

УДК 532.516

БАТЧАЕВ А. М., ПОНОМАРЕВ В. М.

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛМОГОРОВА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Одним из немногих классов движений жидкости, допускающих точное решение линейной задачи устойчивости, являются течения с периодическим по одной из пространственных переменных профилем скорости. С другой стороны, такие течения сами могут служить моделью закритического течения, возникающего после потери устойчивости относительно пространственно-периодических возмущений.

Теоретически наиболее полно исследовано плоскопараллельное течение вязкой однородной жидкости, создаваемое внешней силой с синусоидальным по одной из координат профилем, — течение Колмогорова [1–3]. Оно оказывается неустойчивым относительно длинноволновых возмущений уже при числе Рейнольдса порядка единицы. Формально построенное решение уравнений Навье — Стокса для закритического режима оказывается неустойчивым при любой закритичности [4, 5].

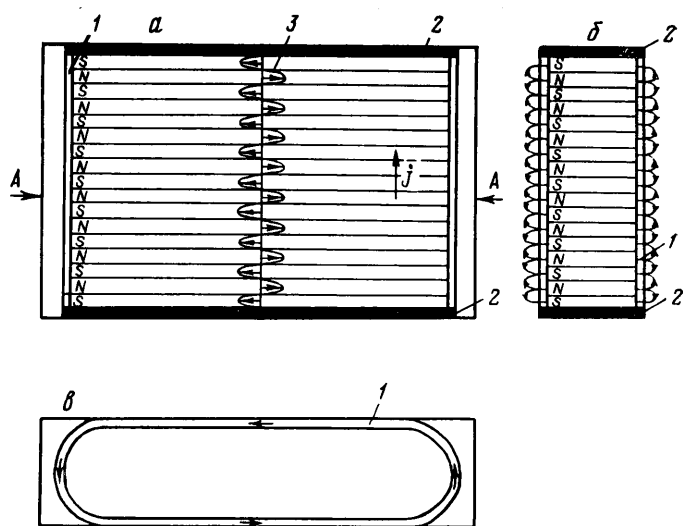
Однако эксперименты, проведенные с лабораторной моделью течения Колмогорова в плоском канале, показали, что существует интервал закритичности с устойчивым вторичным течением [6–8]. Одной из причин этого может быть трение жидкости о дно канала, существенно меняющее кривую устойчивости [6]. К аналогичному результату приводит также ограничение потока боковыми стенками [9].

В данной работе приводятся результаты экспериментального и теоретического исследования лабораторной модели течения Колмогорова в канале на цилиндрической поверхности, что исключает влияние концевых участков в плоских каналах. Число полупериодов внешней силы могло меняться от 2 до 22. Показано, что тип вторичного течения зависит от числа полупериодов основного потока: бегущая волна — при нечетном числе полупериодов, квазистационарная вихревая структура — при четном числе полупериодов и автоколебательный режим — при ширине канала, равной четырем полупериодам. Для теоретического анализа использовалась галеркинская аппроксимация уравнений гидродинамики. Полученная система уравнений решалась численно совместно с анализом естественно возникающих при этом задач на собственные значения.

1. Для лабораторного моделирования течения Колмогорова применялся усовершенствованный вариант экспериментальной установки, использованной ранее в [7]. Ее схема показана на фиг. 1.

Движение жидкости (раствор  $\text{CuSO}_4$  концентрации  $c=100$  г/л) происходит в канале, образованном двумя цилиндрическими поверхностями 1, расстояние между которыми 0,65 см. Внутренняя стенка канала состоит из двух плоских участков длиной 40,5 см каждый, соединенных между собой круговыми полуцилиндрами диаметром 10,4 см. На этой стенке в пазы уложены ленты магнитоэластичной резины, создающие периодическое магнитное поле с периодом 1,95 см. Величина индукции магнитного поля в максимуме составляет 300 Гс. По ширине область течения ограничивается медными электродами 2. Параметры установки позволяют исследовать течения с числом периодов от 1 до 11. Визуализация течения проводилась при помощи алюминиевой пудры.

Когда между электродами течет электрический ток (управляемый параметр течения), на электролит действует сила Ампера, имеющая близкий к синусоидальному профиль 3. Отметим, что электроды располагаются по нейтральям внешней силы. При слабом токе (соответствующее значение числа Рейнольдса, определенного как обезразмеренная внешняя маг-



Фиг. 1

нитогидродинамическая сила, мало) в канале наблюдается ламинарное течение, представляющее собой систему струй чередующейся направленности. Профиль скорости течения определяется профилем внешней силы. При увеличении силы тока и переходе через критическое значение  $I_*$ , зависящее от числа полупериодов, первичный стационарный ламинарный режим теряет устойчивость. При этом формируется вторичный вихревой режим, устойчивый в некотором интервале за критичности.

При слабой за критичности наблюдаются следующие типы вторичных течений в зависимости от числа полупериодов внешней силы на ширине канала: а) квазистационарный вихревой режим при четном числе полупериодов, за исключением случая четырех полупериодов; б) автоколебательный режим в случае четырех полупериодов; в) режим бегущей волны (движущаяся с постоянной скоростью вдоль канала периодическая вихревая структура) при нечетном числе полупериодов.

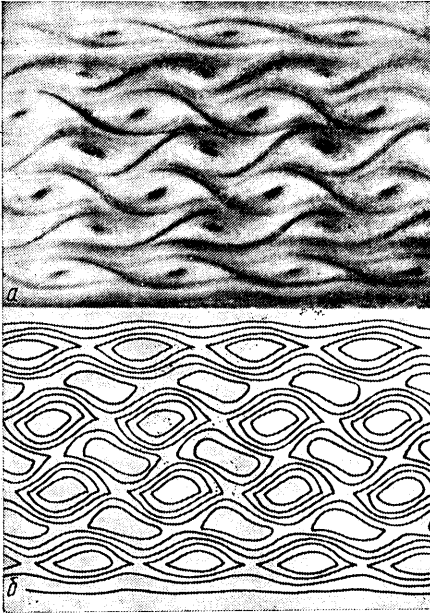
Вид возникающих при потере устойчивости вторичных течений показан на фиг. 2, 3.

Фотография на фиг. 2, а относится к за критическому режиму для канала с восемью полупериодами внешней силы. Основное отличие от картины вторичного течения, построенного на основе теории [1-3], заключается в наклоне вертикального ряда вихрей, наблюдающемся и в экспериментах с другим числом полупериодов. В установившемся режиме происходит сдвиг верхнего ряда вихрей относительно нижнего примерно на длину волны. Это указывает на участие в формировании за критического режима возмущений поля скорости, не являющихся периодическими по вертикальной координате с периодом внешней силы.

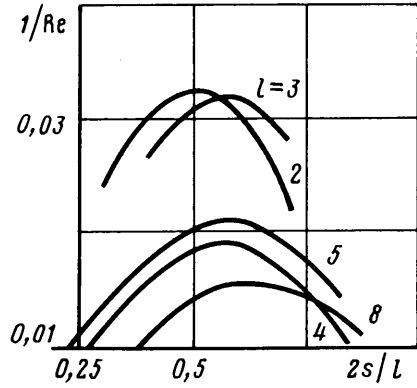
Автоколебательный режим движения показан на фиг. 3, а, б для сдвинутых на  $\pi/2$  фаз колебаний. В течение одного периода верхняя цепочка вихрей сдвигается влево на половину волны, а нижняя на то же расстояние сдвигается вправо. При этом седловые точки и центры вихрей в центральной цепочке меняются местами. Этот режим возникает практически сразу же при потере устойчивости ламинарного течения.

Общая картина вторичного течения для канала с нечетным числом полупериодов в основном такая же, как для канала с восемью полупериодами, но с общим дрейфом вдоль канала.

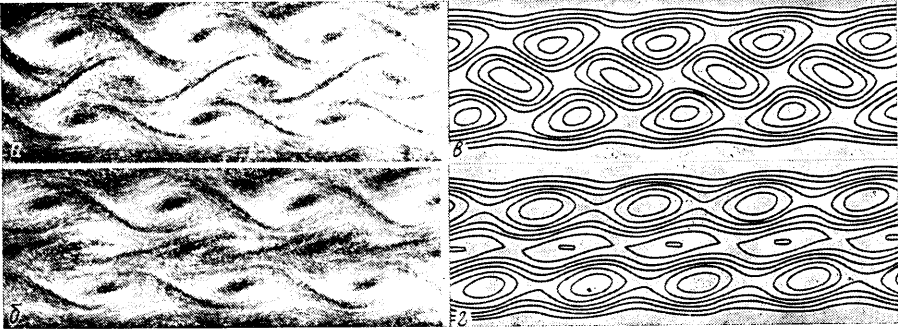
В установившемся вторичном течении, как правило, наблюдается слабая нестационарность вихревой структуры, нарушающая ее однородность вдоль канала. С увеличением ширины канала этот процесс усиливается.



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

При этом в течении присутствуют возмущения поля скорости с близкими волновыми числами. По-видимому, это объясняется заметным уплощением кривых устойчивости ламинарного течения с увеличением числа полупериодов (см. фиг. 4), т. е. возможностью формирования закритического режима сразу с несколькими волновыми числами.

2. Ввиду слабой электропроводности жидкости ее движение описывается уравнениями Навье — Стокса с заданным полем сил, определяемым распределениями плотности электрического тока и индукции магнитного поля. Выберем систему координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль канала, ось  $y$  — по высоте и ось  $z$  — по нормали к цилиндрической поверхности. Так как электрический ток направлен по оси  $y$ , то действующая на жидкость сила определяется  $z$ -компонентой индукции магнитного поля, которая ввиду его периодичности имеет вид

$$B_z = B_0 \exp\left(\frac{-l\pi z}{R}\right) \sin \frac{l\pi y}{R}$$

и соответственно плотность силы

$$f = \gamma \exp\left(\frac{-l\pi z}{R}\right) \sin \frac{l\pi y}{R} i_x, \quad \gamma = \frac{B_0 I}{L_0 H_0 c \rho} \quad (2.4)$$

Здесь  $R$  — ширина,  $L_0$  — длина,  $H_0$  — высота канала,  $I$  — величина полного тока,  $l$  — число полупериодов магнитного поля,  $c$  — скорость света,  $\rho$  — плотность жидкости.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= 2\pi \frac{\mathbf{r}}{R}, & t' &= \frac{t}{T_0}, & \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{V}}{V_0}, & p' &= \frac{p}{\rho V_0^2} \\ V_0 &= \frac{\gamma}{\nu} \left( \frac{R}{2\pi} \right)^2, & T_0 &= \frac{2\pi\nu}{\gamma R}, & L &= \frac{2\pi L_0}{R}, & H &= \frac{2\pi H_0}{R} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Опуская ниже штрихи, получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} - \nabla \left( p + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \exp \left( -\frac{lz}{2} \right) \sin \left( \frac{ly}{2} \right) \mathbf{i}_x + \text{rot rot } \mathbf{u} \right\} \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0, & \text{Re} &= \frac{\gamma}{\nu^2} \left( \frac{R}{2\pi} \right)^3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

с граничными условиями периодичности  $u(x+L) = u(x)$  и прилипания на стенках канала  $z=0, H$  и  $y=0, 2\pi$ .

Ниже рассматриваются движения таких масштабов, что можно пренебречь кривизной канала и нормальной к цилиндрической поверхности компонентой скорости  $u_z$ . Тогда из (2.3) следует, что основное течение имеет вид

$$\mathbf{u}_0 = b(z) \sin \left( \frac{ly}{2} \right) \mathbf{i}_x \quad (2.4)$$

Поля скорости с  $u_z=0$  можно описать  $z$ -компонентой векторного потенциала скорости  $A = \{0, 0, \Psi\}$

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

Для галеркинской аппроксимации уравнений (2.3) разложим  $\Psi$  по системе функций задачи на собственные значения [9]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta \Psi + k^2 \Psi) = 0 \quad (2.6)$$

При указанных выше граничных условиях решение (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= g_m(z) \Phi_j^{(s)}(y) \exp(isx), \quad \alpha = \{m, j, s\} \\ g_m &= \sin f_m z, \quad f_m = (2m-1) \frac{\pi}{2H} \\ \Phi_j^{(s)}(y) &= A_j \sin \theta_j y + B_j \cos \theta_j y + C_j \text{sh } sy + D_j \text{ch } sy \\ k_\alpha^2 &= f_m^2 + \theta_j^2 + s^2, \quad j=1, 2, 3, \dots, m=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Значения  $\theta_j$  определяются уравнением

$$2(1 - \cos 2\pi\theta \text{ch } 2\pi s) + \left( \frac{s}{\theta} - \frac{\theta}{s} \right) \sin 2\pi\theta \sin 2\pi s = 0 \quad (2.8)$$

При  $s=0$  можно положить

$$\Phi_j^{(0)}(y) = B_j \cos \frac{iy}{2} \quad (2.9)$$

Легко показать, что поля скорости, определяемые (2.8), (2.9), орто-

гональны в энергетической норме

$$(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_{\alpha'}) = \int_0^H dz \int_0^{2\pi} dy \int_0^L dx u_\alpha u_{\alpha'}^* = N_\alpha^2 \delta_{\alpha\alpha'} \quad (2.10)$$

При малой толщине слоя  $H$  коэффициенты разложения (2.4) по системе, связанной с  $\Psi_\alpha$ , быстро убывают с ростом  $m$ , поэтому ниже будем учитывать только моды с  $m=1$  и опускать индекс  $m$ .

Получим систему уравнений, описывающую слабозакритичный режим течения жидкости. Для этого рассмотрим поле скорости вида

$$\Psi = g_l(z) \left\{ \sum_l A_l \Phi_l^{(0)}(y) + \sum_j \Phi_j^{(s)}(y) (C_j e^{isx} + C_j^* e^{-isx}) \right\} \quad (2.11)$$

для коэффициентов которого из (2.3) следует система уравнений ( $N_\alpha^2=1$ )

$$\begin{aligned} \frac{dA_{l'}}{dt} + \frac{k_{l'}^{(0)^2}}{\text{Re}} A_{l'} + F_{l'} &= \frac{G_l}{\text{Re}} \delta_{ll'} \\ \frac{dC_j}{dt} + \frac{k_j^{(s)^2}}{\text{Re}} C_j + \sum_{l,j'} A_l V_{jj'}^l C_{j'} &= 0 \\ F_l &= - \sum_{j,j'} (C_j^* V_{jj'}^l C_{j'} + C_j V_{jj'}^{*l} C_{j'}^*) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} V_{jj'}^l &= isL \int_0^H g_l^2 dz \int_0^{2\pi} \left( \theta_j^2 + s^2 - \frac{l^2}{4} \right) \Phi_j^{(s)} \Phi_{j'}^{(s')} \sin \frac{ly}{2} dy \\ G_l &= \pi L \int_0^H \exp\left(-\frac{lz}{2}\right) g_l(z) dz \end{aligned}$$

Здесь учитываются только возмущения с одной длиной волны  $s$  и влияние возмущений на профиль скорости основного течения, которое может приводить к сдвигу волнового числа в закритическом режиме [10].

3. При достаточно малом значении  $\text{Re}$  система (2.12) имеет единственное решение

$$A_{l'} = \frac{G_l}{k_l^{(0)^2}} \delta_{ll'}, \quad C_j = 0 \quad (3.1)$$

Решение линеаризованной относительно (3.1) системы (2.12) позволяет определить зависимость критического значения числа  $\text{Re}_*$  от волнового числа  $s$  для течения с заданным количеством полупериодов внешней силы  $l$ . При расчетах в (2.12) не учитывались мелкомасштабные моды с индексами  $j > J$ , где величина  $J$  определялась так, чтобы увеличение  $J$  в 2 раза меняло значение  $\text{Re}_*$  не более чем на 5%. Минимальное значение  $J$  зависит от  $l$  и  $s$  и для приведенных ниже значений параметров равно  $\sim 10$ .

Результаты расчетов приведены на фиг. 4 для  $l=2-5,8$ . Из поведения кривых устойчивости следует, что наиболее опасные возмущения имеют волновые числа, близкие к  $s_* \approx 0,3l$ . Это означает, что число вихрей по оси  $x$ , возникающих при потере устойчивости периодического течения, практически не зависит от ширины канала при заданном периоде внешней силы, что хорошо подтверждается в эксперименте. Значения

рассчитанных величин критических токов согласуются с экспериментальными данными с точностью  $\sim 10\%$  ( $I_* \approx 2,2A$  при  $l=4$  и  $\approx 1,1A$  при  $l=8$ ).

При мягком возбуждении характер движения жидкости в закритическом режиме определяется мнимой частью собственных значений матрицы устойчивости. Легко показать, что при одинаковой четности  $l$  и  $j+j'$

$$V_{jj'}^l = 0 \quad (3.2)$$

Из анализа линейной задачи, соответствующей (2.12), с учетом (3.2) следует, что мнимые части собственных значений при переходе через критическое значение числа Рейнольдса, вообще говоря, отличны от нуля при нечетном числе полупериодов и равны нулю при четном. В соответствии с представлением поля скорости (2.11) это отвечает режиму бегущей волны в первом случае и стационарному режиму — во втором. Как отмечалось выше, обе эти ситуации наблюдаются в эксперименте, исключая канал с  $l=4$ .

Численное решение задачи на собственные значения при  $l=4$  показывает, что переходу через критическую кривую соответствуют два сопряженных значения  $\pm i\omega$ .

В этом случае в закритическом режиме система (2.12) имеет три решения, отличающихся от (3.1), два из которых соответствуют режимам бегущей волны и третье — автоколебательному режиму. Устойчив только автоколебательный режим, соответствующий наблюдаемому в эксперименте.

Такое поведение течения в закритическом режиме подтверждается численным интегрированием системы (2.12) в интервале чисел Рейнольдса  $1 < Re/Re_* \leq 2$ . Получаемая при этом картина течения в плоскости  $z = \text{const}$  хорошо соответствует визуально наблюдаемой. Для сравнения на фиг. 2, б и 3, в, г показаны рассчитанные в соответствии с (2.11) линии тока в стационарном и автоколебательном режимах при  $Re/Re_* = 1,5$ .

Согласно уравнениям (2.12), режим бегущей волны и стационарный режим становятся неустойчивыми по отношению к возмущениям этой же длины волны  $s$  при  $Re/Re_* \geq 2$  и также переходят в автоколебательные режимы. Однако визуальная идентификация этих режимов в эксперименте представляет определенные трудности в связи с тем, что при более низкой надкритичности течение становится неустойчивым по отношению к возмущениям другой длины волны  $s_1 \neq s$ , что может вызвать переход к течению с набором продольных волновых чисел или к течению с новым волновым числом [10].

Авторы благодарят А. М. Обухова за внимание к работе, Г. Г. Дементьева за помощь в изготовлении экспериментальной установки, В. А. Довженко и Ф. В. Должанского за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140–1143.
2. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 453–467.
3. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение/Под ред. Обухова А. М. М.: Наука, 1981. 368 с.
4. Кляцкин В. И. К нелинейной теории устойчивости периодических течений // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 263–271.
5. Непомнящий А. А. Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 886–891.
6. Бондаренко Н. Ф., Гак М. З., Должанский Ф. В. Лабораторная и теоретическая

- модели плоского периодического течения // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 10. С. 1017–1026.
7. *Батчаев А. М., Довженко В. А.* Лабораторное моделирование потери устойчивости периодических зональных течений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 582–584.
  8. *Обухов А. М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 101–111.
  9. *Пономарев В. М.* Об устойчивости одного класса осесимметричных течений несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 1. С. 3–9.
  10. *Довженко В. А., Крымов В. А., Пономарев В. М.* Экспериментальное и теоретическое исследование сдвигового течения, возбуждаемого аксиально-симметричной силой // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 8. С. 693–704.

Москва

Поступила в редакцию  
9.III.1987