

УДК 532.516.2.013.2:519.63

ЗАХАРЕНКОВ М. Н.

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ  
ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРА, СОВЕРШАЮЩЕГО ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ**

В эксперименте по обтеканию кругового цилиндра, совершающего вращательные колебания [1], было установлено исчезновение развитого отрыва через небольшое время после наложения колебаний. В рамках приближения пограничного слоя показано [2], что наложение вращательных колебаний способствует затягиванию отрыва от поверхности цилиндра. Однако для изучения развитого отрыва и получения общей топологии течения необходимо исследование течения на основе полных уравнений Навье – Стокса. Эту цель и преследует настоящая работа.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о поперечном обтекании вязкой несжимаемой жидкостью кругового цилиндра, совершающего вращательные колебания. Двумерные уравнения Навье – Стокса, записанные в форме Гельмгольца, имеют вид

$$\Delta \Psi = H^2 \Omega, \quad H^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Omega + [\Psi, \Omega] \quad (1.1)$$

где  $\Psi$  – функция тока,  $\Omega$  – завихренность,  $\text{Re} = U_\infty R / \nu$  – число Рейнольдса,  $R$  – радиус цилиндра,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $H^2$  – якобиан перехода от декартовой к криволинейной системе координат, который в рассматриваемой задаче определяется как  $\varphi = \eta$ ,  $r = e^\xi$ ,  $H^2 = e^{2\xi}$ , где  $r$ ,  $\varphi$  – полярные координаты.

Для разрешения масштабов в образующемся пристеночном слое используется дополнительное преобразование  $\xi = d \text{tg}(\pi/2\theta)$ .

На поверхности вращающегося цилиндра должно выполняться граничное условие прилипания

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = W, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0 \quad (1.2)$$

$$W = \frac{1}{2} A k \sin(k(t-t_0)), \quad k = 2\pi\omega, \quad \omega = R / (U_\infty T)$$

где  $W$  – угловая скорость вращения,  $A$  – амплитуда колебания,  $\omega$  – приведенная частота,  $T$  – период колебания

Фазовый угол меняется:  $\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} A \cos(k(t-t_0))$ . На бесконечности задается равномерный поток. В начальный момент жидкость покоится.

**2. Способ решения.** Для решения поставленной задачи используется конечно-разностная схема, алгоритм и структура которой изложены в [3].

Краткая характеристика схемы: используется алгоритм раздельного решения уравнений системы (1.1), связь между решениями уравнений системы (1.1) на каждом шаге по времени осуществляется через итерационный процесс, который одновременно связан с разрешением нелинейности в уравнении переноса завихренности и нахождением граничного условия для завихренности на поверхности цилиндра [4].

Уравнение Пуассона решается прямым методом на основе разложения в тригонометрический полином по координате  $\eta$  и использовании быстрого преобразования Фурье [5]. Уравнение переноса завихренности решается методом переменных направлений [6].

По сравнению с [3] в схему внесены изменения: первые производные от завихренности в (1.1) аппроксимированы следящими трехточечными односторонними разностями со вторым порядком аппроксимации.

Расчетная область  $R$  разбивается на две кольцевые подобласти:  $R_1$  — прилегающую к цилиндру и ограниченную некоторым радиусом  $R_0$  и  $R_2$  — область от  $r=R_0$  до  $r=R_\infty$ . В подобласти  $R_2$  уравнение переноса завихренности решается только один раз на первой итерации с  $\Psi$ , взятой с предыдущего шага по времени. На окружности  $r=R_0$  осуществляется сращивание решений для  $\Psi$  [7] в  $R_1$  и  $R_2$ , так что решение уравнения Пуассона на каждой итерации формально ищется во всей области, хотя вычисления опять же ограничены только областью  $R_1$ , а из области  $R_2$  после первой итерации определяются коэффициенты для сращивания. После завершения итерационного процесса в  $R_1$  восстанавливаются соответствующие значения  $\Psi$  в  $R_2$ .

Таким образом, на каждом шаге по времени итерационный процесс существенно ограничен только областью  $R_1$ , что приводит к значительному ускорению расчета.

Значение  $R_0$  выбирается так, что максимум относительной погрешности искомых функций в  $R_1$  составляет 1% от максимума относительного изменения этих же функций в области  $R_2$ .

Особое внимание следует уделить граничным условиям на внешней границе расчетной области  $S_\infty$ . В ходе исследования поставленной задачи при использовании традиционных граничных условий на  $S_\infty$  [8–11] получен важный методологический вывод: решение системы уравнений (1.1) с заданными граничными условиями (1.2) и равномерным потоком на бесконечности может не удовлетворять исходной системе уравнений в  $(u, v, p)$  переменных — давление, рассчитанное по найденным  $\psi$  и  $\Omega$ , может не удовлетворять условию периодичности, а в общем случае просто быть вычислено неверно. Это связано с перекрестным дифференцированием исходных уравнений

$$\nabla p = -\frac{2}{\text{Re}} \nabla \times \omega - \frac{\partial V}{\partial t} - \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + V \times \omega, \quad V = (U, V, 0), \quad \omega = (0, 0, -\Omega) \quad (2.1)$$

которое используется при получении (1.1).

Этот результат достаточно очевиден и нарушение периодичности  $p$  отмечалось и ранее [9, 11], но если ранее дисбаланс давления на контуре связывался с недостатками решения в окрестности профиля и на его поверхности, то здесь подчеркивается связь этого нарушения исходных требований к решению именно с заданием граничных условий на  $S_\infty$  для функции тока и завихренности.

Приведем простой пример о вращении кругового цилиндра в покоящейся на бесконечности жидкости. Установившееся решение описывается одиночным вихрем [12]

$$\psi_0 = WR^2 \ln r \quad (2.2)$$

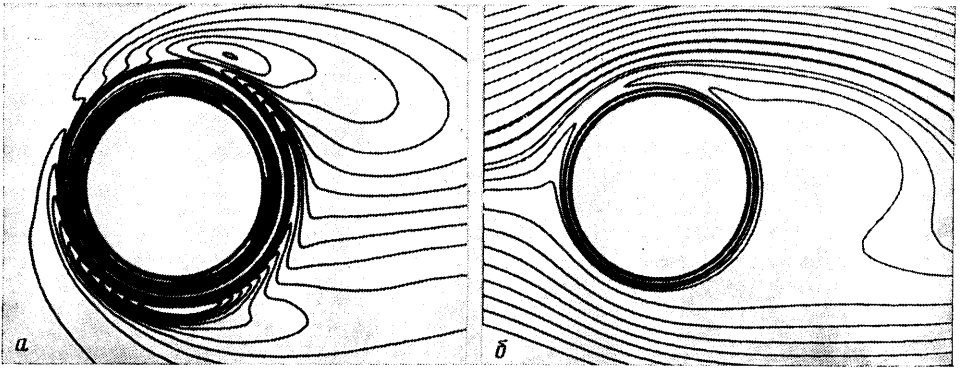
где  $W$  — угловая скорость вращения,  $R$  — радиус цилиндра. Очевидно,  $\Delta \psi_0 = 0 = \Omega$  и, следовательно, уравнение переноса завихренности выполнено тождественно на тривиальном решении. Данное решение удовлетворяет граничным условиям  $v_\varphi = WR$  на стенке цилиндра и  $v_\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Аналитическое решение нестационарной задачи о течении около кругового цилиндра, приведенного во вращательное движение с постоянной угловой скоростью в первоначально покоящейся жидкости, значительно отличается от (2.2) дополнительным слагаемым, содержащим функции Бесселя [12]. При  $W=W(t)$  решение, очевидно, будет еще более сложным. Однако при решении (1.1) с граничными условиями (1.2) и  $v_\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  имеем кажущийся парадокс: решение (2.2) формально удовлетворяет системе уравнений и граничным условиям, а при  $W=W(t)$  и начальном значении  $W(0)=0$  — и начальным условиям. Отсутствие парадокса в том, что решение (2.2) при  $W=W(t)$  не удовлетворяет исходной системе уравнений (2.1), что, в частности, проявляется в неперiodичности давления  $\partial p / \partial \varphi|_S = R dW / dt \neq 0$ .

Таким образом, формулировка задачи (1.1) с заданными граничными и начальными условиями еще не определена полностью. Необходимо добавить условие совпадения давления на стенке, полученного из (2.1) в одном случае интегрированием  $\partial p / \partial \eta$  по поверхности цилиндра  $S$ , а в другом случае интегрированием  $\partial p / \partial \xi$  от  $S$  к  $S_\infty$ . В данном примере это условие сводится к требованию однозначности (неperiodичности) давления на стенке.

Анализ аналитического решения [12] подсказывает способ достижения поставленной цели: необходимо на  $S_\infty$  значение  $\partial \psi / \partial \xi$  подбирать в ходе решения так, чтобы на  $S$  выполнялось требование периодичности давления. Очевидно, что при  $\partial \psi / \partial \xi$ , заданном из аналитического решения, и использовании, например, процедуры с граничным условием для завихренности  $\partial \Omega / \partial \xi = 0$  будем тем ближе к решению (2.1), чем дальше находится  $S_\infty$ .

В общем случае это эквивалентно заданию асимптотики на  $S_\infty$  для  $\psi$  и  $\Omega$ , построение которой — достаточно сложная задача. На практике эти условия часто заменяются на необходимое, но недостаточное условие периодичности давления на



Фиг. 1

поверхности обтекаемого тела. Этот пример служит также предупреждением от недостаточно обоснованного использования мягких граничных условий, полученных из уравнений движения.

В задаче установившегося обтекания вращающегося с постоянной угловой скоростью кругового цилиндра на  $S_\infty$  добавляется [10, 13] циркуляционный член, известный из асимптотики решения. Величина циркуляции в этой задаче может подбираться опять же из требования периодичности давления на поверхности цилиндра [14, 15].

В настоящей работе использовались несколько способов задания граничных условий на внешней границе расчетной области  $S_\infty$ .

Для завихренности всегда задается  $\partial\Omega/\partial\xi=0$ . Отметим, что даже для стационарного решения задачи об обтекании кругового цилиндра [8], когда завихренность распространяется далеко вниз по потоку, это условие признано полностью приемлемым.

Для функции тока исследовались три способа задания граничного условия на  $S_\infty$ . Первый, самый простой — задание скорости равномерного потока. Второй аналогично [8], с использованием коррекции для выполнения интегрального соотношения [9]

$$\int_{R_\infty} \Omega N^2 dR = \oint_{S_\infty} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} dS - 2\pi W \quad (2.3)$$

В третьем случае к первому и второму способам добавлялась в  $\partial\psi/\partial\xi$  величина  $V_\varphi$ , которая определялась на каждом шаге по времени из условия периодичности давления на  $S$ .

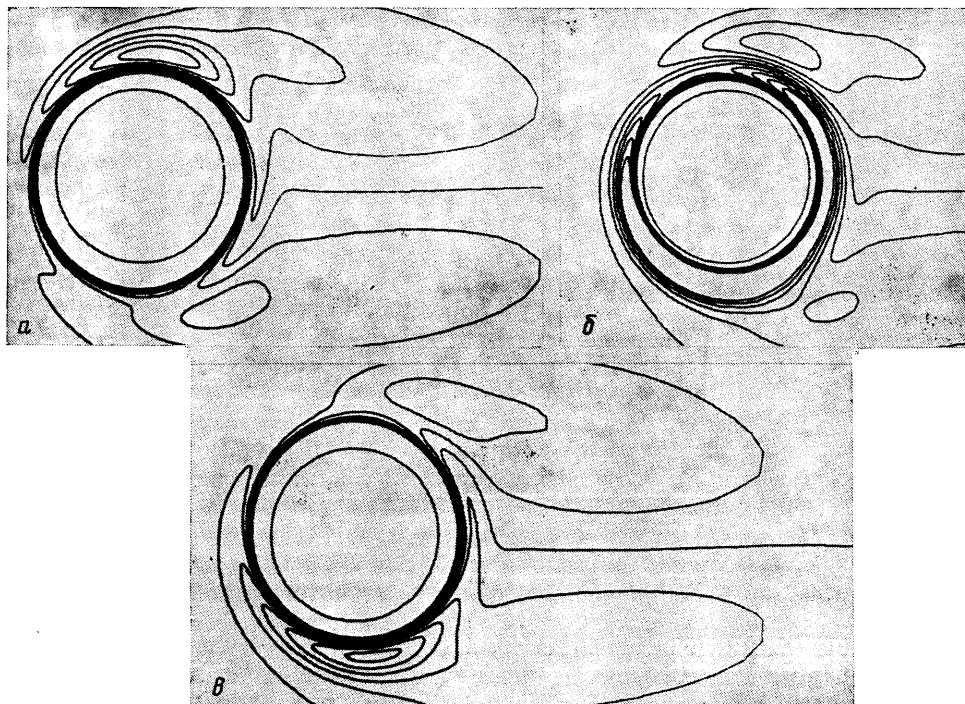
Анализ решений показал, что при малых  $t$  первый и второй способ дают один и тот же результат, но при наличии вращения цилиндра не выполняется условие периодичности давления. В третьем случае последний недостаток решения ликвидируется. При этом практически исчезает необходимость коррекции для выполнения (2.3). Что касается картины обтекания (линии тока и линии равной завихренности), то ее изменение визуально мало заметно, что говорит о том, что различия ограничены узкой пристеночной областью и больше проявляются в производных решения, а не в значениях искомых функций.

Расчеты производились при  $N_\xi=80$ ,  $N_r=128$ ,  $R_\infty=10$ ,  $d=0,75$ ,  $\tau=0,01-0,005$ . Методическое исследование на сгущаемых сетках при варьировании  $\tau$  показало, что выбранные значения параметров схемы достаточны по требованиям аппроксимации. Методически было также выбрано значение  $R_0=1,5$  в разбиении расчетной области, которое соответствует 40 узлам сетки по координате  $\xi$ .

Для проверки качества разностной схемы проведены методические расчеты обтекания кругового цилиндра равномерным потоком при  $Re=200$ , а также обтекании при  $Re=10$  вращающегося цилиндра при значении  $\alpha=WR/U_\infty=0,5$ . Сравнение с [10, 11] показало количественное и качественное совпадение.

**3. Результаты расчета.** В [1] приведены результаты эксперимента с цилиндром  $R=0,5 \cdot 10^{-2}$  м при скорости набегающего потока  $U_\infty=0,33 \cdot 10^{-2}$  м/с,  $Re=17,5$  ( $Re_d=35$ , где число  $Re_d$  основано на диаметре цилиндра). Цилиндр совершает вращательные колебания с частотой 2 Гц и амплитудой  $A=45^\circ$ . Закон колебаний не приведен. При перечисленных данных приведенная частота  $\omega=3$ .

Для более легкого восприятия результатов поясним, что при  $\omega=3$  за



Фиг. 2

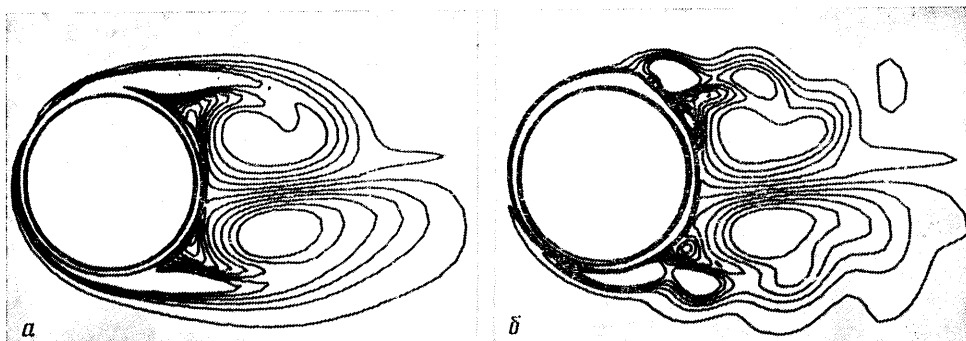
единицу безразмерного времени, когда цилиндр проходит расстояние по оси  $x$ , равное своему радиусу, происходит три полных колебания цилиндра вокруг своего центра.

При всех целых значениях времени  $t$ , когда приведены картины обтекания, цилиндр занимает положение, соответствующее положению в начале колебаний. В момент времени  $t=k$ ,  $k=3, 4, \dots$ , цилиндр совершил  $\omega(k-2)$  колебаний. Колебания накладывались с момента времени  $t_0=2$ , до которого цилиндр обтекается равномерным потоком.

На фиг. 1 приведены линии равной завихренности с шагом 0,5 и линии тока с шагом 0,125 при значении  $\omega=3$  и амплитуде  $A=45^\circ$  для числа  $Re=17,5$  при  $t=7$ . Хорошо заметно образование пристеночного слоя около цилиндра. Реализуется близкое к симметричному отрывное обтекание системы цилиндр — пристеночный слой. Несимметрия зарождается на первом колебании цилиндра и связана с направлением вращения. Однако с развитием течения несимметрия не приводит к неустойчивости с образованием дорожки Кармана ни для  $Re=17,5$ , ни для  $Re=200$ .

В большей части пристеночного слоя линии равной завихренности и линии тока представляют собой концентрические окружности и только около поверхности заметны линии равной завихренности, которые опираются на поверхность цилиндра и соответствуют локальным отрывам.

Интересной особенностью полученного решения является наличие рециркуляционного течения, отделенного от поверхности твердого тела. В [16] подобные течения называются отсоединенным отрывом. В данном случае хорошо прослеживается совпадение топологии отошедшей рециркуляционной зоны с топологией отрывного течения, образующегося при обтекании неподвижного цилиндра. Можно предположить, что отрыв происходит от цилиндра с несколько большим, чем исходный, радиусом и при граничном условии частичного проскальзывания вместо прилипания. Об этом свидетельствует увеличение коэффициента сопротивления  $C_x$  пропорционально  $R+\delta$ , где  $\delta$  — толщина пристеночного



Фиг. 3

слоя. В то же время для плохообтекаемых тел при замене граничного условия прилипания на условие частичного проскальзывания геометрические размеры отрывной области меняются мало [17].

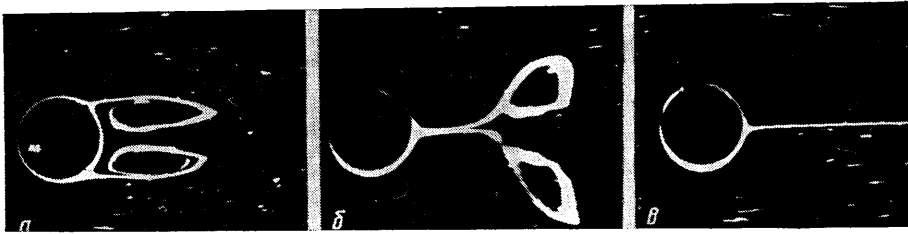
Расчеты показали, что увеличение амплитуды в 2 раза не меняет картины обтекания вне пристеночного слоя. Отсюда можно сделать вывод, что при приведенной частоте, большей некоторой величины (в настоящем исследовании это значение не искалось), геометрические характеристики рециркуляционного течения не чувствительны к течению внутри пристеночного слоя.

Как можно видеть из фиг. 2, где  $a-t=8,25$ ;  $b-t=8,5$   $c-t=8,75$ , при  $\omega=1$ ,  $A=45^\circ$  и числе  $Re=17,5$ , внешняя граница пристеночного слоя меняется с фазой колебания цилиндра, что, однако, не приводит к нестационарному несимметричному обтеканию типа течения с дорожкой Кармана. Полученные результаты представляют новые типы обтекания по сравнению с известными [13, 18].

Для изучения гидродинамики течения вязкой жидкости представляет интерес зависимость течения от приведенной частоты  $\omega$ , числа  $Re$  и амплитуды  $A$ . На фиг. 3 представлены линии равной завихренности с шагом 0,5 в момент времени  $t=7$  для течения, возникающего при амплитуде  $A=45^\circ$ , числе  $Re=200$  и приведенной частоте  $\omega=3$  (а),  $\omega=1$  (б). Можно отметить, что толщина пристеночного слоя уменьшилась. Топология течения аналогична полученной при числе  $Re=17,5$ . При увеличении амплитуды в 2 раза изменения в топологии течения незначительны.

На фиг. 1 параметры течения соответствуют эксперименту [1]. Отметим основное отличие полученного решения от изученного экспериментально ([1], фиг. 4), где  $a$  соответствует обтеканию без наложенных вращательных колебаний,  $b-t=6,8$ ;  $c-t=24$ ,  $t$  — время после наложения колебаний, обезразмеренное по радиусу цилиндра и скорости набегающего потока. Если в эксперименте достаточно быстро достигается безотрывное обтекание, причем четко выделяется пристеночный слой и стекание частиц визуализации из этого слоя происходит через малую окрестность задней критической точки и далее по линии симметрии, то в расчетном течении отрывная зона после наложения вращательных колебаний не исчезает, а, наоборот, продолжает увеличиваться вниз по течению. При этом на линии симметрии скорость в отрывной зоне направлена в сторону цилиндра, а следовательно, частицы визуализации не могут покинуть пристеночный слой через область, примыкающую к задней критической точке.

Можно дать такое объяснение различий между численным решением и течением, полученным в эксперименте. Трассирующее вещество, которое попадает в пристеночный слой за счет эмиссии с поверхности цилиндра при задании разности электрического потенциала, может покинуть пристеночный слой на всем его протяжении только за счет диф-



Фиг. 4

фузии, так как анализ рассчитанных траекторий частиц показал, что частицы внутри пристеночного слоя двигаются по орбитам, близким к круговым, и совершают колебательные движения, согласованные с собственной частотой колебаний цилиндра. Однако через узкую область в окрестности передней критической точки имеет место протекание незначительного количества жидкости внутрь пристеночного слоя, которая движется затем вблизи внешней границы пристеночного слоя и покидает его в области отрыва.

При наличии трассирующего вещества и возникновении пристеночного слоя происходит насыщение жидкости внутри слоя частицами визуализации, которые под действием внешнего течения за счет трения стекают медленно к задней критической точке. Эти явления хорошо заметны на фотографиях эксперимента (фиг. 4). Если учесть, что скорость противотока на линии симметрии порядка  $10^{-2}$ – $10^{-4}$ , то трассирующее вещество, концентрируясь в окрестности задней критической точки, может преодолеть противоток, что приведет к картине обтекания, визуализированной в эксперименте. Хотя предложенное объяснение не может полностью удовлетворить естественного интереса к результатам эксперимента [1], но представляется возможным.

Автор благодарит В. В. Сычева и Ю. Л. Жилина за плодотворное обсуждение и внимание к работе. Автор также искренне признателен участникам семинара ЦАГИ по аэродинамике за полезное обсуждение представленных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taneda S. Visual study of unsteady separated flows around bodies // Prog. Aerospace Sci. 1977. V. 17. № 4. P. 287–348.
2. Крацова М. А., Рубан А. И. О нестационарном пограничном слое на поперечно обтекаемом цилиндре, совершающем вращательные колебания // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 6. С. 99–102.
3. Захаренков М. Н. Об аппроксимации граничного условия для завихренности // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1982. Т. 13. № 2. С. 64–81.
4. Захаренков М. Н. Аппроксимация граничного условия для завихренности на поверхности твердого тела при решении уравнений Навье – Стокса в переменных функции тока и завихренности // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1980. Т. 11. № 7. С. 56–74.
5. Поттер Д. Вычислительные методы в физике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 392 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Halim A. A. M. Development of a boundary-layer type solver based on simultaneous iteration technique for axisymmetric separated flows // AIAA 7th Comput. Fluid Dyn. Conf. Cincinnati, Ohio, July 15–17 1985. Collect. Techn. Pap. New York: N. Y., s. a. P. 150–181.
8. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. Pt 4. P. 819–855.
9. Зеленов И. В., Шкадов В. Я. Обтекание профиля крыла потоком вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 29–36.
10. Ingham D. B. Steady flow past a rotating cylinder // Comp. and Fluids. 1983. V. 11. № 4. P. 351–366.
11. Mehta U. B., Lavan Z. Starting vortex separation bubbles and stall: a numerical study of laminar unsteady flow around an airfoil // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt 2. P. 227–256.

12. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1955. 520 с.
13. *Шкадова В. П.* Вращающийся цилиндр в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 16–21.
14. *Николаев К. В.* Возникновение отрыва пограничного слоя на вращающемся цилиндре в потоке несжимаемой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 6. С. 32–39.
15. *Негода В. В., Сычев Вик. В.* О пограничном слое на быстровращающемся цилиндре // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 36–45.
16. *Петров А. В.* О некоторых особенностях обтекания разрезных крыльев // Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 6. С. 119–124.
17. *Lugt H. J., Ohring S.* Laminar flow behavior under slip-boundary conditions // Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 1. P. 1–8.
18. *Гущин В. А.* Численное исследование отрывных течений вязкой жидкости около цилиндра. Стационарный и периодический режимы. М.: ВЦ АН СССР, 1985. 62 с.

Москва

Поступила в редакцию  
19.VIII.1988