

УДК 532.51.013:536.25

ГУПАЛО Ю. П., РЯЗАНЦЕВ Ю. С., СКВОРЦОВА А. В.

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ НА ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Интерес к исследованию влияния капиллярных сил на равновесие и движение жидкости в условиях пониженной гравитации связан с работами в области космической технологии. Зависимость величины поверхностного натяжения от температуры определяет характер и многообразие капиллярных явлений. Теоретическому анализу термокапиллярных явлений посвящен ряд работ, например [1-3]. Данная работа продолжает исследование термокапиллярной конвекции в жидкостях с параболической зависимостью поверхностного натяжения от температуры в рамках задачи, поставленной в [1].

1. Постановка задачи. Вязкая жидкость, занимающая полупространство, притекает из бесконечности к свободной поверхности и растекается вдоль нее. Скорость жидкости на больших расстояниях от свободной поверхности имеет постоянное значение и направлена по нормали к ней. Свободную поверхность при некоторых допущениях [1] можно считать плоской. Предположим, что на ней поддерживается линейное распределение температуры, а сила поверхностного натяжения зависит от температуры по закону

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{2}\alpha(T - T_0)^2, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}$$

где T_0 — значение температуры, соответствующее экстремальной величине σ_0 коэффициента поверхностного натяжения. В случае $\alpha > 0$ параболический характер зависимости $\sigma = \sigma(T)$ подтвержден экспериментальными данными для ряда жидкостей (водные растворы высокомолекулярных спиртов) [2]. Неравномерное распределение температуры на свободной поверхности приводит к возникновению касательного термокапиллярного напряжения и оказывает существенное влияние на движение жидкости. Рассмотрим установившийся режим такого движения, когда касательное термокапиллярное напряжение на поверхности жидкости уравновешено действием вязких сил.

Поместим начало координат декартовой системы в точку, где давление и температура принимают значения соответственно p_0 и T_0 . Ось x направим вдоль свободной поверхности, y — внутрь жидкости. Поле скоростей и распределение температуры при этом описываются следующей системой уравнений и граничных условий:

$$(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0$$

$$(\mathbf{V}\nabla)T = \chi\nabla^2 T, \quad \mathbf{V} = (u, v), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$y=0 \quad v=0, \quad T=T_0 + \beta x, \quad \rho\nu\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d\sigma}{dx} = -\alpha\beta^2 x \quad (1.2)$$

$$y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow ax, \quad v \rightarrow -ay, \quad T = T_0 \quad (1.3)$$

Здесь ρ , p , v , T — плотность, давление, вектор скорости и температура жидкости; u , v — компоненты скорости по осям, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — температуропроводность, a , β — положительные константы.

После перехода к безразмерным переменным и автомодельной замены неизвестных функций уравнения (1.1)–(1.3) запишутся в виде

$$u = \sqrt{av} \xi \varphi'(\eta), \quad v = -\sqrt{av} \varphi(\eta), \quad T = T_0 + \beta \sqrt{\frac{\nu}{a}} \xi \Phi(\eta)$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho av [\xi^2 + F(\eta)], \quad \eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad \xi = x \sqrt{\frac{a}{\nu}}$$

$$\varphi''' + \varphi \varphi'' - (\varphi')^2 + 1 = 0 \quad (1.4)$$

$$F' = 2(\varphi'' + \varphi \varphi'), \quad \text{Pr}(\varphi' \Phi - \varphi \Phi') = \Phi'' \quad (1.5)$$

$$\eta = 0 \quad \varphi = 0, \quad \varphi'' = m, \quad \Phi = 1, \quad F = 0 \quad (1.6)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \varphi' \rightarrow 1, \quad \Phi \rightarrow 0, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad m = -\frac{\alpha \beta^2}{\rho a \sqrt{av}} \quad (1.7)$$

где Pr — число Прандтля, m — число Марангони, определяющее интенсивность термокапиллярных сил, действующих на поверхности жидкости и направленных вдоль нее. Когда $m > 0$ ($\alpha < 0$), силы оказывают сжимающее действие на поверхности в направлении начала координат, при $m < 0$ ($\alpha > 0$) — растягивающее в разные стороны от точки (линии) растекания.

Отметим, что граничные условия (1.6) не содержат условия $\varphi'(\eta)$ при $\eta = 0$, так как значение продольной составляющей скорости на свободной поверхности заранее неизвестно и должно определяться в процессе решения задачи. Тепловая и динамическая задачи разделяются, и уравнение (1.4) с условиями (1.6), (1.7) решается независимо от остальных уравнений системы, при этом распределение давления определяется квадратурой

$$F(\eta) = 2 \int_0^\eta (\varphi'' + \varphi \varphi') dt, \quad \text{где } \varphi, \varphi', \varphi'' \text{ — уже найденные функции.}$$

2. Приближенное решение. Пусть продольная составляющая скорости u и ее производные $\partial u / \partial y$, $\partial^2 u / \partial y^2$ остаются конечными в некоторой окрестности свободной поверхности, т. е. $\varphi' \sim 1$, $\varphi'' \sim 1$, $\varphi''' \sim 1$ в окрестности $\eta = 0$. Поскольку в силу (1.6) $\varphi(0) = 0$, можно предположить, что $\varphi \varphi'' \ll 1$ в этой окрестности, а уравнение (1.4) свести к виду $\varphi''' - (\varphi')^2 + 1 = 0$ или после замены $\varphi'(\eta) = z(\eta)$ — к уравнению

$$z'' = z^2 - 1, \quad z(0) = A, \quad z'(0) = m \quad (2.1)$$

Здесь $A = \varphi'(0)$ — недостающий параметр задачи (1.4)–(1.7). Интегрируя (2.1) один раз, получим уравнение первого порядка $(z')^2 = z^3 - 3z + \gamma$, $\gamma = \frac{1}{2}(3m^2 - 2A^3 + 6A)$.

В зависимости от параметра γ окончательный результат для функции $z(\eta)$ выражается либо в эллиптических интегралах (для $|\gamma| \neq 2$), либо в элементарных функциях (для $|\gamma| = 2$). На фиг. 1 представлено семейство интегральных кривых уравнения (2.1) в фазовой плоскости. Стрелками указано направление роста координаты η . Имеются две особые точки: $(-1, 0)$ — центр, $(1, 0)$ — седло. Сепаратрисы S_1 , S_2 отвечают значению $\gamma = 2$ и задаются уравнениями

$$z_{1,2} = \pm (1-z) \sqrt[3]{z+2}$$

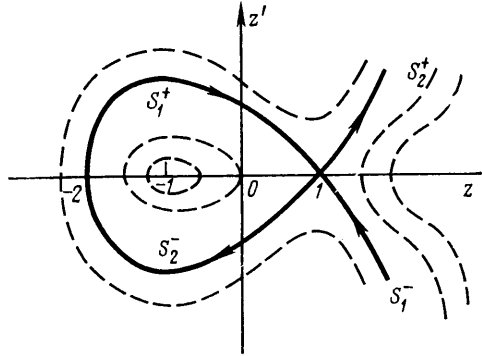
соответственно. Положительным S_1^+ , S_2^+ ($m > 0$) и отрицательным S_1^- , S_2^- ($m < 0$) ветвям сепаратрис отвечают семейства интегральных кривых — ре-

шений уравнения (2.1). Для сепаратрисы S_1 они имеют вид

$$z_1^{\pm} = 3 \operatorname{th}^{\pm 2} (\sqrt{1/2} \eta + 1/2 c^{\pm}) - 2 \quad (2.2)$$

Соответствующие семейства решений для сепаратрисы S_2 получаются заменой η на $-\eta$ в формулах (2.2). Положительные константы c^+ и c^- определяются начальными условиями $z_{1(2)}^+(0)$, $z_{1(2)}^-(0)$.

Сепаратрисы делят фазовую плоскость на области кривых различных типов. Анализируя поведение фазовых и соответствующих им интегральных кривых и учитывая сделанное предположение о малости члена $\varphi\varphi''$ по сравнению с φ' , φ'' , φ''' в окрестности $\eta=0$, можно выделить решения (2.2) в качестве искомого приближенных решений задачи (1.4), (1.6) в этой окрестности. Поскольку $z_1^{\pm} = \varphi_1'(\eta) \rightarrow 1$, $\varphi_1 \varphi_1' \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, эти решения удовлетворяют условию (1.7) и уравнению (1.4) на бесконечности. Таким образом, решения (2.2) можно взять в качестве приближенных решений динамической задачи как в окрестности $\eta=0$, так и при $\eta \rightarrow \infty$.



Фиг. 1

Отметим, что семейства решений $z_2^{\pm} = \varphi_2'$ удовлетворяют условиям $\varphi_2'(\eta) = \varphi_1'(-\eta)$, $\varphi_2(\eta) = -\varphi_1(-\eta)$ и их можно использовать в качестве приближенных решений задачи о натекании друг на друга симметричных потоков вязкой жидкости с заданным распределением температуры вдоль линии растекания $\eta=0$, при этом φ_2 , φ_2' будут описывать распределения скоростей для потока, набегающего со стороны отрицательных значений η .

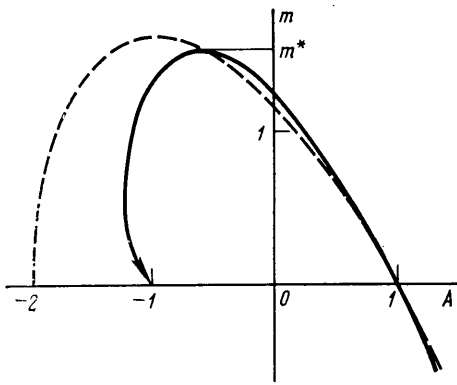
Рассматривая фазовую плоскость (z, z') как плоскость параметров $A = z(0) = \varphi'(0)$, $m = z'(0) = \varphi''(0)$ ввиду инвариантности уравнений относительно сдвига по координате, можно сделать ряд выводов относительно приближенных решений задачи. Уравнения сепаратрис при этом представляют собой уравнения связи для параметров m и A . Рассмотрим уравнение для сепаратрисы S_1

$$m(A) = (1-A) \sqrt[3]{(A+2)} \quad (2.3)$$

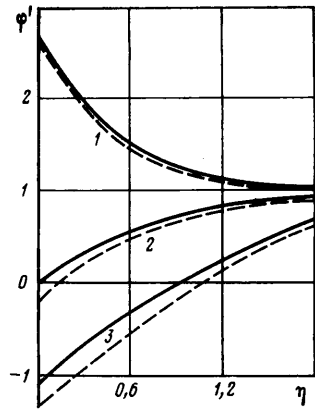
Все последующие выводы будут верны и для решений, отвечающих сепаратрисе S_2 , с точностью до обратного знака у параметра m .

Из уравнений (2.2), (2.3) следует, что область положительных значений параметров m ограничена значением $m^* = 2\sqrt[3]{3}$, соответствующим $A = -1$; каждому $m \geq 0$ отвечают два различных значения A , что означает наличие двух приближенных решений задачи для одного и того же граничного условия $\varphi''(0) = m \geq 0$. Параметр A при этом меняется от -2 до 1 , $m(1) = m(-2) = 0$; решение с граничным условием $m=0$, $A=1$ является точным решением задачи (1.4)–(1.6) и описывает течение ($\varphi = \eta$, $\varphi' = 1$) идеальной жидкости в отсутствие термокапиллярных сил на свободной поверхности [1]; область отрицательных значений параметра m не ограничена, при этом A меняется от 1 до $+\infty$ и каждому значению m отвечает одно значение A , т. е. единственное приближенное решение задачи.

3. Численное решение. Численные расчеты подтверждают проведенный анализ приближенного решения динамической задачи. Расчеты проводились методом «продолжения по параметру» для различных значений чисел m и Pr , причем динамическая и тепловая задачи решались совместно



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены параметрические кривые $m(A)$: штриховая линия — приближенное решение, сплошная — результат расчетов. (Отметим качественную аналогию вида этих кривых с кривой, полученной в задаче о пограничном слое на полубесконечной стенке, движущейся параллельно потоку, для коэффициента трения на стенке в зависимости от отношений скорости ее движения к скорости потока [4].) Для значений $A > -0,5$ получаем хорошее совпадение приближенного решения с расчетным, для $A < -0,5$ отклонение численных результатов от аналитического приближения объясняется существенным влиянием отбрасываемого в уравнении (2.1) члена φ'' . На фиг. 3 показаны кривые решений $\varphi'(\eta)$: 1 — для $m = -3$, 2 и 3 — два решения, отвечающие значению $m_* = 1,2326$. Сплошной линией изображены численные результаты, штриховой — соответствующие приближенные решения. На основании численных расчетов можно сделать следующие выводы.

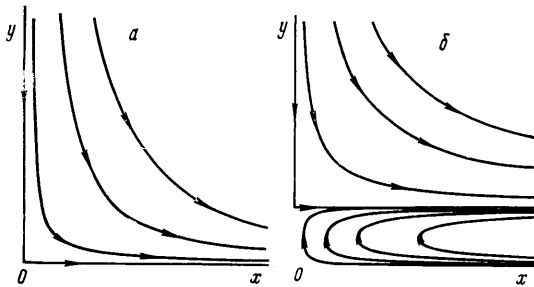
Характер течения существенно меняется в зависимости от величины и знака параметра m . Так, при $m < 0$ поток жидкости ускоряется силами Марангони, действующими на поверхности, как бы «растягивая» ее в разные стороны от точки (линии) растекания $x=0$. Распределение линий тока для $m = -5$ показано на фиг. 4, а. Соответствующее решение тепловой задачи для отрицательных значений m показывает, что с ростом числа Pr область неравномерного распределения температуры уменьшается так, что для больших величин Pr можно говорить о тепловом пограничном слое около свободной поверхности, где тепловой поток максимален.

В отсутствие сил Марангони ($m=0$) получаем нетривиальное решение, описывающее течение идеальной жидкости. Распределения скорости, давления и температуры при этом имеют вид

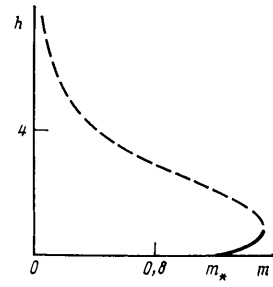
$$u = ax, \quad v = -ay, \quad p = p_0 - \frac{1}{2}\rho a^2(x^2 + y^2)$$

$$T = T_0 + \beta x \left\{ \exp\left(-\frac{ay^2}{2\chi}\right) - \sqrt{\frac{\pi a}{2\chi}} y \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{2\chi}} y\right) \right] \right\}$$

Когда сила Марангони действует в направлении к точке растекания ($m > 0$), поток жидкости начинает тормозиться, и при достижении параметром m величины $m_* = 1,2326$ скорость жидкости на свободной поверхности становится равной нулю. С математической точки зрения свободная поверхность оказывается полностью эквивалентной твердой поверхности, а рассматриваемая задача — аналогичной задаче о течении около критической точки при набегании потока вязкой жидкости из бесконечности на плоскую стенку, поставленную поперек потока [5]. При дальнейшем увеличении числа Марангони скорость на свободной поверхности становится отрицательной, что приводит к возникновению около свободной поверхно-



Фиг. 4



Фиг. 5

сти возвратного течения. Картина линий тока для $m=1,5$ представлена на фиг. 4, б. Ширина зоны возвратного течения растет с увеличением m до своего максимального значения $h=h_m$, достигаемого при $m=m^*\approx 1,51$. Зависимость ширины зоны возвратного течения от параметра m (в безразмерном виде) показана сплошной линией на фиг. 5. Для значений $m>1,51$ автомодельного решения поставленной задачи не существует.

В соответствии с решением для распределения температуры максимум теплового потока достигается на свободной поверхности при $m<m^*$ и внутри жидкости в зоне возвратного течения — при $m>m^*$. При постоянном значении числа Pr ширина области неравномерного распределения температуры увеличивается с ростом числа m , а при неизменном m уменьшается с ростом числа Pr .

Существенным результатом является наличие второго решения в области изменения параметра m от 0 до m^* . В соответствии с этим решением около свободной поверхности жидкости имеется зона возвратного течения. Ширина этой зоны растет до бесконечности при стремлении m к нулю (штриховая линия на фиг. 5). При $m=m^*$ ее ширина совпадает с h_m , полученной для первого решения. Согласно этому решению, тепловой поток, направленный внутрь жидкости, минимален на свободной поверхности и обращается в ноль при некотором значении $Pr=Pr^*$. Для значений $Pr>Pr^*$ поперечный тепловой поток на поверхности становится отрицательным и меняет знак внутри жидкости в области возвратного течения. В отличие от первого решения ширина области неравномерного распределения температуры растет с увеличением числа Pr , а при неизменном значении Pr стремится к бесконечности при $m\rightarrow 0$, как и ширина зоны возвратного течения $h(m)$.

Полученные результаты численных расчетов и приближенного решения динамической задачи можно полностью перенести на случай линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры $\sigma=\sigma_0+\alpha(T-T_0)$, $d\sigma/dT=\alpha<0$ при задании на свободной поверхности распределения температуры вида $T=T_0+1/2\beta x^2$, $\alpha, \beta=\text{const}$. Роль числа Марангони при этом будет играть параметр $m=\alpha\beta/\rho a \sqrt{\nu \alpha}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 132–137.
2. Legros J. C., Limbourg-Fontaine M. C., Petre G. Influence of a surface Tension minimum as a function of temperature on the marangoni convection // Acta Astronaut. 1984. V. 11. № 2. P. 143–147.
3. Саночкин Ю. В. О движении жидкости под воздействием поверхностной силы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 187–190.
4. Казаль П. О совокупности решений уравнения пограничного слоя // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1974. № 4. Вып. 146. С. 71–79.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VIII.1988