

УДК 533.6.011.55

ГУВЕРНИОК С. В., САВИНОВ К. Г.

**О РАВНОВЕСИИ ГИБКОЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ОБОЛОЧКИ
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА**

Численным методом [1] исследовано плоское установившееся течение около одноосной абсолютно гибкой разомкнутой проницаемой оболочки, закрепленной в равномерном сверхзвуковом потоке идеального газа. Определено влияние угла атаки и степени неравномерности распределения проницаемости на аэродинамические характеристики и форму равновесия оболочки при различных способах ее закрепления. Сформулированы приближенные «соотношения локальности», указывающие зависимость распределенной нагрузки на вогнутый проницаемый экран от степени его проницаемости и параметров набегающего потока. Дан пример применения этих соотношений к решению пространственных задач о равновесии в сверхзвуковом потоке проницаемых оболочек типа «круглого купола» [2].

1. Рассмотрим плоскую задачу об установившемся сверхзвуковом обтекании гибкой одноосной разомкнутой проницаемой оболочки, концы которой закреплены с возможностью скольжения на двух прямолинейных направляющих $y=0$ и $y=x \operatorname{tg} 2\delta$. Вектор скорости V_∞ набегающего потока идеального совершенного газа с числом Маха $M_\infty > 1$ ориентирован под углом α к направлению $\mathbf{n}_0 = \{\cos \delta, \sin \delta\}$ относительно прямоугольной системы координат x, y . Большие значения угла α , при которых возможно присоединение головного скачка в точках A или A_1 , исключаются. На фиг. 1: BB_1 — отошедший скачок уплотнения, AA_1 — тонкостенная проницаемая оболочка, которая моделируется поверхностью гидродинамического разрыва, Π — сверхзвуковая донная струя [1]. Просачивание газа из дозвукового ударного слоя I через поверхность AA_1 в область сверхзвуковой донной струи Π происходит в режиме двойного запираания, для которого в [1] построена полная система граничных условий (режим Ω). Направляющие OA и OA_1 с потоком не взаимодействуют.

Состояние равновесия одноосной оболочки [3] описывается уравнением (1.1), в котором распределенная аэродинамическая нагрузка \mathbf{F} берется в виде [1]

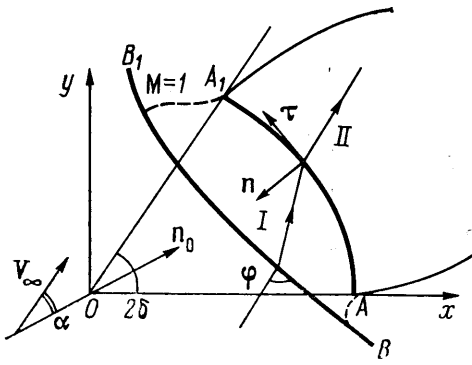
$$\frac{dT}{ds} \boldsymbol{\tau} + \frac{T}{R} \mathbf{n} + \mathbf{F} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{n}X, \quad X = p_1 \beta_1 \frac{\beta_1 + 1/\beta_1 - \beta_2 - 1/\beta_2}{1 - v^2 \beta_1^2} \quad (1.2)$$

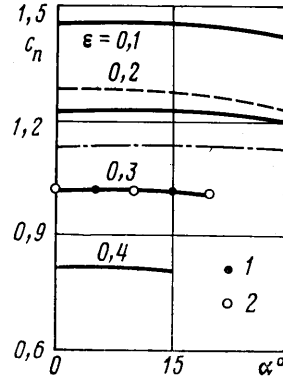
$$\Theta(\beta_1) = \varepsilon, \quad \Theta(\beta) = \beta \left(\frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\gamma - 1}{2} \beta^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

$$\beta_2 = \frac{1 + (1 - \varepsilon)^{1/2} (1 - v^2 \varepsilon)^{1/2}}{1 + (1 - \varepsilon) v^2}, \quad v^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Здесь s — расстояние вдоль контура оболочки, начиная от точки A , R — местный радиус кривизны, \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — направления нормали и касательной к AA_1 , T — погонное натяжение оболочки, γ — отношение теплоемкостей, ε — эффективная проницаемость оболочки ($0 < \varepsilon < 1$), β_1, β_2 — заданные функции от ε ($0 < \beta_1 < 1, \beta_2 > 1$), p_1 — давление на наветренной сто-



Фиг. 1



Фиг. 2

роне поверхности разрыва AA_1 , определяемое из решения краевой задачи о невязком течении газа в ударном слое ABB_1A_1 с использованием на AA_1 граничного условия

$$\beta_1^{-2} V_{1n}^2 + v^2 V_{1\tau}^2 = 2v^2 i_0, \quad V_{1n} = -n V_1, \quad V_{1\tau} = \tau V_1 \quad (1.3)$$

где i_0 — полная энтальпия в набегающем потоке.

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$s_* = \frac{s}{L}, \quad R_* = \frac{R}{L}, \quad V_{1*} = \frac{V_1}{v\sqrt{2i_0}}, \quad x_* = \frac{x}{L}, \quad y_* = \frac{y}{L}$$

$$F_* = \frac{F}{q_\infty}, \quad X_* = \frac{X}{q_\infty}, \quad p_{1*} = \frac{p_1}{q_\infty}, \quad \frac{1}{g_\infty} = \Theta \left(\frac{v\sqrt{2i_0}}{V_\infty} \right)$$

$$g = \frac{\rho_1 V_{1n}}{\rho_\infty V_\infty}, \quad T_* = \frac{T}{Lq_\infty}, \quad \omega = \frac{p_1 \rho_1^{-\tau}}{\rho_\infty \rho_\infty^{-\tau}}$$

Здесь L — длина контура оболочки AA_1 , p_∞ , ρ_∞ , V_∞ — параметры невозмущенного потока, $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ — скоростной напор, g — параметр расхода, ω — энтропийная функция. В дальнейшем звездочка в индексе у безразмерных величин опускается.

Задавая контур оболочки в параметрическом виде $x = x_0 + x_1(s)$, $y = y_1(s)$, $x_0 = y_1(1) \operatorname{ctg} 2\delta - x_1(1)$, получаем из (1.1)–(1.2) систему уравнений равновесия в форме (1.4). Условия закрепления концов оболочки на прямолинейных направляющих с возможностью свободного проскальзывания образуют систему граничных условий (1.5)

$$(x_1'')^2 + (y_1'')^2 = \left(\frac{X}{T} \right)^2, \quad (x_1')^2 + (y_1')^2 = 1, \quad T' = 0 \quad (1.4)$$

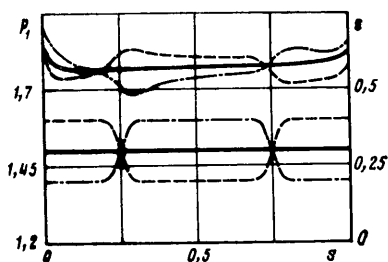
$$x_1(0) = x_1'(0) = y_1(0) = 0, \quad x_1'(1) + y_1'(1) \operatorname{tg} 2\delta = 0 \quad (1.5)$$

Решение краевой задачи (1.4)–(1.5) представим в виде квадратур от $X(s)$

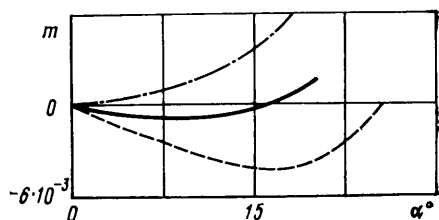
$$T = (2\delta)^{-1} f_1(1), \quad f_1(s) = \int_0^s X ds, \quad f_2(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(1)} \quad (1.6)$$

$$x_1(s) = \int_0^s \sin(2\delta f_2) ds, \quad y_1(s) = \int_0^s \cos(2\delta f_2) ds$$

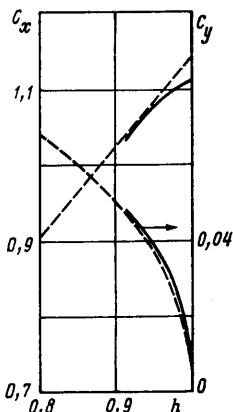
$$Q = \int_0^1 F ds = n_0 c_n, \quad c_n = f_1(0) \delta^{-1} \sin \delta$$



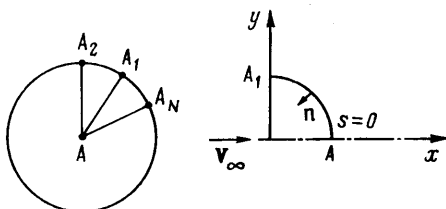
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

где \mathbf{Q} — скользящий вектор результирующей аэродинамической нагрузки — действует вдоль линии

$$y = x \operatorname{tg} \delta + a / \cos \delta, \quad a = -[x_1(1) + y_1(1)] / \sin \delta$$

2. Поставленная задача взаимодействия проницаемой оболочки с потоком газа решалась путем последовательных приближений: при заданных $x_1(s)$, $y_1(s)$ производился численный расчет течения в ударном слое с использованием метода установления по схеме Бабенко — Русанова (так же, как в [1]) и находилось распределение ортогональной нагрузки $X(s)$, затем в соответствии с (1.6) производилось уточнение формы оболочки и далее цикл повторялся.

Расчеты выполнены при $\gamma = 1,4$, $2 \leq M_\infty \leq 6$, $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$, $0 \leq \delta \leq 60^\circ$ для равномерного и неравномерного распределений проницаемости $\varepsilon(s)$. Точность расчета газодинамических параметров контролировалась по степени сохранения основных интегралов уравнений движения. Максимальная ошибка возникала в окрестности концов оболочки, в некоторых случаях она достигала 3%. Расчеты при больших δ проводились с подключением искусственной вязкости. Влияние искусственной вязкости при решении задач обтекания вогнутых тел оценивалось в [4], где показано, что снижение точности в районе кромки связано с некоторым завышением величины давления.

На фиг. 2–5 представлены результаты расчетов при $M_\infty = 6$. Сплошными линиями на фиг. 2 построена зависимость коэффициента сопротивления $c_n = |\mathbf{Q}|$ от угла атаки при $\delta = 40^\circ$ и различных $\varepsilon = \text{const}$. Штриховая и штрихпунктирная линии здесь показывают влияние на $c_n(\alpha)$ угла раскрытия оболочки: $\delta = 25^\circ$ и 55° соответственно.

Влияние способа распределения проницаемости иллюстрируется на фиг. 3, 4. Три нижние кривые на фиг. 3 соответствуют трем типам распределения проницаемости $\varepsilon(s)$ (показаны штриховой, штрихпунктирной и сплошной линиями), здесь же построены соответствующие распре-

деления давления $p_1(s)$ при $\alpha=20^\circ$, $\delta=40^\circ$, а на фиг. 4 — зависимости момента $m(\alpha)=c_n d$ силы Q относительно точки пересечения направляющих. Среднее значение проницаемости для трех указанных распределений составляет 0,3 и этим в основном определяется величина коэффициента сопротивления c_n : на фиг. 2 точки 1 соответствуют случаю повышенной проницаемости в центральной части оболочки, точки 2 — повышенной проницаемости на периферии.

При рассмотренном выше способе закрепления оболочки угол δ считался заданным, а длина h хорды AA_1 определялась из решения (1.6) задачи обтекания по формуле $h^2=x_1^2(1)+y_1^2(1)$. Эту формулу можно рассматривать как неявное выражение для определения параметра δ в решении аналогичной задачи о равновесии гибкой проницаемой оболочки, концы которой закреплены неподвижно на заданном расстоянии h друг от друга. На фиг. 5 сплошными линиями показана расчетная зависимость от h аэродинамических коэффициентов оболочки с асимметричным распределением проницаемости $\varepsilon=0,3-0,2s$ и с хордой, ориентированной перпендикулярно вектору скорости набегающего потока; $C_x=c_x/k_\infty$, $C_y=c_y/k_\infty$ — коэффициенты сопротивления и подъемной силы в поточной системе координат, смысл штриховых линий и нормировочного коэффициента k_∞ объясняется ниже (при $\gamma=1,4$ и $M_\infty=6$ $k_\infty=1,18$).

В целом по результатам расчетов можно отметить следующие свойства равновесия гибкой проницаемой оболочки в сверхзвуковом потоке газа. При $\varepsilon=\text{const}$ контур оболочки практически совпадает с дугой окружности с центром на пересечении направляющих. Увеличение δ приводит к выравниванию давления p_1 и расхода g всюду, кроме небольших окрестностей кромок оболочки. Влияние угла атаки слабое. Порядок подъемной силы, зависящей от угла атаки, мал, и даже небольшая асимметрия в распределении проницаемости приводит к появлению подъемной силы того же порядка. Коэффициент сопротивления c_n и натяжение оболочки T практически не зависят от характера распределения проницаемости, а определяются величиной средней проницаемости. В отличие от этого, форма оболочки в основном определяется степенью неравномерности проницаемости. Существенное влияние неравномерность проницаемости оказывает на величину и знак результирующего момента $m(\alpha)$, характеризующего статическую устойчивость состояний равновесия.

3. Проанализируем структуру членов, ответственных за распределение аэродинамической нагрузки F по поверхности проницаемой оболочки. Справедливы следующие точные представления величин p_1 , g :

$$p_1=k_\infty k_w k_1(\omega, V_{1r}), \quad g=g_\infty \varepsilon (1-v^2 V_{1r}^2)^{-1/2} k_1(\omega, V_{1r}); \quad (3.1)$$

$$k_\infty = \frac{\gamma+1}{\gamma} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} - v^2 M_\infty^{-2} \right)^{1/(1-\gamma)}, \quad k_w = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)} (1-v^2 \beta_1^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$k_1 = (1-v^2 V_{1r}^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \omega_1^{-1/(\gamma-1)}, \quad \omega_1 = \omega(\varphi)/\omega(\pi/2)$$

$$\omega(\varphi) = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 \sin^2 \varphi - v^2 \right) \left(v^2 + \frac{1}{\gamma+1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \varphi} \right)^{\gamma}$$

Эти соотношения являются следствием из (1.3), а также из условий на ударной волне и первых интегралов уравнений движения, выражающих постоянство энтропии и полной энтальпии вдоль линий тока между головным скачком BB_1 и проницаемой поверхностью AA_1 (φ — угол наклона BB_1 к вектору V_∞ в точке пересечения фронта скачка с данной линией тока, фиг. 1). Подставим в (1.2) выражение для p_1 из (3.1), тогда

$$X = k_\infty c_w(\varepsilon) k_1(\omega, V_{1r}), \quad c_w = (\beta_1 + 1/\beta_1 - \beta_2 - 1/\beta_2) \varepsilon \quad (3.2)$$

Простейшая оценка для k_1 вытекает из (1.3) и очевидного условия о том, что всякая линия тока между точками на скачке и оболочке лежит в дозвуковой области I ударного слоя, т. е. $V_{1n}^2 + V_{1r}^2 < 1$, $\sin^2 \varphi > \sin^2 \varphi_1$ (фиг. 1). Здесь угол $\varphi_1 = \varphi_1(M_\infty)$ соответствует φ в точке пересечения

ударной волны со звуковой линией и является известной функцией от M_∞ . В результате получается, что k_1 принадлежит интервалу $\Delta_1 < k_1 < \Delta_2$, где

$$\Delta_1 = \left(\frac{1-\nu^2}{1-\nu^2\beta_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} < 1, \quad \Delta_2 = [\omega_1(\varphi_1)]^{1/(1-\gamma)} > 1$$

Однако фактическое изменение k_1 для данного класса задач ограничено гораздо более узкой окрестностью единицы. Выполненные расчеты показали, что почти вдоль всей поверхности оболочки отклонения k_1 от единицы не превышают нескольких процентов. Качественно этот факт можно объяснить следующим общим свойством течений перед вогнутыми проницаемыми экранами. В центральной части непосредственно перед экраном в силу его геометрии скосы потока малы, а прирост энтропии, приносимый вдоль линий тока, близок к приросту в прямом скачке. Поэтому числитель и знаменатель в выражении (3.1) для k_1 близки к единице. Вблизи периферийной части экрана касательные скорости частиц непосредственно перед экраном возрастают, но соответствующие линии тока приходят из области, где головной скачок имеет больший наклон, т. е. прирост энтропии меньший. В результате оба фактора (изменение $V_{1\tau}$ и ω_1) действуют в противоположные стороны, чем и объясняется столь консервативное поведение величины k_1 .

Отбросив в (3.1)–(3.2), (1.2) нелокальные члены, получаем приближенные соотношения локальности

$$X = k_\infty c_w(\varepsilon), \quad p_1 = k_\infty k_w(\varepsilon), \quad g = g_\infty \varepsilon \quad (3.3)$$

которые представляют явную зависимость распределенной нагрузки и величин p_1 , g от параметров набегающего потока и характеристик проницаемости оболочки.

Совместно с (1.6) соотношения (3.3) дают приближенное решение задачи о равновесии проницаемой оболочки, в частности приближенное выражение для коэффициента сопротивления представляется в виде

$$c_n = k_\infty \delta^{-1} \sin \delta \int_0^1 c_w(\varepsilon) ds \quad (3.4)$$

Сравнение данных, полученных численным методом и по формулам (1.6), (3.3), (3.4), показало их удовлетворительное согласование. Например, для случаев на фиг. 2 расчетные значения C_n при $0 \leq \alpha \leq 15^\circ$ отличаются от приближенных данных по формуле (3.4) не более чем на 3%. Штриховые линии на фиг. 5 построены по формулам $C_x = c_n \cos(\psi) k_\infty^{-1}$, $C_y = c_n \sin(\psi) k_\infty^{-1}$, в которых $\psi = \delta - \alpha_0$, $\text{tg } \alpha_0 = -x_1(1)/y_1(1)$, а c_n берется согласно (3.4). Наибольшее рассогласование данных численного и приближенного решений наблюдается при $h \rightarrow 1$, когда прогиб оболочки уменьшается и погрешность соотношений локальности возрастает.

4. Соотношения локальности (3.3) можно использовать для получения приближенных данных о формообразовании и аэродинамических характеристиках вогнутых проницаемых оболочек сложной конфигурации.

В качестве примера рассмотрим пространственную задачу о равновесии проницаемой абсолютно гибкой нерастяжимой оболочки, которая удерживается в сверхзвуковом потоке при помощи связей, наложенных на N точек кромки оболочки. Ограничимся простейшим случаем, когда в свободном состоянии оболочка имеет форму плоского круга, а указанные N точек распределены равномерно по периметру этого круга и закреплены с возможностью «скольжения без трения» в плоскости, ориентированной перпендикулярно направлению набегающего потока. Дополнительно будем считать, что проницаемость оболочки зависит только от расстояния s до центра A круга, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(s)$, $0 \leq s \leq L$. Тогда в рамках соотно-

шений локальности (3.3) распределенная аэродинамическая нагрузка X на оболочку будет также зависеть лишь от одной лагранжевой координаты s .

В принятых допущениях состоянию равновесия оболочки отвечает волнистая поверхность типа «круглого купола» [2] с бесконечно длинными стропами. В соответствии с развитой в [2] теорией задача о формообразовании «круглого купола» с N точками закрепления A_1, \dots, A_N сводится к задаче (1.1) о равновесии радиальной нити AA_1 под действием распределенной силы

$$F = -nX(s)y_1(s) \frac{2\pi}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \quad (4.1)$$

где y_1 — расстояние от элемента нити AA_1 с лагранжевой координатой s до оси симметрии оболочки (фиг. 6), $X(s)$ — распределенная аэродинамическая нагрузка на купол. В отличие от случая обтекания одноосной оболочки здесь AA_1 — нить, удерживающая прилегающие секторы купола, на которые действует нагрузка $X(s)$. Формула (4.1) учитывает механизм передачи усилий от секторов купола к радиальным нитям AA_1, \dots, AA_N .

Из (1.1), (3.3) и (4.1) при $N \gg 1$ имеем

$$y_1''(s) = -\frac{k_\infty c_w(\varepsilon)}{c_L} 2y_1 \sqrt{1 - (y_1')^2}, \quad T' = 0 \quad (4.2)$$

$$y_1(0) = y_1'(1) = 0, \quad y_1'(0) = 1, \quad 0 \leq s \leq 1$$

Здесь $c_L = NT/\pi$ — коэффициент сопротивления оболочки. Все линейные размеры отнесены к L . Натяжение T радиальных нитей нормировано на $q_\infty L^2$.

Краевая задача (4.2), очевидно, эквивалентна интегральному уравнению

$$y_1(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{I}{I_1}\right) ds$$

$$I = \int_0^s c_w y_1 ds, \quad I_1 = \int_0^1 c_w y_1 ds$$

из которого видно, что форма оболочки определяется только степенью неравномерности распределения проницаемости, а от M_∞ не зависит. Отношение c_L/k_∞ также не зависит от M_∞

$$\frac{c_L}{k_\infty} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 c_w y_1 ds$$

В случае равномерной проницаемости ($\varepsilon = \text{const}$) решение выражается через полные эллиптические интегралы, в частности

$$y_1(1) = \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \right)^{-1} \approx 0,763, \quad c_L = k_\infty c_w y_1^2(1) \quad (4.3)$$

В общем случае требуется численное интегрирование уравнения (4.2). Для распределения $\varepsilon(s) = 0,4 - 0,3s$ (повышенная проницаемость в центре оболочки) в результате расчетов получено $y_1(1) = 0,803$, $c_L/k_\infty = 0,732$, при этом средняя проницаемость составляет

$$\varepsilon_0 = \int_0^1 2\varepsilon s ds = 0,2.$$

При равномерной проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0,2$ согласно (4.3) имеем $c_L \approx 0,669 k_\infty$. Аналогично для распределения $\varepsilon(s) = 0,1 + 0,3s$ (повышенная проницаемость на периферии оболочки) имеем $y_1(1) \approx 0,748$, $c_L \approx 0,605 k_\infty$, $\varepsilon_0 = 0,3$. В случае равномерной проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0,3$ из (4.3) получаем $c_L \approx 0,553 k_\infty$. Видно, что из-за влияния неравномерности распределения проницаемости возможна немонотонная зависимость c_L от ε_0 .

Приведенные соотношения получены в предположении о существовании перед оболочкой отошедшего скачка уплотнения. В приближении (3.3) для суммарного расхода газа через оболочку имеем

$$\rho_\infty V_\infty \int_0^1 2\pi s g ds = \rho_\infty V_\infty \pi \varepsilon_0 g_\infty$$

Учитывая, что максимально возможное значение расхода $\rho_\infty V_\infty \pi y_1^2(1)$ достигается, очевидно, в момент присоединения головного скачка к входной кромке оболочки, получим условие

$$g_\infty(M_\infty) \leq y_1^2(1) \left[\int_0^1 2\varepsilon s ds \right]^{-1}$$

нарушение которого означает переход на другую схему обтекания, в частности может привести к частичному складыванию оболочки в потоке, например, при увеличении M_∞ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гувернюк С. В., Савинов К. Г., Ульянов Г. С. Сверхзвуковое обтекание затупленных перфорированных экранов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 143–149.
2. Рахматулин Х. А. Теория осесимметричного парашюта // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1975. № 35. С. 3–35.
3. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. Гилинский М. М., Лебедев М. Г., Пчелкина Л. В. и др. Расчет течений идеального газа конечно-разностным нестационарным методом // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 30. С. 3–29.

Москва

Поступила в редакцию
1.VII.1988