + \partial_z^2) v &= R \partial_y (T + \theta) + \sigma^{-1} [\partial_z d_t v - \partial_y d_t w + \partial_z u \partial_{xx}^2 \Psi + \partial_z v \partial_{xy}^2 \Psi] \\ (\Delta + \partial_z^2)^2 w &= -R \Delta (T + \theta) + \sigma^{-1} [\Delta d_t w - \partial_{xz}^2 d_t u - \partial_{yz}^2 d_t v + \\ &\quad + \{ \partial_x \Psi, \partial_z u \} + \{ \partial_y \Psi, \partial_z v \}] \\ (\Delta + \partial_z^2) \theta &= -w - \Delta T + d_t (T + \theta) \end{aligned} \quad (5)$$

где $d_t = \partial_t + \mathbf{u} \nabla + \{ \Psi, \dots \}$ — полная производная по времени.

Система уравнений (5) тождественна (1) и имеет точное решение $\mathbf{u}(z)$, $\theta(z)$, если Ψ , T — линейные функции координат x , y [6]. Вертикальная скорость в этом случае равна нулю, а горизонтальный масштаб l — бесконечности. Для плохо проводящих границ ($\gamma \ll 1$) вертикальная структура потока совпадает со структурой критической волновой моды [4]. Рассматривая решения системы (5), параметрически зависящие от полей Ψ , T , будем искать их в виде рядов по малому параметру

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \theta_n, \quad \mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{u}_n \quad (6)$$

Подстановка (6) в (2) с учетом плохой теплопроводности границ ($\gamma = O(\delta^2)$) дает следующие граничные условия:

$$z = \pm 1: w_n = \partial_z u_n = \partial_z v_n = \partial_z \theta_n = 0$$

Ограничиваясь изучением крупномасштабных полей ($\delta \ll 1$), перейдем к переменным

$$\begin{aligned} (x', y') &= \delta(x, y), \quad z' = z, \quad t' = \delta^2 t \\ \Psi' &= \Psi, \quad T' = \delta T \end{aligned} \quad (7)$$

и штрихи в дальнейшем опустим. Выбор масштабов проведем таким образом, чтобы в уравнениях (4) все члены имели один порядок малости по δ , а нулевые члены разложения (6) совпадали с точным решением нелинейной задачи (5) [6]. Подставляя (6), (7) в (5) и приравнивая члены одного порядка малости, в нулевом приближении получим

$$u_0 = R \nabla T f'', \quad \theta_0 = -R \nabla T^2 f', \quad f = (z^3 - 15z^4 + 75z^2 - 64)/6! \quad (8)$$

Штрихи обозначают дифференцирование по z .

Для определения вертикальной скорости w линеаризуем третье уравнение системы (5), опустив слагаемое в квадратных скобках, а также θ , так как из (8) следует, что уже в нулевом приближении θ_0 квадратично по T . Из оставшегося уравнения с учетом (6) с точностью до $O(\delta^4)$ получим

$$w = -R \Delta T \delta f'' + 2R \Delta^2 T \delta^3 f \quad (9)$$

После подстановки выражений (8), (9) в функционалы F , Φ с учетом граничных условий из (4) получается замкнутая система уравнений для функции тока Ψ и температуры T

$$\partial_t \Delta \Psi + \{\Psi, \Delta \Psi\} = \sigma \Delta^2 \Psi + m^2 \{T, \Delta T\} \quad (10)$$

$$\partial_t T + \{\Psi, T\} = \nabla \kappa \nabla T - q T \quad (11)$$

$$\kappa = -\varepsilon - r \Delta + \mu \nabla T^2, \quad \varepsilon = (R - R_c) R_c^{-1}$$

$$R_c = \langle f'' \rangle^{-1}, \quad r = -2\delta^2 R \langle f \rangle, \quad q = \gamma \delta^{-2}$$

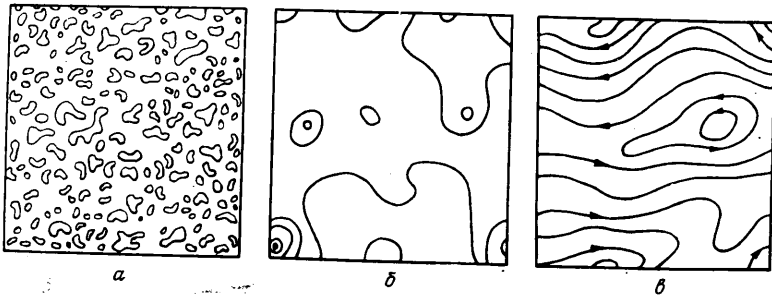
$$\mu = -R^2 \langle f' f'' \rangle, \quad m^2 = R^2 \delta^{-2} \langle f'' f'' \rangle$$

В слабонадкритической области при $R \rightarrow R_c$, когда дрейф ячеек можно не учитывать ($\Psi = 0$), уравнение (11) с точностью до коэффициентов r , μ , q переходит в рассмотренное в [4, 7]. Уравнение (10) аналогично уравнению для вертикальной компоненты завихренности, полученному в [9] для случая теплопроводных границ. Отличие состоит в том, что в (10) присутствует нелинейное слагаемое $\{\Psi, \Delta \Psi\}$. В [5] на основе численного счета показано, что при $\delta \ll 1$ возникающий дрейф конвективных ячеек порождает слабую турбулентность.

Прежде чем перейти к анализу свойств турбулентных течений в рамках уравнений (10), (11), обратим внимание на следующую аналогию. Если в (11) опустить члены в правой части и положить $m=1$, то система уравнений (10), (11) становится тождественной уравнениям двумерной магнитной гидродинамики, что, в частности, приводит к сохранению в бездиссипативном пределе ($\sigma = q = \varepsilon = r = \mu = 0$) суммы кинетической энергии дрейфа ячеек $E_v = \frac{1}{2} \langle \nabla \Psi^2 \rangle$ и квадрата градиента температуры $E_\sigma = \frac{1}{2} \langle \nabla T^2 \rangle$. Угловые скобки обозначают усреднение по области Ω , в которой наблюдается конвекция.

Предварительное исследование уравнений (10), (11) проводилось методом сеток в квадратной области 40×40 с периодическими граничными условиями и начальным распределением температуры в виде случайного шума с максимальной амплитудой 0,1. Функция тока в начальный момент времени полагалась равной нулю. Аналогично [5] в системе развиваются вихревые движения, которые с ростом надкритичности приводят к квазидвумерной турбулентности. На фиг. 1 приведены результаты счета для случая $\sigma = 10^2$, $\delta = 10^{-1}$, $\varepsilon = 0,3$, $r = 0$, $q = 3 \cdot 10^2$: a — изолинии начального распределения температуры в плоскости слоя, b — изотермы в момент времени $t = 8,1 \cdot 10^{-3}$, c — изолинии функции тока в тот же момент времени.

Первоначально возникающие вихри имеют характерный масштаб порядка масштаба начального поля температуры (фиг. 1, a). В процессе эволюции они укрупняются — имеет место характерный для двумерных турбулентных течений обратный каскад энергии, и в системе доминируют



Фиг. 1

нестационарные крупномасштабные вихревые течения. Наблюдающаяся на фиг. 1, в анизотропия движения не постоянна — она появляется, исчезает, меняет направление. Масштабы температурного поля остаются на протяжении всего счета существенно меньшими масштабов поля завихренности. Значительные градиенты температуры локализованы в небольших областях, за пределами которых температура меняется плавно. В отличие от случая границ с хорошей теплопроводностью [5] тепловые возмущения не образуют неподвижную систему ячеек, а случайным образом перемещаются в плоскости слоя.

В сеточном счете пространственное разрешение было не велико и на рассматриваемых масштабах влияние опущенного члена $r\Delta^2 T$ не было определяющим. С ростом отношения размеров области к толщине слоя расширяется диапазон возбуждаемых масштабов. Движение в плоскости слоя становится турбулентным, а вид пространственных спектров пульсаций скорости и температуры зависит от всех членов уравнений (10), (11).

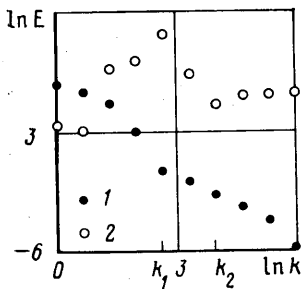
Анализ спектральных свойств турбулентных течений, описываемых системой (10), (11), проведен на основе каскадных уравнений, полученных в рамках иерархической модели двумерной турбулентности. Принципы построения иерархических моделей и основные результаты их использования при рассмотрении различных турбулентных потоков изложены в [9]. Для исследования спектральных характеристик крупномасштабных турбулентных течений в тонких слоях жидкости модель использовалась в [1, 2, 10].

Эффективность иерархических моделей при анализе спектральных свойств сложных турбулентных течений достигается путем перехода к коллективным переменным, характеризующим амплитуду пульсаций гидродинамических полей в пределах октавы волновых чисел. Иначе говоря, проводится пространственная фильтрация полей скорости и температуры такая, что энергия E_v и E_u распадается на суммы

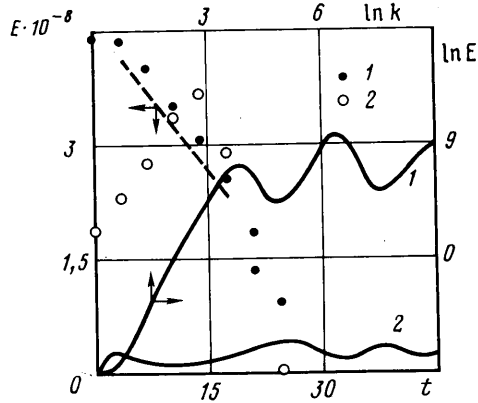
$$E_v = \sum_i E_{v_i}, \quad E_u = \sum_i E_{u_i}$$

где каждое i -е слагаемое включает энергию пульсаций, волновые числа которых сосредоточены в области $\pi 2^i \leq |k| \leq \pi 2^{i+1}$. С этой целью исследуемые поля проектируются на функциональный базис, описывающий совокупность вихрей прогрессивно уменьшающегося масштаба, причем фурье-образы вихрей данного размера (i -го яруса) сосредоточены в соответствующей зоне k -пространства. Амплитуды пульсаций вихрей каждого яруса характеризуются коллективными переменными: A_i — для поля скорости и C_i — для поля температуры, причем $E_{v_i} = A_i^2$, $E_{u_i} = m^2 C_i^2$. Уравнениям (10), (11) соответствует следующая система для величин A_i и C_i

$$A_i = \sum_{j,k} T_{ijk} (A_j A_k - m^2 C_j C_k) + \sigma K_i A_i$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$C_i = \sum_{j,k} M_{ijk} A_j C_k - (\varepsilon K_i + r K_i^2 + q) C_i + \mu \sum_{j,k,l} G_{ijkl} C_j C_k C_l \quad (12)$$

$$K_i = -21,3 \cdot 2^{2i}, \quad (T_{ijk}, M_{ijk}) = 2^i (T_{0, j-i, k-i}, M_{0, j-i, k-i})$$

$$G_{ijkl} = 2^i G_{0, j-i, k-i, l-i}$$

а процедура вычисления матриц нелинейных взаимодействий изложена в [9].

Распределение энергии по спектру зависит от значений величин σ , δ , ε , q . Параметр δ для определенности выбран равным 0,005. При моделировании эволюции спектральных распределений в качестве начальных условий задавался случайный набор амплитуд пульсаций температуры C_i и нулевое поле скорости ($A_i=0$).

Фигура 2 иллюстрирует ситуацию, рассмотренную в сеточном эксперименте (фиг. 1), где полагалось $r=0$. Здесь приведены спектры пульсаций скорости $E_V - 1$ и градиента температуры $E_V - 2$ для момента времени $t=5 \cdot 10^{-3}$. Как и в сеточном счете, $\varepsilon=0,3$; $\sigma=100$. Спектр величины E_V имеет резкий пик при $k=k_1$. В спектре кинетической энергии к этому моменту времени максимум энергии приходится уже на крупномасштабное движение. Отсутствие члена $r\Delta^2 T$ приводит к усилению мелкомасштабной части спектра пульсаций градиента температуры (для $k > k_2$). В сеточном счете используемая сетка разрешает масштабы с $k \leq k_2$, что оправдывает принятое допущение $r=0$.

Характер эволюции суммарной кинетической энергии E_V и энергии пульсаций температуры E_V , а также пространственные спектры турбулентного движения с учетом всех членов, входящих в уравнения (10), (11) и соответственно в (12), иллюстрируются на фиг. 3. Рассматривается случай: $\sigma=1$, $\varepsilon=16$, $q=3 \cdot 10^4$. Приведена зависимость от времени величин $E_V - 1$ и $E_V - 2$ (сплошные линии) и пространственные спектры (точки 1 и 2 соответственно), усредненные на отрезке времени $t=20-40$. Пик в спектре E_V становится еще более острым (в сравнении с фиг. 2 изменен масштаб по оси координат). Его положение зависит в основном от соотношения величин ε и δ : $k_1 \sim \sqrt{\varepsilon/R\delta^2}$, и в меньшей степени от q . Величина пика $E_{V\max}$ оценивается как $\varepsilon\delta^{-2}$, что подтверждается результатами расчетов для различных соотношений параметров уравнений (12).

Развитие спектров во времени происходит следующим образом. Спектр E_V принимает вид, близкий к приведенному на фиг. 3, уже к моменту времени $t \sim 1$. Спектр кинетической энергии начинает развиваться на пространственных частотах порядка k_1 и эволюционирует далее характерным для двумерной турбулентности образом — основная энергия передается к крупномасштабному движению (в низкочастотной части спектра).

ра появляется участок $E_v \sim k^{-5/3}$, а поток энтрофии направлен в основном в мелкомасштабное движение. В спектре для $k > k_1$ устанавливается распределение, близкое к закону $E_v \sim k^{-3}$. По мере накопления энергии в низших ярусах системы спектр становится более однородным с распределением вида $E_v \sim k^{-\lambda}$, где $3 < \lambda < 4$. Так, на фиг. 3 спектр близок к $E_v \sim k^{-4}$, которому на рисунке соответствует штриховая линия. В других случаях распределение получалось ближе к $E_v \sim k^{-3}$.

Подавление низкочастотной части спектра величины E_v связано с относительно большим значением параметра q . При уменьшении теплотдачи границ ($q \rightarrow 0$) усиливается крупномасштабная структура по я температур. Расчеты, проведенные для случая $\varepsilon=4$, $q=0$, $\sigma=1$, показали, что в спектре E_v снова появляется максимум, но с течением времени в низкочастотной части устанавливается распределение, близкое к независимому от k ($E_v = \text{const}$).

Следует подчеркнуть, что факт появления в слое на фоне конвекции Рэлея — Бенара крупномасштабной турбулентности, спектр кинетической энергии которой развивается по сценарию, характерному для обычной двумерной изотермической турбулентности, не тривиален. Достаточно вспомнить, что рассматривавшаяся в [2] крупномасштабная турбулентность, вызываемая горизонтально-неоднородным нагревом вращающегося слоя жидкости, допускает усиления энергии турбулентного движения исключительно за счет мелкомасштабных вихрей.

В заключение отметим, что излагаемый подход может быть распространен на случай твердых и вращающихся границ. Кроме того, аналогичным образом можно исследовать конвективные течения, возникающие в слое жидкости при горизонтально-неоднородном нагреве нижней границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт № 99, Свердловск: Ин-т механики сплошных сред УрО АН СССР, 1987. 48 с.
2. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 48–55.
3. Busse F. H., Riahi N. Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. № 2. P. 243–256.
4. Proctor M. R. E. Planform selection by finite-amplitude thermal convection between poorly conducting slabs // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 469–485.
5. Manneville P. Towards an understanding of weak turbulence close to the convection threshold in large aspect ratio systems // J. Phys. Lett. 1983. V. 44. № 22. P. 903–916.
6. Бирюх Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
7. Непомнящий А. А. О вторичных пространственно-периодических движениях в неограниченном пространстве // Уч. зап. Перм. гос. пед. ин-та. Пермь, 1976. № 152. С. 77–86.
8. Manneville P. A two-dimensional model for three-dimensional convective patterns in wide containers // J. Physique. 1983. V. 44. № 7. P. 759–765.
9. Зимин В. Д., Фрик П. Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 188 с.
10. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Адвективные течения в плоском вращающемся слое проводящей жидкости // Магнитная гидродинамика. 1988. № 1. С. 13–20.

Пермь

Поступила в редакцию
10.V.1988