МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1989

УДК 532.517.2 : 517.956.4

ЗАЙЦЕВ В. Ф., ПОЛЯНИН А. Д.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СТЕПЕННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Получены точные аналитические решения уравнений гидродинамического пограничного слоя для продольного обтекания плоской пластины псевдопластичными жидкостями с показателями степени $n={}^1/_5,\ {}^1/_4,\ {}^1/_2,\ {}^3/_5,\ {}^5/_7$.

1. Постановка задачи. В приближении гидродинамического пограничного слоя стационарная задача о продольном обтекании плоской пластины степенной жидкостью описывается уравнениями и граничными условиями [1]

$$u\frac{\partial u}{\partial \eta}+v\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\sigma}{\rho}n\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}=0 \tag{1.2}$$

$$u(0,\ \xi)=U_\infty;\ \ u(\eta,\ 0)=v(\eta,\ 0)=0;\ \ u(\eta,\ \infty)=U_\infty \tag{1.3}$$

Здесь координаты η и ξ отсчитываются вдоль и поперек пластины (начало координат соответствует передней кромке); u и v — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости; ρ и σ — плотность и показатель консистенции жидкости; U_∞ — скорость набегающего потока. Псевдопластичные и дилатантные жидкости характеризуются значениями $0<n<1$ и $n>1$; ньютоновской жидкости отвечает $n=1$.

Решение системы (1.1)—(1.3) сводится к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка [1]

$$y_{xxx}'''+y(y_{xx}'')^{2-n}=0 \tag{1.4}$$

$$y(0)=0,\ \ y_x'(0)=0,\ \ y_x'(\infty)=1 \tag{1.5}$$

При записи (1.4) было учтено, что $y_{xx}''\geqslant 0$.

Автомодельная переменная x, продольная компонента скорости жидкости u и локальный коэффициент трения на поверхности пластинки определяются следующими выражениями:

$$x=\left[\frac{\rho U_\infty^{2-n}}{n(n+1)\sigma}\right]^{1/(n+1)}\xi\eta^{-1/(n+1)},\qquad u=U_\infty y_x' \tag{1.6}$$

$$c_f=2(n^2+n)^{-n/(n+1)}(\rho U_\infty^{2-n}x^n/\sigma)^{-1/(n+1)}\,|\,y_{xx}''(0)\,|^n \tag{1.7}$$

Численные решения задачи (1.4), (1.5) для различных значений n приведены в [1]. Случай $n=2$, соответствующий линейному уравнению (1.4), аналитически исследовался в [2].

2. Точечные преобразования вспомогательного уравнения. Будем искать значения n, при которых задача (1.4), (1.5) допускает аналитическое решение. Для этого, используя идеи дискретно-группового метода [3], рассмотрим вспомогательное более общее, чем (1.4), уравнение третьего порядка

$$y_{xxx}'''=Ay^k(y_x')^{2m+1}(y_{xx}'')^l \tag{2.1}$$

которое подстановкой $z=2^p(y_x')^2$, $p=(l-1)/(1-l-m)$ приводится к обобщенно-однородному уравнению второго порядка

$$z_{yy}''=Ay^kz^m(z_y')^l \tag{2.2}$$

Переходя в (2.2) к новым переменным

$$\zeta=\frac{y}{z}z_y', \qquad w=Ay^{k-l+2}z^{m+l-1} \tag{2.3}$$

получим уравнение Абеля

$$(\zeta^l w-\zeta^2+\zeta)w_\zeta'=[(m+l-1)\zeta+k-l+2]w \tag{2.4}$$

Опишем теперь три точечных преобразования, которые сохраняют вид уравнений (2.1), (2.2) (при этом меняются только значения параметров k, m, l) и задают простейшие циклические группы второго порядка. Для кратности уравнения (2.1), (2.2), (2.4) будем обозначать одинаковым символом (k, m, l).

Преобразование β. Заменой $\zeta=1/\zeta$, $w=-\bar{w}$ из (2.4) получим уравнение (2.4) к аналогичному виду

$$(w-\mu^2+\mu)w_\mu'=[(m-1)\mu-k-m-1]w$$

Граф соответствующей группы преобразований записывается так

$$(k,m,0)\overset{\alpha}{\longleftrightarrow}(-k-m-3,m,0) \tag{2.5}$$

Преобразование β. Заменой $\zeta=1/\xi$, $w=-\bar{w}$ из (2.4) получим

$$(\xi^{3-l}\bar{w}-\xi^2+\xi)\bar{w}_\xi'=[(k-l+2)\xi+m+l-1]\bar{w}$$

Это преобразование задает группу G_2

$$(k,m,l)\overset{\beta}{\longleftrightarrow}(m,k,3-l) \tag{2.6}$$

Преобразование γ. При $k\neq-1$, $m\neq0$, $l\neq1$ преобразование

$$t=\frac{1-l}{n+1}\zeta^{l-1}w, \qquad s=\frac{m}{k+1}\zeta t^{1/m}$$

переводит (2.4) в уравнение аналогичного вида

$$(st^{(m-1)/m}-t^2+t)s_t'=\left[\left(\frac{1}{1-l}-\frac{1}{m}\right)t+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{m}\right]s$$

что символически записывается следующим образом:

$$(k,m,l)\overset{\gamma}{\longleftrightarrow}\left(-\frac{k}{k+1},\frac{1}{1-l},\frac{m-1}{m}\right) \tag{2.7}$$

Укажем более сложные преобразования, которым соответствуют группы третьего порядка.

Преобразование $\omega=\gamma*\beta$. Последовательное применение к уравнению (2.4) замен β и γ, согласно (2.5) и (2.6), дает

$$(k,m,l)\overset{\omega}{\longrightarrow}\left(-\frac{m}{m+1},\frac{1}{l-2},\frac{k-1}{k}\right) \tag{2.8}$$

Нетрудно убедиться, что $\omega^3=E$, где E — тождественное преобразование.

Преобразование $\varphi=\beta*\gamma$. Это преобразование действует по схеме

$$(k, m, l) \xrightarrow{\varphi} \left(\frac{1}{1-l}, -\frac{k}{k+1}, \frac{2m+1}{m}\right) \tag{2.9}$$

и является обратным по отношению к ω, так как $\omega*\varphi=\varphi*\omega=E$.

Комбинируя далее преобразования β и φ, из уравнений (2.1), (2.2), (2.4) можно получить сразу шесть уравнений аналогичного вида.

3. Точные решения уравнений пограничного слоя. Рассматриваемое уравнение (1.4) в принятых обозначениях записывается так: $(1, -1/2, 2-n)$. Справедлива связь

$$(1, -{}^1/_2, 2-n) \underset{\varphi}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} (1, -1/n, 0) \tag{3.1}$$

Поэтому каждое интегрируемое уравнение вида $(1, m, 0)$ порождает интегрируемое уравнение (1.4) при $n=-1/m$.

Учитывая сказанное и используя преобразования α, ω, φ, запишем цепочку уравнений, которые связаны с $(1, m, 0)$

$$(-m-4, m, 0) \overset{\alpha}{\leftrightarrow} (1, m, 0) \underset{\varphi}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} \left(-\frac{m}{m+1}, -\frac{1}{2}, 0\right) \overset{\alpha}{\longleftarrow} \cdots$$
$$\cdots \overset{\alpha}{\longrightarrow} \left(-\frac{3m+5}{2m+2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \underset{\omega}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \left(1, -\frac{3m+5}{m+3}, 0\right) \tag{3.2}$$

Из (2.2) видно, что уравнения $(0, m, 0)$ и $(k, 0, 0)$ интегрируются в квадратурах при любых значениях параметров m и k.

Первое уравнение (3.2) (нумерация ведется слева направо) интегрируется при $m=0$. Подставляя это значение в пятое уравнение (3.2), получим уравнение $(1, -5/3, 0)$, которое порождает интегрируемое уравнение (1.4) при $n=3/5$.

Первое уравнение интегрируется также при $m=-4$. Второе и пятое уравнение (1.4) в прямых обозначениях записывается так: $(1, -1/2,$ Отсюда следует, что уравнение (1.4) интегрируется в квадратурах при $n=1/4$ и $1/7$.

Уравнение $(1, -1/2, 0)$ интегрируется в квадратурах, так как ему соответствует линейное уравнение с постоянными коэффициентами (1.4) при $n=2$. Подставляя значение $m=-1/2$ в пятое уравнение (3.2), получим: $(1, -7/5, 0)$. Это дает интегрируемое уравнение (1.4) при $n=5/7$.

Решение линейного уравнения (2.3) при $m=1$, $l=0$ можно выразить через функции Бесселя. Подставляя значение $m=1$ в пятое уравнение (3.2), имеем: $(1, -2, 0)$. Поэтому решение уравнения (1.4) при $n=1/2$ выражается через функции Бесселя.

Уравнение $(1, -5, 0)$ интегрируется в квадратурах, так как соответствующее ему уравнение Абеля (2.4) после перехода от ζ, w к новым переменным w, f, где $f=w^{-1/6}(\zeta-{}^1/_2)$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Сказанное означает, что интегрируется уравнение (1.4) при $n=1/5$.

В описанных выше случаях можно построить общее решение уравнения пограничного слоя (1.4). Ниже приведены записанные в параметрическом виде точные решения задачи (1.4), (1.5).

При $n=1/5$:

$$y=a\tau^2, \qquad x=b\int_0^{\tau}(1+\tau^3)^{1/3}\,d\tau$$
$$\tau\in[0, \infty), \ a=2^{-1/6}5^{5/6}, \ b=10^{5/6}$$

При $n=1/4$:

$$y=a\left[\tau^2-\frac{1}{2}\sqrt{\tau^3+1}\,F(\tau)\right],\qquad x=b\int_0^{\tau}\frac{[\tau F(\tau)-2\sqrt{\tau^3+1}]^2}{\sqrt{\tau^3+1}}\,d\tau$$

$$\tau\in[0,\infty),\qquad F(\tau)=\int_0^{\tau}\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau^3+1}},\qquad a=\pi^{1/5}2^{9/5}3^{-1/5}\left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\right]^{-2/5}$$

$$b=\pi^{7/10}2^{-6/5}3^{4/5}[\Gamma(2/3]\,\Gamma(5/6)]^{-7/5}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

При $n={}^1/_2$:

$$y=\frac{a\tau^{1/3}}{J_{-1/3}(\tau)}\left\{[J_{-1/3}(\tau)]_\tau'+\frac{1}{3\tau}J_{-1/3}(\tau)\right\},\qquad x=b\int_0^{\tau}\tau^{-1}[J_{-1/3}(\tau)]^{-2}\,d\tau$$

$$\tau\in[0,\ \tau_0),\ a=-2\cdot 3^{1/3},\ b=2\cdot 3^{1/3}\tau_0{}^{4/3}[J_{2/3}(\tau_0)]^2$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, $\tau_0\approx1{,}866$ – корень уравнения $J_{-1/3}(\tau_0)=0$.

При $n={}^3/_5$:

$$y=\frac{a\tau^2}{(1-\tau^3)^{1/2}},\qquad x=b\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(1-\tau^3)^{3/2}}$$

$$\tau\in[0,\ 1),\ a=2^{-3/4}3^{1/2}5^{5/8},\ b=2^{-7/4}3^{3/2}5^{5/8}$$

При $n=5/7$:

$$y=a\frac{2e^{\sqrt{3}\tau}+c(\sqrt{3}\cos\tau-\sin\tau)}{e^{\sqrt{3}\tau/6}(e^{\sqrt{3}\tau}+c\sin\tau)^{1/2}},\qquad x=b\int_{\tau}^{\pi/2}\frac{e^{\sqrt{3}\tau/2}\,d\tau}{(e^{\sqrt{3}\tau}+c\sin\tau)^{3/2}}$$

$$\tau\in(-\lambda,\ \pi/2],\ a=2^{-7/6}3^{-1/4}7^{7/12}e^{-\sqrt{3}\pi/6}\varepsilon^{-1/4}$$

$$b=2^{-5/6}3^{1/4}7^{7/12}e^{\sqrt{3}\pi/2}\varepsilon^{3/4},\quad c=2e^{\sqrt{3}\pi/2},\quad \varepsilon=(\sin\lambda)^{-2/3}(\sqrt{3}\sin\lambda+\cos\lambda)^2$$

где $\lambda\approx0{,}03119$ – корень уравнения $2\sin\lambda=\exp[-\sqrt{3}(\lambda+{}^1/_2\pi)]$. Укажем также соответствующие значения $y_{xx}''(0)$ (позволяющие вычислять коэффициент сопротивления пластины (1.7)), которые хорошо согласуются с результатами численных расчетов [1]

$$y_{xx}''(0)=10^{-5/6}\approx0{,}147\qquad (n={}^1/_5)$$

$$y_{xx}''(0)=\pi^{-6/5}2^{-4/5}3^{-4/5}[\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)]^{12/5}\approx0{,}167\qquad (n={}^1/_4)$$

$$y_{xx}''(0)=(9\tau_0/4)^{-8/3}[\Gamma(5/3)J_{2/3}(\tau_0)]^{-4}\approx0{,}273\qquad (n={}^1/_2)$$

$$y_{xx}''(0)=2^{15/4}3^{-5/2}5^{-5/8}\approx0{,}316\qquad (n={}^3/_5)$$

$$y_{xx}''(0)=2^{7/2}3^{7/4}7^{-7/12}(\sin\lambda)^{7/6}(\sqrt{3}\sin\lambda+\cos\lambda)^{-7/2}\approx0{,}363\qquad (n={}^5/_7)$$

Важно отметить, что найденные значения n, для которых разрешимо уравнение пограничного слоя, отвечают реальным веществам. По данным [1], например, значению $n={}^1/_2$ соответствует 10%-ный раствор напалма в керосине, а значениям $n={}^3/_5$ и ${}^5/_7$–0,09 и 0,35%-ные водные растворы карбоксиметилцеллюлозы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шульман З. П., Берковский Б. М.* Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966. 239 с.
2. *Павлов К. Б.* К теории пограничного слоя неньютоновских нелинейно-вязких сред // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 26–33.
3. *Зайцев В. Ф.* О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 3. С. 542–545.

Москва

Поступила в редакцию
14.IX.1988