

УДК 532.51.013.4:536.25

ВОЙТЕШОНОК В. С., ЧЕРКАСОВ С. Г.

**АВТОМОДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛОВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ  
ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЕМКОСТЯХ**

При подводе тепла к емкости, полностью или частично заполненной жидкостью, в объеме жидкости возникает тепловая стратификация, т. е. увеличение температуры по высоте. Вертикальный профиль температуры изменяется с течением времени и зависит в общем случае как от распределения внешних теплопритоков, так и от интенсивности конвекции. В [1, 2] подробно исследованы ламинарная естественная конвекция и температурное расслоение для частично заполненного цилиндрического сосуда при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям. В частности, обнаружено, что при достаточно интенсивном подводе тепла сверху реализуется автоматический режим, когда распределение температуры по вертикали перестает зависеть от числа Рэлея, характеризующего скорость течения в свободно-конвективном пограничном слое. В данной работе на примере конвекции в вертикально и горизонтально расположенных цилиндрах показано, что указанный эффект имеет общий характер и проявляется при достаточно большой величине вертикального градиента температуры. При этом задача о нахождении вертикального профиля температуры сводится к решению одномерного нестационарного уравнения теплопроводности с источниками, которые зависят только от формы емкости и распределения теплопритоков и не зависят от числа Рэлея.

1. Рассмотрим сначала для определенности конвекцию в частично заполненном вертикальном цилиндрическом сосуде с теплоизолированным дном. Уравнение теплопроводности и граничные условия представим в безразмерном виде

$$r \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \frac{\partial}{\partial r}(ru\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rv\theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

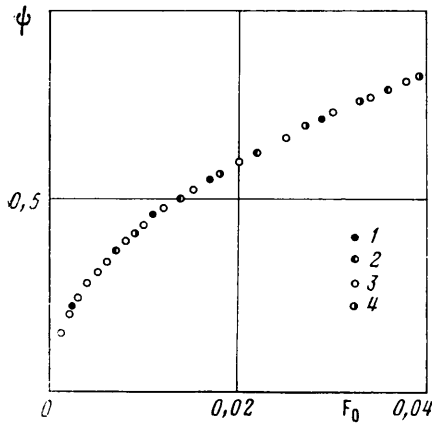
$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=1} = q_w(z), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=H} = q_s.$$

Здесь  $u, v$  — составляющие скорости по осям  $r, z$  (ось  $z$  направлена против вектора силы тяжести),  $\theta = (T - T_0)\lambda/qR$  — безразмерная температура ( $T_0$  — начальная температура),  $Fo = at/R^2$  — число Фурье (безразмерное время),  $\lambda, a$  — коэффициенты тепло- и температуропроводности жидкости,  $R$  — радиус сосуда,  $q$  — масштаб внешнего теплопритока,  $q_w$  и  $q_s$  — безразмерные тепловые потоки, подводимые к боковой и свободной поверхностям.

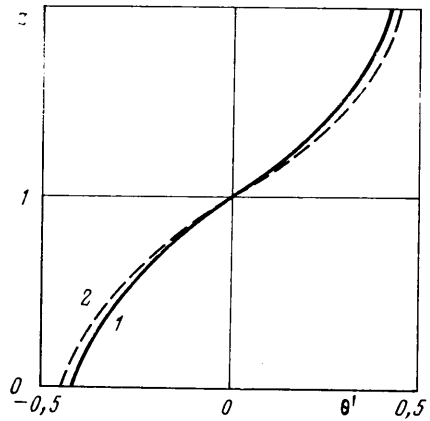
При числах Рэлея  $Ra > 10^4$  ( $Ra = g\beta qR^4/\nu a\lambda$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta, \nu$  — коэффициенты теплового расширения и кинематической вязкости) в объеме жидкости четко различаются пограничный слой на боковой стенке и центральное ядро, в котором температура постоянна по горизонтали [3]. Поэтому температуру можно представить в виде

$$\theta(r, z, Fo) = \theta_0(z, Fo) + \Delta\theta(r, z, Fo), \quad \Delta\theta = 0 \quad (0 \leq r \leq R_0) \quad (1.2)$$

где  $R_0$  — координата границы пограничного слоя,  $\theta_0$  — температура в ядре,  $\Delta\theta$  — перегрев жидкости в пограничном слое. Введем среднюю по горизон-



Фиг. 1



Фиг. 2

тали температуру  $\theta'$  и проинтегрируем (1.1) с учетом (1.2) и условий непротекания

$$\frac{\partial \theta'}{\partial Fo} = 2q_w + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \theta_0 \int_0^1 v 2r dr + \int_{R_0}^1 v \Delta \theta 2r dr \right) \quad (1.3)$$

$$\theta'(z, Fo) = \int_0^1 \theta 2r dr$$

Первый интеграл в правой части (1.3) тождественно равен нулю из условия неразрывности, а второй интеграл уменьшается с ростом стратификации, поскольку уменьшаются и вертикальная компонента скорости, и перегрев в пограничном слое, и сама толщина пограничного слоя [1]. Таким образом, при достаточно сильной стратификации, т. е. при большом вертикальном градиенте температуры, уравнение для определения средней по горизонтали температуры и краевые условия принимают вид

$$\frac{\partial \theta'}{\partial Fo} = 2q_w + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right|_{z=H} = q_s, \quad \theta' |_{Fo=0} = 0$$

В это уравнение не входит явно скорость конвективного течения, поэтому его решение не зависит от числа Рэлея. Рассмотрим сначала случай, когда стратификация обусловлена интенсивным нагревом сверху ( $q_s=4$ ), а сбоку тепло либо равномерно подводится ( $q_w=1$ ), либо равномерно отводится ( $q_w=-1$ ). Из (1.4) следует, что при этом функция  $\psi = \theta' - 2Fo q_w$  одинакова для обоих значений  $q_w$ . На фиг. 1 показано изменение во времени значения  $\psi$  на свободной поверхности жидкости ( $z=H$ ), полученное из численного решения (1.4) и из численного решения методом [4] двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска [5] при числе Прандтля  $Pr=1$  и  $H=2$  (точки 2—4). Точкам 1—4 на фиг. 1 соответствуют: 1 — решение (1.4); 2 —  $q_w=1$ ,  $Ra=10^9$ ; 3 —  $q_w=-1$ ,  $Ra=10^9$ ; 4 —  $q_w=-1$ ,  $Ra=10^6$ . Решение уравнения (1.4) практически совпадает с решением полных уравнений естественной конвекции.

Сильная стратификация может иметь место и при отсутствии теплоподвода сверху. На фиг. 2 показаны вертикальные профили температуры, вычисленные из уравнения (1.4) (линия 1) и из полных уравнений конвекции [4] при  $Ra=10^7$ ,  $H=2$ ,  $Pr=1$  (штриховая линия 2) в момент вре-

мени  $Fo=0,1$  для следующих условий теплоподвода:

$$q_s=0, \quad q_w=2H^{-1}(z-0,5H) \quad (1.5)$$

В этом случае также реализуется автомодельный режим стратификации, в котором справедливо уравнение (1.4).

Точность уравнения (1.4) падает в тех областях, где стратификация мала. В частности, для условий (1.5) это области около дна и свободной поверхности. Однако в суммарный вертикальный перепад температуры эти области вносят относительно малый вклад, поэтому при расчете суммарного вертикального перепада температуры можно формально распространить уравнение (1.4) на весь объем жидкости.

В рассмотренных выше случаях как интенсивность, так и структура конвективного течения существенно различаются. Так, в условиях (1.5) в жидкости имеются два контура циркуляции (в верхней части сосуда жидкость около боковой стенки всплывает вверх, а в нижней — опускается вниз), тогда как при равномерном тепловом потоке на боковой стенке течение имеет одновихревой характер. При малых временах прогрева в поле течения имеют место колебания, связанные с появлением и затуханием вихрей около оси симметрии [3]. Результаты, показанные на фиг. 1, получены при значительно различающихся числах Рэлея, когда скорости в пограничном слое различаются приблизительно на порядок. Тем не менее, как следует из фиг. 1, 2, уравнение (1.4) во всех этих случаях позволяет достаточно точно рассчитывать распределение температуры по вертикали. Поэтому можно считать, что рассмотренные выше примеры соответствуют, с точки зрения тепловой стратификации, некоторому автомодельному режиму, в котором вертикальный профиль температуры определяется только условиями теплоподвода к емкости, а влияние конвекции сводится к выравниванию температуры по горизонтали. Анализ накопленных к настоящему времени результатов численного моделирования конвекции позволяет сделать вывод о том, что переход к автомодельному режиму происходит тогда, когда характерная величина безразмерного вертикального градиента температуры приближается к единице, причем с ростом числа Рэлея этот предельный градиент температуры слабо уменьшается.

2. Уравнение (1.4) получено выше для случая вертикального цилиндрического сосуда. Однако аналогичным путем можно получить уравнения, описывающие стратификацию в автомодельном режиме и для емкостей другой формы. Рассмотрим двумерную конвекцию в полностью заполненном горизонтальном цилиндре с симметричным относительно вертикали теплоподводом  $q_n$  ( $q_n$  — безразмерный тепловой поток по нормали к границе жидкого объема). Введем декартову систему координат  $x, z$  с началом координат в центре цилиндра, где ось  $z$  направлена вверх ( $-1 \leq z \leq 1$ ), а ось  $x$  — перпендикулярно плоскости симметрии. Тогда уравнение границы имеет вид  $x_w=S(z)$ . За масштаб длины здесь принят радиус цилиндра. Уравнение теплопроводности и краевые условия для данного случая имеют следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \frac{\partial}{\partial x}(u\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v\theta) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=S} = q_n \cos \varphi, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{x=S} = q_n \sin \varphi, \quad \theta|_{Fo=0} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $\varphi$  — полярный угол, отсчитываемый от оси  $x$  против часовой стрелки. Интегрируя (2.1) в тех же предположениях, что и при выводе (1.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^S \theta dx = q_n \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^S \frac{\partial \theta}{\partial z} dx - q_n \sin \varphi \frac{dS}{dz} \quad (2.3)$$

Вводя среднюю по горизонтали температуру и учитывая, что температура изменяется по горизонтали только в тонком пограничном слое, приближенно можно принять

$$\int_0^s \frac{\partial \theta}{\partial z} dx = S \frac{\partial \theta'}{\partial z}$$

Поскольку  $S = \cos \varphi$ ,  $z = \sin \varphi$ , то уравнение (2.3) преобразуется к виду

$$\cos \varphi \frac{\partial \theta'}{\partial F_0} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \cos \varphi \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) + q_n \cos \varphi + q_n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \quad (2.4)$$

При выводе уравнения (2.4) неявно предполагалось, что стратификация велика, а на границе жидкого объема имеется «упорядоченный» пограничный слой. Однако в рассматриваемом случае структура конвективного течения более сложная, что связано с конвективной неустойчивостью в нижней половине цилиндра, где жидкость подогревается снизу. Из экспериментов известно, что при подводе тепла только к нижней половине цилиндра конвективная неустойчивость приводит приблизительно к равномерному прогреву всей массы жидкости и стратификация при этом пренебрежимо мала по сравнению со случаем подвода такого же теплового потока к верхней половине цилиндра. С учетом этих фактов ясно, что уравнение (2.4) неприменимо в областях, где преобладает конвективная неустойчивость и, следовательно, стратификация мала.

Как отмечалось выше, области с малой стратификацией дают малый вклад в суммарный вертикальный перепад температуры. Поэтому температуру в нижней половине цилиндра можно рассчитывать грубо, в частности исходя из следующих физических соображений. Уравнение (2.4) эквивалентно тому, что в областях с сильной стратификацией перенос тепла между горизонтальными слоями жидкости осуществляется только теплопроводностью, поскольку источники в правой части этого уравнения точно равны теплу, поступающему в данный горизонтальный слой жидкости через твердую границу. В условиях же конвективной неустойчивости, когда в ядре имеются нерегулярно всплывающие снизу прогретые жидкие объемы (конвективные термики), появляется дополнительный конвективный перенос тепла. Это конвективное перемешивание выравнивает вертикальный профиль температуры в нижней части цилиндра и переносит часть тепла в верхнюю половину. Будем учитывать эти конвективные течения, и для этого изменим источники тепла в уравнении (2.4). Для верхней половины цилиндра введем дополнительное равномерное тепловыделение  $Q_0$ , физически соответствующее дополнительному теплу, приносимому конвективными термиками.

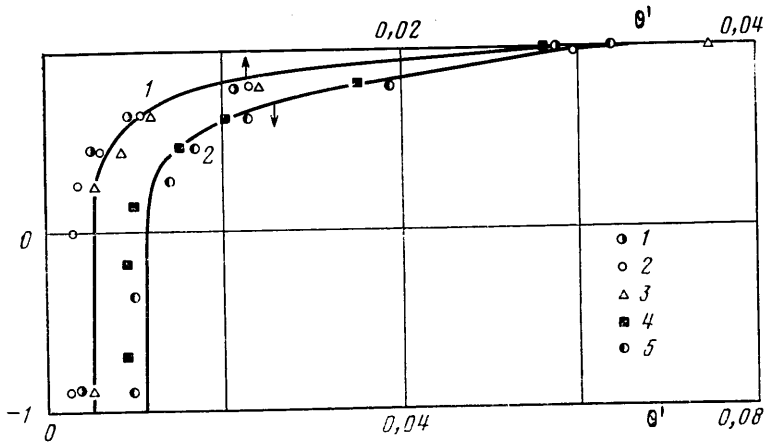
Далее распространим уравнение (2.4) и на нижнюю половину цилиндра, но при этом зададим только равномерное тепловыделение. Потребуем, чтобы распределение источников по высоте было непрерывным. С учетом того что суммарный теплоподвод известен, сделанных предположений достаточно, чтобы замкнуть задачу. Окончательное уравнение для расчета вертикального профиля температуры принимает вид

$$\cos \varphi \frac{\partial \theta'}{\partial F_0} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \cos \varphi \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) + Q(z); \quad Q(z) = (q_n|_{\varphi=0} + Q_0) \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$$

$$Q(z) = (q_n + Q_0) \cos \varphi + q_n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.5)$$

где  $Q_0$  определяется из интегрального теплового баланса.

Решение уравнения (2.5) сравнивалось с экспериментальными данными, полученными для полностью заполненного водой горизонтального цилиндра радиусом 0,21 м, длиной 0,33 м и толщиной стенки  $2 \cdot 10^{-3}$  из сплава АМЦМ. Торцевые стенки



Фиг. 3

цилиндра были прозрачными. Равномерный по поверхности и постоянный по времени нагрев осуществлялся нагревателем из нержавеющей фольги, питающимся от стабилизатора. Для уменьшения потерь от нагревателя поверх него нанесен слой пенопласта и для оценки возможных отклонений теплового потока от равномерности в этом слое расположена термопара. Изменение вертикального профиля температуры внутри модели осуществлялось 24 медьконстантановыми термопарами, сигнал от которых коммутировался переключателем с малым уровнем помех, усиливался микровольтметром Ф116/1 и регистрировался самописцем ЭПП-09. Погрешность измерения прироста температуры составляла 3–10%. Поток тепла в жидкость вычислялся по изменению температуры в массиве жидкости.

Проведенные оценки показали, что на подвод тепла к жидкости в стратифицированном слое заметное влияние оказывают перетоки тепла вдоль стенки. Поэтому в расчетную схему было добавлено уравнение теплопроводности вдоль стенки, учитывающее отвод тепла в жидкость и утечки тепла через теплоизоляцию в окружающую среду

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Fo} = \frac{a_w}{a} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial y^2} + \frac{\rho c R}{\rho_w c_w \delta_w} (1 - q_n) - \frac{\lambda_a \rho c R^2 \theta_w}{\lambda \rho_w c_w \delta_a \delta_w} \quad (2.6)$$

$$\theta_w = (T_w - T_0) \lambda / q R$$

В этом уравнении  $\theta_w$  – безразмерная температура стенки ( $T_w$  – размерная температура стенки,  $T_0$  – начальная температура, равная температуре окружающей среды;  $q$  – плотность тепловыделения на нагревателе, принятая за масштаб теплового потока),  $\delta_w$  и  $\delta_a$  – толщины стенки и теплоизоляции,  $\lambda_a$  – коэффициент теплопроводности теплоизоляции,  $\rho$ ,  $c$ ,  $\rho_w$ ,  $c_w$  – плотность и удельная теплоемкость жидкости и материала стенки,  $y$  – безразмерная координата, отсчитываемая вдоль стенки.

При достаточно больших числах Рэлея, реализованных в эксперименте, перепады температуры в пограничном слое существенно меньше перепадов температуры по вертикали. Поэтому в уравнении (2.6) температуру стенки в каком-либо горизонтальном сечении можно положить равной средней температуре жидкости в этом же сечении. Тогда в двух уравнениях (2.5) и (2.6) остаются два неизвестных –  $\theta'$  и  $q_n$ , т. е. задача становится замкнутой. Уравнения (2.5), (2.6) решались методом прогонки.

На фиг. 3 показаны расчетные (сплошные линии) и экспериментальные результаты для распределения температуры по вертикали в моменты времени 10 мин (кривая 1, точки 1–3) и 40 мин (кривая 2, точки 4, 5). Точкам на фигурах соответствуют следующие значения удельного тепловыделения  $q$  на нагревателе: 1, 4 – 340 Вт/м<sup>2</sup>, 2, 5 – 1660, 3 – 6500.

Качественно и количественно расчетные и экспериментальные данные совпадают достаточно хорошо, причем, как и ожидалось, наиболее заметные различия наблюдаются для нижней части цилиндра, где стратификация мала. Отметим, что вблизи верхней точки цилиндра ( $\varphi = \pi/2$ ) дополнительное тепловыделение  $Q_0$  не играет роли по сравнению с последним членом в формуле для  $Q$  и уравнения (2.4) и (2.5) практически эквивалентны. Поэтому формальная подстановка в расчетную схему уравнения (2.4) вместо (2.5), хотя и приводит к нефизическим результатам для нижней

части цилиндра (большая неустойчивая стратификация), дает приблизительно верное распределение температуры в устойчиво стратифицированном верхнем слое.

Таким образом, проведенные тестовые расчеты для вертикального и эксперименты для горизонтального цилиндров показывают, что в областях с сильной стратификацией реализуется автоматический режим, в котором вертикальный профиль температуры определяется только условиями теплоподвода на границах емкости и не зависит от числа Рэлея. Начало автоматического режима соответствует числам Фурье, при которых толщина стратифицированного слоя заметно превышает толщину пограничного слоя, поэтому безразмерное время выхода на режим автоматической стратификации сокращается с ростом числа Рэлея.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черкасов С. Г. Естественная конвекция в вертикальном цилиндрическом сосуде при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 51–56.
2. Черкасов С. Г. Квазистационарный режим естественной конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 146–152.
3. Полежаев В. И., Бунэ А. В., Везуб Н. А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
4. Черкасов С. Г. Модифицированный численный метод для расчета тепловой конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде // Численные методы механики сплошной среды. 1984. Т. 15. № 5. С. 144–153.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию  
25.VII.1988