

МАКАРОВ С. Н., СМИРНОВ В. Е.

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН  
УМЕРЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

При анализе эволюции одномерных бегущих волн конечной амплитуды в вязком теплопроводном газе часто используют уравнение Бюргерса [1]. Это уравнение выводится в нелинейной акустике [1] в пренебрежении малыми третього порядка относительно интенсивности волны. Поэтому оно не учитывает неизэнтропический характер течения, что важно для газовой динамики.

В настоящей работе из уравнений вязкого теплопроводного газа получено простое эволюционное уравнение, учитывающее неизэнтропичность течения. Оно отличается от уравнения Бюргерса дополнительным членом, имеющим ясный физический смысл. Это уравнение пригодно для одномерных бегущих волн в диапазоне чисел Маха  $1 \leq M \leq 1,3$ . Полученное уравнение дает асимптотические законы затухания слабых ударных волн, верные в малых главного и следующего порядка для плоской [2], цилиндрической [3] и сферической [4] симметрии.

**1. Вывод уравнения.** Рассмотрим течение вязкого теплопроводного политропного газа с равновесными значениями плотности и скорости звука  $\rho_0, c_0$ . По газу движется одномерная расходящаяся бегущая волна, амплитуду которой будем характеризовать местным числом Маха  $M = v/c_0, 0 \leq M < 1$ . Длина волны мала по сравнению с радиусом фронта.

Для определения эволюции такой волны можно использовать метод медленно меняющегося профиля [1]. Вводя сопутствующую систему координат  $X = r - c_0 t, t$ , выпишем асимптотические условия

$$v, \rho', p', \eta, \zeta, \kappa = O(M); \quad r = O(M^{-1}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = O(M), \quad \frac{\partial}{\partial X} = O(1)$$

где  $v, \rho', p'$  — радиальная скорость, избыточные плотность и давление;  $\eta, \zeta, \kappa$  — коэффициенты сдвиговой, объемной вязкости и теплопроводности. После подстановки (1.1) в уравнения баланса массы, импульса и энтропии в главном приближении по  $M$  следует волновое уравнение. Во втором приближении имеем уравнение Бюргерса для плоских, цилиндрических и сферических волн [1].

Учет малых третьего порядка эквивалентен учету неизэнтропичности. Ниже он был проведен при двух упрощающих предположениях: условимся пренебрегать всеми диссипативными членами порядка  $O(M^3)$ , имеющими вид функции источника, а также всеми радиальными членами порядка  $O(M^3)$ . Первое оправданно при больших числах Рейнольдса, второе — при малой кривизне волнового фронта.

В процессе вывода были использованы самосогласованные выражения для  $\rho'$  и  $v$  [1]. Величина  $v_t$  в нелинейных слагаемых определялась из уравнения Бюргерса. В результате было получено следующее эволюционное уравнение для скорости течения (формулировка для плоского случая приведена в [5]):

$$v_t + \frac{n}{2} \frac{v}{t} + \varepsilon v v_x - \frac{b}{2\rho_0} v_{xx} = \frac{3}{4} \varepsilon \frac{b}{\rho_0 c_0} v_x^2 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma+1), \quad b = \zeta + \frac{4}{3} \eta + (\gamma-1) \frac{\kappa}{c_p}$$

Здесь  $n=0, 1, 2$  для плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Важно, что все кубические нелинейные члены сокращаются. Уравнение (1.2) отличается от уравнения Бюргерса ненулевым членом правой части. Он имеет особый вид и, как следует из неравновесной термодинамики, пропорционален плотности источника энтропии [6]. Из уравнения баланса энтропии при учете малых порядка  $O(M^3)$  имеем  $s_x = -(b/\rho_0 c_0 T_0) v_x^2$ , где  $s$  — необратимое приращение удельной энтропии вдоль профиля волны.

Рассмотрим предельный случай  $b \rightarrow 0$  и покажем, что уравнение (1.2) дает выражение для скорости фронта ударной волны, верное в малых главного и следующего порядка. Запишем условие на скачке  $(c_0 - D) [v] + 1/2 \varepsilon [v^2] = -3/4 \varepsilon T_0 [s]$  и используем равенство  $[s] = 1/8 \varepsilon [v]^3 / c_0 T_0$ . Получим

$$D = c_0 + 1/2 \varepsilon (v_1 + v_2) + 1/8 \varepsilon^2 [v]^2 / c_0 \quad (1.3)$$

Формула (1.3) хорошо известна в теории ударных волн и является точной до малых порядка  $O(M^2)$  включительно [2]. Уравнение Бюргерса дает только линейную поправку  $^{1/2}\epsilon(v_1+v_2)$  к скорости фронта.

Попытки вывести уравнение, подобное (1.2), предпринимались ранее [7-9]. При этом сохранялись все дивергентные диссипативные члены третьего порядка малости, что приводило к труднообозримым результатам. В [8] допущена ошибка при вычислении коэффициента  $A_4$  в формуле (1), стоящего перед членом типа источника энтропии.

**2. Асимптотические формулы.** Ранее было установлено (см., например, [10]), что из уравнения Бюргерса можно вывести асимптотические законы затухания ударных волн в малых главного порядка. Покажем, что уравнение (1.2) дает асимптотическую форму профиля и закон движения слабой ударной волны, верные в малых главного и следующего порядков. Уточненные законы затухания плоских, цилиндрических и сферических волн получены в [2-4].

При  $b \rightarrow 0$  в гладкой области уравнение (1.2) сводится следующей заменой [1] к обычному уравнению простых волн:  $v=V, V/\sqrt{t}; v/t \xi=t-1, 2(\sqrt{t}-1), \ln t, n=0, 1, 2$

$$V_{\xi} + \epsilon V V_x = 0$$

Начальное условие  $\Phi(X)$  для этого уравнения задано при  $\xi=0$  ( $t=1$ ). Положим  $\Phi(0)=0, \Phi'(0)>0$ . Тогда для всех  $\xi \geq 0$  имеет место равенство  $V(0, \xi)=0$  [10]. Разложим функцию  $V(X, \xi)$  в ряд Тэйлора по переменной  $X$  в окрестности нуля. При определении производных используем, следуя [11], неявную форму решения  $V = \Phi(X - \epsilon V \xi)$ . Дифференцируя это равенство необходимое число раз, получим

$$V = \frac{\Phi'(0)}{1 + \epsilon \Phi'(0) \xi} X + \frac{1}{2} \frac{\Phi''(0)}{(1 + \epsilon \Phi'(0) \xi)^3} X^2 + \dots \quad (2.1)$$

При  $\xi=0$  ряд (2.1) совпадает с разложением в ряд Тэйлора начального условия. Обозначим  $s'(\xi)$  координату ударной волны на оси  $X$ . Согласно известным асимптотическим формулам [10], для любого типа симметрии  $s' = O(\xi^{1/2})$ .

Дифференциальное уравнение для координаты скачка  $s'$  следует из (1.3). Переходя от  $t$  к  $\xi$ , имеем

$$\frac{ds'}{d\xi} = \frac{1}{2} \epsilon V + \frac{1}{8} \frac{\epsilon^2}{c_0 \chi} V^2; \quad \chi=1, \quad 1 + \frac{1}{2} \xi, \quad \exp \xi \quad (2.2)$$

где  $V(s', \xi)$  определено согласно (2.1). При  $n=1, 2$  величина правой части (2.2) в малых главного и следующего порядков определяется ее первым членом. Напротив, при  $n=0$  первое слагаемое есть  $\xi^{-1/2}(O(1) + O(\xi^{-1}))$ , а второе  $-O(\xi^{-1})$ . Это означает, что для цилиндрических и сферических волн учет неизэнтропичности не играет роли при уточнении решения, а в плоском случае, наоборот, определяет следующую поправку к асимптотическому решению.

Подставляя (2.1) в (2.2) и отбрасывая малые заведомо высших порядков, получим решение в виде

$$s' = a \sqrt{1 + \epsilon \Phi'(0) \xi}^{-1/4} \sqrt{\epsilon a^2 \Phi'(0) / c_0} + O(\xi^{-1}) \quad (2.3)$$

где  $a$  — постоянная,  $v=1, 0, 0$  для  $n=0, 1, 2$ .

Выражения (2.1), (2.3) дают требуемое асимптотическое решение. Найдем закон движения ударной волны и величину давления за фронтом  $p_2$ . Введем обозначения  $c_{n+1} = a(2^{n(2-n)} \epsilon \Phi'(0) c_0^{1/2} n^{-1})$ ,  $n=0, 1, 2$ . С точностью до некоторой постоянной  $r_0$  радиус фронта ударной волны равен  $r_2 = c_0 t + s'(t)$ , откуда, используя (2.3), получим закон движения фронта в виде

$$r_2 - r_0 - c_0 t = c_n y^{-1/4} \sqrt{c_n^2 + 1/2} (a^2 / c_n) y^{-1} \\ y = (c_0 t)^{1/2}, \quad (c_0 t)^{1/4}, \quad \ln t \quad (2.4)$$

Погрешность правой части равна соответственно  $O(t^{-1}), O(t^{-1/2}), O(\ln^{-1} t)$ . Здесь и ниже при вычислении постоянных пренебрегаем малой величиной  $\Phi'(0)$  по сравнению с единицей.

Полагая в (2.1)  $X=s'$ , используя (2.3) и заменяя  $t$  на  $r_2$  согласно (2.4), получим зависимость  $v_2(r_2)$ . Далее из условий на скачке определим зависимость  $p_2(r_2)$ . Для  $n=1, 2$  достаточно считать, что  $c_0 t = r_2$ ,  $p_2 = \rho_0 c_0 v_2 + 1/2 \varepsilon \rho_0 v_2^2$ . В плоском случае следует использовать более точные формулы

$$c_0 t = r_2 - c_1 r_2^{1/2}, \quad p_2 = \rho_0 c_0 v_2 + 1/2 \varepsilon \rho_0 v_2^2$$

$$\frac{p_2}{p_0} = 1 + \frac{\gamma}{\varepsilon} \left( \frac{c_1}{r_2^{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{r_2} \right) + O(r_2^{-3/2}), \quad n=0$$

$$\frac{p_2}{p_0} = 1 + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \left( \frac{c_2}{r_2^{3/4}} - \frac{c_2'}{r_2^{5/4}} \right) + O(r_2^{-3/2}), \quad n=1$$

$$\frac{p_2}{p_0} = 1 + \frac{\gamma}{\varepsilon} \left( \frac{c_3}{r_2 R^{1/2}} + \frac{a^2 c_3' c_3''}{r_2 R^2} \right) + O(r_2^{-1} \ln^{-1/2} r_2), \quad n=2$$

$$R = c_3'' + \ln r_2, \quad c_2' = \frac{a^2}{2c_2}, \quad c_3' = 1/2 \frac{\Phi''}{\Phi'}, \quad c_3'' = \frac{a^2}{c_3^2} \quad (2.5)$$

При  $n=2$  в правой части (2.5) сохранялись оба слагаемых; погрешность определялась по величине третьего члена ряда Тэйлора. При  $n=0, 1$  учитывалось только первое слагаемое.

При  $n=1, 2$  формулы (2.5) совпадают с аналогичными формулами работ [3, 4] с точностью до обозначений постоянных. Результат для  $n=0$  можно сравнить с известным выражением (75.11) [2], где переменная  $t$  заменяется на  $r_2$  в соответствии с формулой (2.4). И в этом случае имеет место совпадение в малых главного и следующего порядков.

На фигуре представлены результаты аппроксимации расчетных данных по точечному взрыву в воздухе [12] формулами (2.5) для  $n=0, 1, 2$  (штриховая линия). Постоянные определялись из условия совпадения решения в ряде точек для значений  $p_2/p_0$ , близких к 1.5. Обозначен также результат аппроксимации в малых главного порядка (штрихпунктирная линия). Сплошная линия соответствует численному решению в безразмерных переменных [12].

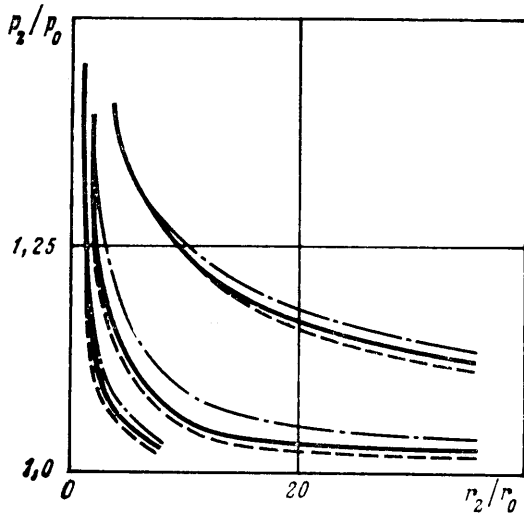
**3. Пределы применимости модели.** Исходя из свойств решения при  $b \rightarrow 0$ , оценим верхнюю границу амплитуды возмущений, для которых можно использовать модельное уравнение (1.2). Для плоских движений приближение простой волны в гладкой области и неадиабатическое выражение (1.3) для скорости ударного фронта по степени точности эквивалентны известному методу К. Фридрикса [2]. В [13] показано, что в гладкой области метод Фридрикса удовлетворительно описывает течение в диапазоне чисел Маха волны  $M' \leq 1.5$ . Однако скорость скачка определяется с существенно большей погрешностью.

Причина состоит в следующем. При выводе (1.3) скачок энтропии приближенно выражается через куб скачка скорости по формуле

$$\frac{[s]}{c_v} = \frac{\gamma(\gamma^2 - 1)}{12} \left( \frac{[v]}{c_0} \right)^3 \quad (3.1)$$

Известно (см. [14]), что аналогичное выражение через куб скачка давления

$$\frac{[s]}{c_v} = \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} z^3, \quad z = \frac{p_2 - p_0}{p_0} \quad (3.2)$$



приводит к большим относительным погрешностям в определении  $[s]$  при сравнительно малых  $z$ . Поэтому можно ожидать, что основная ошибка связана с приближением (3.1).

Ниже приведены значения относительных погрешностей  $\delta_v$  и  $\delta_p$  при вычислении скачка энтропии по формулам (3.1), (3.2) по сравнению с точными значениями ( $\gamma=1,4$ ):

$\frac{[v]}{c_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$z$	0,149	0,316	0,502	0,710	0,941
$\delta_v, \%$	3,3	6,5	10,4	14,4	19
$\delta_p, \%$	24	53	89	>100	>100

Для интенсивности волны  $z$  указаны только три первые значащие цифры. Видно, что точность формулы (3.1) примерно на порядок выше, чем точность зависимости (3.2). Тем не менее и в первом случае удовлетворительное совпадение имеет место только при  $z \leq 0,7$ , что соответствует диапазону чисел Маха  $1 \leq M' \approx 1,3$ . Именно этим диапазоном и определяются границы использования уравнения (1.2).

Из сравнения точности формул (3.1), (3.2) следует, что запись уравнения (1.2) в терминах избыточного давления  $p'$  вместо скорости газа  $v$  может привести к существенно большему погрешностям. Поведение кривых на фигуре подтверждает это замечание; так, использование уточненной асимптотической формулы для скачка давления в плоском случае не приводит к значительному уменьшению погрешности по сравнению с аппроксимацией в малых главного порядка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 427 с.
3. Шефтер Г. М. Асимптотическое решение уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа с цилиндрической симметрией // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 4. С. 572–575.
4. Якимов Ю. Л. Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических законах затухания ударных волн // ПММ. 1955. Т. 19. № 6. С. 681–692.
5. Макаров С. Н., Хамзина Б. С. Эволюция гармонического сигнала в газодинамическом приближении теории плоских волн конечной амплитуды // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 135–139.
6. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Об изменении энтропии при рассеянии плоских волн конечной амплитуды // Газодинамика и теплообмен. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. Вып. 9. С. 177–181.
7. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. К теории волн конечной амплитуды в диссипативной среде // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1969. № 5. С. 33–38.
8. Максимов А. Ю., Максимов Б. И., Михайлов Г. Д. К динамике акустических волн в диссипативных средах // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 321–323.
9. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. К расчету волн конечной амплитуды в газодинамическом приближении // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 184–187.
10. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
12. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. М.: Наука, 1974. 255 с.
13. Nakamura Y., Nakashima Y. Analysis of unsteady shock propagation generated by interaction with simple expansion waves // Techn. Repts. Kumamoto Univ. 1987. V. 36. № 1. P. 31–40.
14. Григоренко В. Л., Крайко А. Н. Об использовании потенциального приближения для расчета течений со скачками уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 121–129.

Ленинград

Поступила в редакцию  
2.VII.1987