МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1989

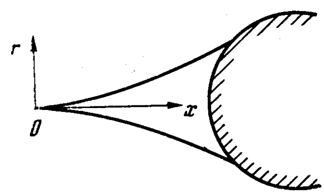
УДК 532.5

СЫЧЕВ ВИК. В.

О ТЕЧЕНИИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВОЗВРАТА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КАВЕРНЫ

Рассмотрено стационарное осесимметричное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. Исследована структура особенности, которая возникает в точке отхода свободной поверхности тока от оси симметрии.

В [1, 2] было получено численное решение задачи для осесимметричного течения идеальной жидкости с каверной, имеющей впереди точку возврата (см. фигуру). Такое решение представляет собой осесимметричный аналог решения Чаплыгина [3] для плоского течения. Точка отхода свободной поверхности тока от оси (или соответственно плоскости) симметрии в этих решениях является особой. Для плоских течений структура особенности хорошо известна [4]. Настоящая работа посвящена ее изучению для осесимметричного случая.



Введем сферические координаты lR, θ, φ с началом в точке отхода свободной поверхности от оси симметрии, связав их с цилиндрическими координатами lx, lr, φ по формулам $x=R\cos\theta$, $r=R\sin\theta$. Здесь l – характерный размер, например размер тела, к которому примыкает каверна. Направление оси x будем считать совпадающим с направлением однородного набегающего потока (см. фигуру). Через $u_\infty u_R$, $u_\infty u_\theta$ и $p_\infty+\rho u_\infty^2 p$ обозначим соответствующие проекции вектора скорости и давление, где u_∞, p_∞ – скорость и давление в набегающем потоке и ρ – плотность среды.

Введем потенциал скорости $\Phi(R,\theta)$ и функцию тока $\psi(R,\theta)$

$$u_R=\frac{\partial\Phi}{\partial R}=\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad u_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

Уравнение Лапласа для потенциала запишем в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0 \tag{2}$$

Краевыми условиями будут: условие симметрии при $\theta=\pi$ ($x<0$, $r=0$) и условие постоянства скорости на неизвестной заранее свободной поверхности тока $\theta=\theta_s(R)$ ($r=r_s(x)$). Эти условия имеют вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0\quad(\theta=\pi),\quad \psi=0,\quad u_R^2+u_\theta^2=q_0^2\quad(\theta=\theta_s(R)) \tag{3}$$

Постоянная q_0 – скорость при $\theta=\theta_s(R)$, причем поскольку свободная поверхность тока не может начинаться с критической точки, то $\theta_s(0)=0$.

Представим решение уравнения (2) при $R\to0$ в виде следующего асимптотического разложения:

$$\Phi=q_0R\cos\theta+R\mu_1(R)f_1(\theta)+R\mu_2(R)f_2(\theta)+o[R\mu_2(R)] \tag{4}$$

Относительно функций $\mu_1(R)$ и $\mu_2(R)$ будем предполагать, что $\mu_1\to0$, $\mu_2=o(\mu_1)$ и $R^{-\lambda}\mu_2\to\infty$ при любом фиксированном $\lambda>0$ и $R\to0$. Последнее условие означает, что второй и третий члены разложения (4) отличаются от первого (соответствующего однородному потоку) на величину, которая стремится к нулю медленнее, чем любая степень R, и поэтому это разложение представляется наиболее общим.

Подставляя (4) в (2), получаем, что функция $f_1(\theta)$ удовлетворяет уравнению Лежандра

$$f_1''+\operatorname{ctg}\theta f_1'+2f_1=0$$

Его решением при условии $f_1'(\pi)=0$ является полином Лежандра первого рода

$$f_1=k_1\cos\theta,\quad k_1=\text{const} \tag{5}$$

Функция $\mu_1(R)$ в (4) остается пока произвольной. Функцию $\mu_2(R)$ выберем из условия, что уравнение для $f_2(\theta)$ содержит в качестве неоднородности $f_1(\theta)$. В результате получим

$$\mu_2=-R\mu_1'$$

$$f_2''+\operatorname{ctg}\theta f_2'+2f_2=3f_1=3k_1\cos\theta \tag{6}$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее условию $f_2'(\pi)=0$, есть

$$f_2=k_2\cos\theta-k_1[\cos\theta\ln(1-\cos\theta)+1],\quad k_2=\text{const} \tag{7}$$

Из выражений (4), (5), (7) для потенциала на основании (1) находятся выражения для функции тока и составляющих вектора скорости. При $\theta\to0$ они имеют вид

$$\psi=R^2(q_0/2)\ [\theta^2+O(\theta^4)]+R^2\mu_1(k_1/2)\ [\theta^2+O(\theta^4)]+R^2\mu_2k_1\ [1+O(\theta^2\ln\theta)]+o(R^2\mu_2) \tag{8}$$

$$u_R^2+u_\theta^2=q_0^2+2k_1q_0\mu_1-\mu_2 4k_1q_0\ln\theta+O(\mu_2)$$

Из (8) следует, что краевые условия при $\theta=\theta_s(R)$ в (3) будут выполнены, если положить

$$-{}^1/_2 q_0\theta_s^2=k_1\mu_2,\quad \mu_1=2\mu_2\ln\theta_s$$

Из этих соотношений вместе с первым выражением в (6) следует:

$$\mu_1=\sigma\mu_2,\quad \mu_2=e^\sigma$$

$$\theta_s=\left(-\frac{2k_1}{q_0}\right)^{1/2}\mu_2^{1/2}+o(\mu_2^{1/2}),\quad \sigma=-(-2\ln R)^{1/2},\quad k_1<0 \tag{9}$$

Полученное особое решение (4), (5), (7), (9) описывает течение в окрестности точки отхода свободной поверхности тока от оси симметрии. Ясно, что, как и для плоских течений [5], это локальное решение справедливо и для вихрепотенциальных течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли [6].

В заключение приведем выражения для скорости и давления на оси симметрии течения перед точкой $x=0$ и формы свободной поверхности тока в цилиндрических координатах

$$u_e(x)=-u_R(R,\pi)=q_0+k_1\sigma_0e^{\sigma_0}+O(e^{\sigma_0})$$

$$p_e(x)=p(R,\pi)=p_{00}-q_0k_1\sigma_0e^{\sigma_0}+O(e^{\sigma_0})\qquad (x\to-0)$$

$$r_s(x)=\left(-\frac{2k_1}{q_0}\right)^{1/2}xe^{\sigma_0/2}+o(xe^{\sigma_0/2})\qquad (x\to+0)$$

$$\sigma_0=-(-2\ln|x|)^{1/2},\quad q_0=(1-2p_{00})^{1/2},\quad p_{00}>0$$

Нетрудно видеть, что при $|x|\to0$ неблагоприятный градиент давления и кривизна свободной поверхности неограниченно возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Southwell R. V., Vaisey G.* Relaxation methods applied to engineering problems. XII. Fluid motions characterized by «free» stream-lines // Phil. Trans. Royal Soc. London. Ser. A. 1946. V. 240. № 815. P. 117–161.
2. *Кожуро Л. А.* Обтекание сферы с заостренными областями постоянного давления // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983. Т. 14. № 6. С. 83–88.
3. *Чаплыгин С. А.* К вопросу о струях в несжимаемой жидкости // Тр. Отделения физ. наук О-ва любит. естествозн. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 35–40.
4. *Lighthill M. J.* A note on cusped cavities // Aeronaut. Res. Coun. Rep. and Memor. 1949. № 2328. 3p.
5. *Садовский В. С., Свириденко М. А.* Некоторые особенности вихрепотенциальных течений около ступеньки и клина // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 6. С. 16–27.
6. *Кожуро Л. А.* Семейство осесимметричных вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 88–94.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1988